CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – PHẠM HOÀNG HÀ
ĐẶNG ĐÌNH HANH – NGUYỄN CHU GIA VƯỢNG

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bài tập TOÁN 10

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – PHẠM HOÀNG HÀ – ĐẶNG ĐÌNH HANH – NGUYỄN CHU GIA VƯỢNG

Bài tập TOÁN 10

TẬP HAI

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

MỤC LỤC

CHƯƠNG VI
HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 15

HÀM SỐ

A – Kiến thức cần nhớ

1. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập hợp số D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x. Tập hợp D là *tập xác định* của hàm số. Tập tất cả các giá trị y nhận được là *tập giá trị* của hàm số.

2. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi x thuộc D.

3. Hàm số $y = f(x)$ gọi là *đồng biến* (tăng) trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b); x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hàm số $y = f(x)$ gọi là *nghịch biến* (giảm) trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b); x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Chú ý

+ Đồ thị của một hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ là đường "đi lên" từ trái sang phải.

+ Đồ thị của một hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ là đường "đi xuống" từ trái sang phải.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{x-5}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x - 6}$.

Giải.

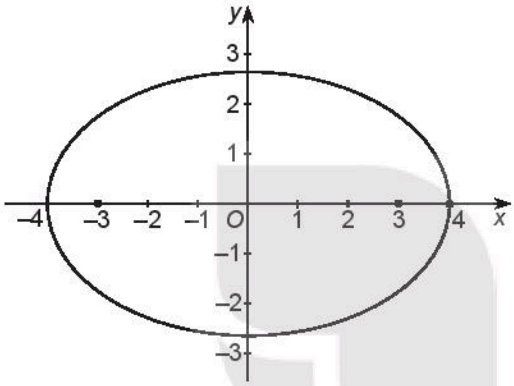
a) Hàm số xác định khi $x-5\geq 0$, hay $x\geq 5$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[5;+\infty)$.

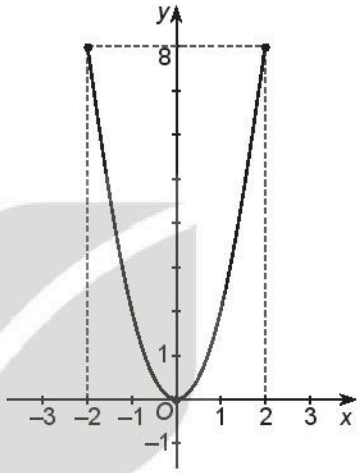
b) Hàm số xác định khi $x^2+5x-6\neq 0$, hay $x\neq 1, x\neq -6$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1;-6\}$.

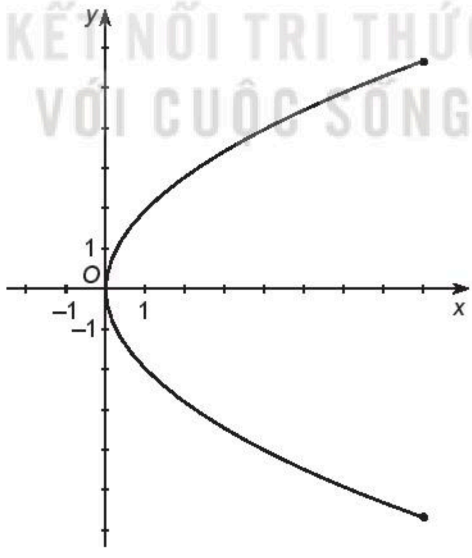
Ví dụ 2. Trong các hình: Hình 6.1, Hình 6.2, Hình 6.3, hình nào là đồ thị của hàm số? Nếu là đồ thị hàm số thì hãy nêu tập xác định và tập giá trị của hàm số đó.



Hình 6.1



Hình 6.2



Hình 6.3

Giải

Trong Hình 6.1 và Hình 6.3, ta thấy rằng mỗi giá trị của x cho hai giá trị của y nên Hình 6.1 và Hình 6.3 không phải là đồ thị của hàm số.

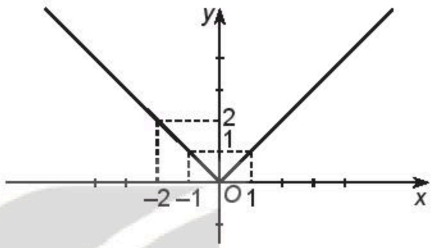
Trong Hình 6.2, với mỗi giá trị của x chỉ có duy nhất giá trị tương ứng của y nên Hình 6.2 là đồ thị của hàm số. Tập xác định của hàm số là $D = [-2; 2]$. Tập giá trị của hàm số là [0; 8].

Ví dụ 3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x|$. Từ đồ thị, hãy nêu khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến và tập giá trị của hàm số.

Giải

Ta có:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$



Hình 6.4

Với $x \geq 0$, đồ thị hàm số $y = x$ là phần đường thẳng đi qua điểm $O(0; 0)$ và điểm (1; 1) và nằm bên phải trục tung.

Với $x < 0$, đồ thị hàm số $y = -x$ là phần đường thẳng đi qua điểm (–1; 1) và điểm (–2; 2) và nằm bên trái trục tung (H.6.4).

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. Tập giá trị của hàm số là $[0; +\infty)$.

Ví dụ 4. Một hiệu chuyên cho thuê xe máy niêm yết giá như sau: Giá thuê xe là 110 nghìn đồng một ngày cho ba ngày đầu tiên và 80 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo.

a) Tính tổng số tiền phải trả T (nghìn đồng) theo số ngày x mà khách thuê xe. Công thức $T = T(x)$ thu được có phải là hàm số của x hay không? Nếu có, hãy vẽ đồ thị của hàm số $T(x)$.

b) Tính $T(2)$, $T(4)$, $T(10)$ và cho biết ý nghĩa của mỗi giá trị này.

c) Với số tiền là 2 triệu đồng thì khách có thể thuê xe trong tối đa bao nhiêu ngày liên tiếp?

Giải

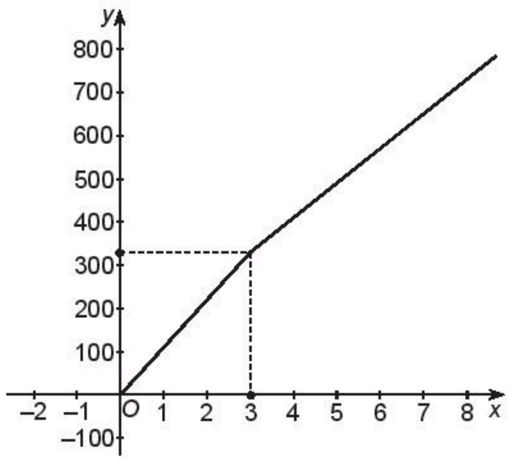
$$T = \begin{cases} 110x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 3 \\ 330 + 80(x-3) & \text{nếu } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 110x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 3 \\ 80x + 90 & \text{nếu } x > 3. \end{cases}$$

Công thức $T = T(x)$ là hàm số của x.

Đồ thị của hàm số $T(x)$ (H.6.5):

Với x thuộc đoạn [0; 3], đồ thị của hàm số $T(x)$ trùng với đồ thị của hàm số $y = 110x$.

Với x thuộc khoảng $(3; +\infty)$, đồ thị của hàm số $T(x)$ trùng với đồ thị của hàm số $y = 330 + 80(x - 3)$.



Hình 6.5

b) $T(2) = 220$: khách sẽ phải trả 220 nghìn đồng nếu thuê xe trong 2 ngày;

$T(4) = 410$: khách sẽ phải trả 410 nghìn đồng nếu thuê xe trong 4 ngày;

$T(10) = 890$: khách sẽ phải trả 890 nghìn đồng nếu thuê xe trong 10 ngày.

c) Đổi: 2 triệu đồng = 2 000 nghìn đồng.

Nếu $0 \leq x \leq 3$ thì $T(x) = 110x$. Ta có $110x \leq 110 \cdot 3$, hay $110x \leq 330$. Vậy với số tiền là 2 triệu đồng thì khách có thể thuê xe nhiều hơn 3 ngày liên tiếp.

Số tiền khách phải trả khi thuê xe ba ngày đầu là $3 \cdot 110 = 330$ (nghìn đồng).

Với 2 triệu đồng, số tiền khách còn lại sau khi thuê xe 3 ngày đầu là

$$2\,000 - 330 = 1\,670 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Nếu $x > 3$ thì $T(x) = 80x + 90$.

Xét bất phương trình $T(x) \leq 1\,670$ hay $80x + 90 \leq 1\,670$, ta suy ra $x \leq 19{,}75$. Nghiệm nguyên dương lớn nhất của bất phương trình này là $x = 19$.

Vậy với số tiền là 2 triệu đồng thì khách có thể thuê xe trong tối đa là 3 + 19 = 21(ngày) liên tiếp.

C – Bài tập

6.1. Xét hai đại lượng x, y phụ thuộc vào nhau theo các hệ thức dưới đây. Những trường hợp nào thì y là một hàm số của x?

a) $x^2 + y = 4$; b) $4x + 2y = 6$; c) $x + y^2 = 4$; d) $x - y^3 = 0$.

6.2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x - 4}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$;

c) $f(x) = \sqrt{2x - 3}$; d) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{4 - x}}$.

6.3. Cho bảng các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y. Đại lượng y có là hàm số của đại lượng x không? Nếu có, hãy tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số đó.

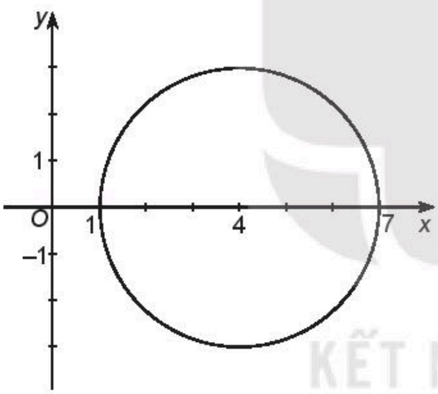
a)

x	–5	–3	–1	0	1	2	5	8	9
y	–6	–8	–4	1	3	2	3	12	15

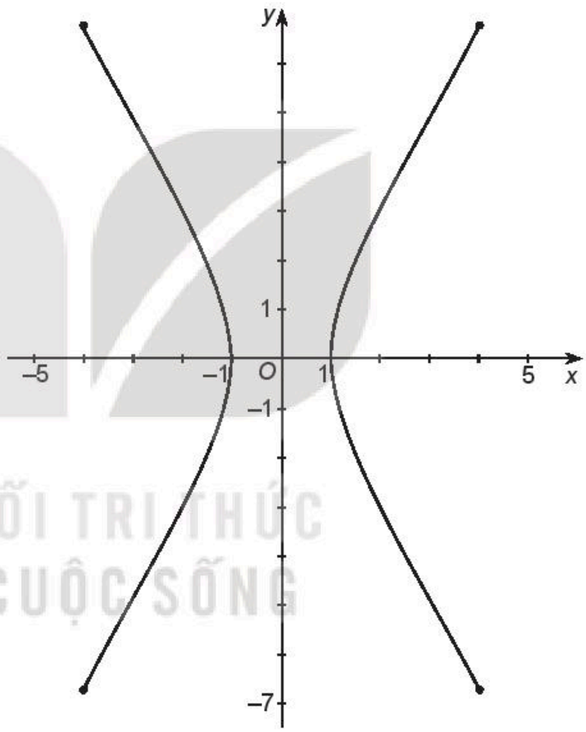
b)

x	–10	–8	–4	2	3	6	7	6	13
y	–16	–14	–2	4	5	20	18	24	25

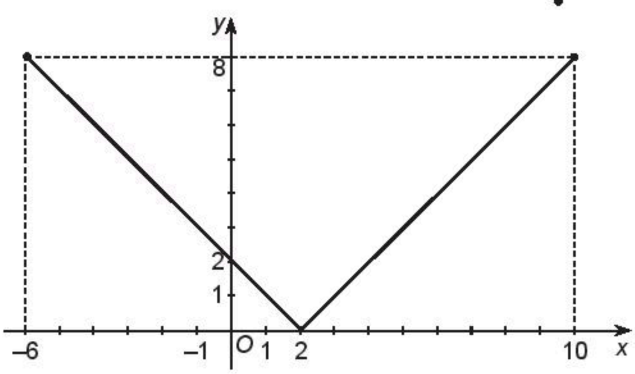
6.4. Trong các hình: Hình 6.6, Hình 6.7, Hình 6.8, hình nào là đồ thị của hàm số? Nếu là đồ thị hàm số thì hãy nêu tập xác định và tập giá trị của hàm số đó.



Hình 6.6

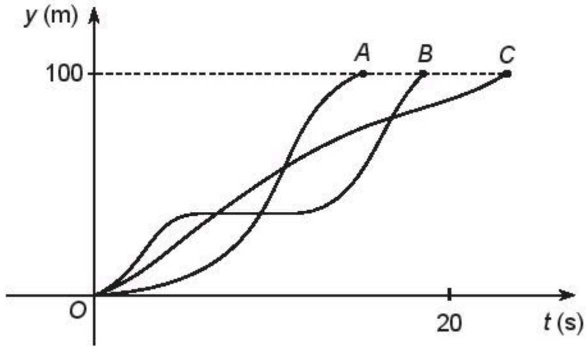


Hình 6.7



Hình 6.8

6.5. Trong một cuộc thi chạy 100 m, có ba học sinh dự thi. Biểu đồ trên Hình 6.9 mô tả quãng đường chạy được y (m) theo thời gian t (s) của mỗi học sinh.



Hình 6.9

a) Đường biểu diễn quãng đường chạy được của mỗi học sinh có là đồ thị hàm số hay không?

b) Học sinh nào về đích đầu tiên? Hãy cho biết ba học sinh đó có chạy hết quãng đường thi theo quy định hay không.

6.6. Vẽ đồ thị của các hàm số sau và chỉ ra tập giá trị, các khoảng đồng biến, nghịch biến của chúng.

a) $y = -\dfrac{1}{2}x + 5$;   b) $y = 3x^2$;   c) $y = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

6.7. Để đổi nhiệt độ từ thang Celsius sang thang Fahrenheit, ta nhân nhiệt độ theo thang Celsius với $\dfrac{9}{5}$ sau đó cộng với 32.

a) Viết công thức tính nhiệt độ F ở thang Fahrenheit theo nhiệt độ C ở thang Celsius. Như vậy ta có F là một hàm số của C.

b) Hoàn thành bảng sau:

C (Celsius)	–10	0	10	20	30	40
F (Fahrenheit)						

c) Vẽ đồ thị của hàm số $F = F(C)$ trên đoạn [–10; 40].

6.8. Giá phòng của một khách sạn là 750 nghìn đồng một ngày cho hai ngày đầu tiên và 500 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo. Tổng số tiền T phải trả là một hàm số của số ngày x mà khách ở tại khách sạn.

a) Viết công thức của hàm số $T = T(x)$.

b) Tính $T(2)$, $T(5)$, $T(7)$ và cho biết ý nghĩa của mỗi giá trị này.

6.9. Bảng sau đây cho biết giá nước sinh hoạt (chưa tính thuế VAT) của hộ dân cư theo mức sử dụng.

STT	Mức sử dụng nước sinh hoạt của hộ dân cư (m^3/tháng/hộ)	Giá nước (VND/m^3)
1	10 m^3 đầu tiên	5 973
2	Từ trên 10 m^3 đến 20 m^3	7 052
3	Từ trên 20 m^3 đến 30 m^3	8 669
4	Trên 30 m^3	15 929

(Theo *hdđt.nshn.com.vn*)

a) Hãy tính số tiền phải trả ứng với mỗi lượng nước sử dụng ở bảng sau:

Lượng nước sử dụng (m^3)	10	20	30	40
Số tiền (VND)				

b) Gọi x là lượng nước đã sử dụng (đơn vị m^3) và y là số tiền phải trả tương ứng (đơn vị VND). Hãy viết công thức mô tả sự phụ thuộc của y vào x.

6.10. Có hai địa điểm A, B cùng nằm trên một tuyến quốc lộ thẳng. Khoảng cách giữa A và B là 20 km. Một xe máy xuất phát từ A lúc 6 giờ và chạy với vận tốc 40 km/h theo chiều từ A đến B. Một ô tô xuất phát từ B lúc 8 giờ và chạy với vận tốc 80 km/h theo cùng chiều với xe máy. Coi chuyển động của xe máy và ô tô là thẳng đều. Chọn A làm mốc, chọn thời điểm 6 giờ làm mốc thời gian và chọn chiều từ A đến B làm chiều dương. Khi đó toạ độ của xe máy và ô tô sẽ là những hàm số của biến thời gian.

a) Viết phương trình chuyển động của xe máy và ô tô (tức là công thức của hàm toạ độ theo thời gian).

b) Vẽ đồ thị hàm toạ độ của xe máy và ô tô trên cùng một hệ trục toạ độ.

c) Căn cứ vào đồ thị vẽ được, hãy xác định vị trí và thời điểm ô tô đuổi kịp xe máy.

d) Kiểm tra lại kết quả tìm được ở câu c) bằng cách giải các phương trình chuyển động của xe máy và ô tô.

BÀI 16

HÀM SỐ BẬC HAI

A – Kiến thức cần nhớ

1. Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x là biến số a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$. Tập xác định của hàm số bậc hai là D = $\mathbb{R}$.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$. Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, quay bề lõm xuống dưới nếu $a < 0$.

3. Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ta làm như sau:

+ Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

+ Xác định trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;

+ Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;

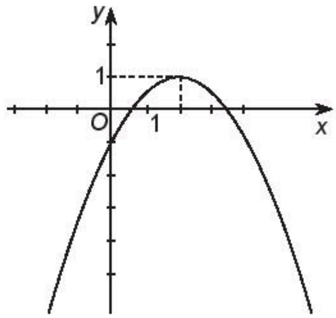
+ Vẽ parabol.

4. Từ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta suy ra các tính chất của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

+ Với $a > 0$: Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$; $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số.

+ Với $a < 0$: Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$; $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị lớn nhất của hàm số.

B – Ví dụ



Hình 6.10

Ví dụ 1. Cho đồ thị của hàm số bậc hai như Hình 6.10.

a) Tìm toạ độ đỉnh của đồ thị.

b) Tìm khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số.

c) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số.

d) Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số.

Giải

a) Toạ độ đỉnh của đồ thị hàm số là $I(2;1)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

c) Hàm số có giá trị lớn nhất là 1, đạt được khi $x = 2$.

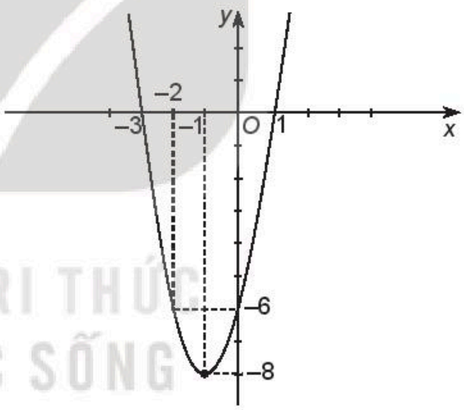
d) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Tập giá trị của hàm số là $(-\infty;1]$.

Ví dụ 2. Vẽ các đường parabol sau:

a) $y = 2x^2 + 4x - 6$;

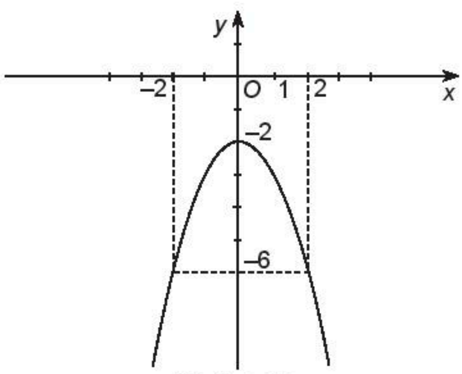
b) $y = -x^2 - 2$.

Giải



Hình 6.11

a) (H.6.11) Ta có $a = 2 > 0$ nên parabol quay bề lõm lên trên. Đỉnh $I(-1;-8)$. Trục đối xứng $x = -1$. Giao điểm với Oy là (0; –6). Điểm đối xứng với điểm (0; –6) qua trục đối xứng $x = -1$ là (–2; –6). Giao điểm với Ox là (–3; 0) và (1; 0).



Hình 6.12

b) (H.6.12) Ta có $a = -1 < 0$ nên parabol quay bề lõm xuống dưới. Đỉnh $I(0;-2)$. Trục đối xứng $x = 0$. Giao điểm với Oy là (0; –2). Đồ thị hàm số không có giao điểm với trục Ox. Lấy điểm (2; –6) thuộc đồ thị hàm số; điểm đối xứng với điểm đó qua trục đối xứng $x = 0$ là (–2; –6).

Ví dụ 3. Tìm parabol $y = ax^2 + bx + 3$, biết rằng parabol đó

a) đi qua hai điểm $A(2;\ 15)$ và $B(-1;\ 0)$;

b) đi qua điểm $P(-3;\ 9)$ và có trục đối xứng $x = -1$;

c) có đỉnh $I(-2;\ 19)$.

Giải

a) Theo giả thiết, hai điểm $A(2;\ 15)$ và $B(-1;\ 0)$ thuộc parabol nên ta có

$$\begin{cases} 4a + 2b + 3 = 15 \\ a - b + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4. \end{cases}$$

Vậy parabol cần tìm là $y = x^2 + 4x + 3$.

b) Parabol nhận $x = -1$ làm trục đối xứng nên $-\dfrac{b}{2a} = -1 \Leftrightarrow b = 2a$.

Điểm $P(-3;\ 9)$ thuộc parabol nên $9a - 3b + 3 = 9 \Leftrightarrow 3a - b = 2$.

Do đó ta có $\begin{cases} b = 2a \\ 3a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4. \end{cases}$

Vậy parabol cần tìm là $y = 2x^2 + 4x + 3$.

c) Parabol có đỉnh là $I(-2;\ 19)$ nên ta có

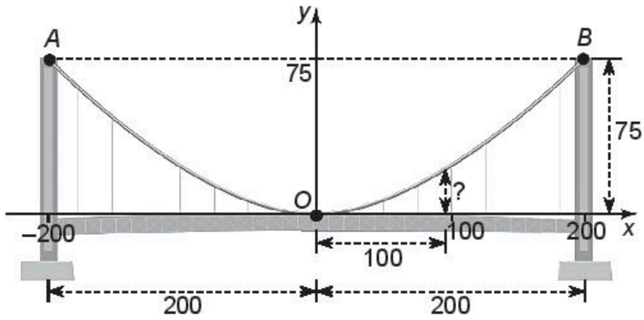
$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ 4a - 2b + 3 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ 2a - b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -16. \end{cases}$$

Vậy parabol cần tìm là $y = -4x^2 - 16x + 3$.

Ví dụ 4. Một cây cầu treo có trọng lượng phân bố đều dọc theo chiều dài của nó. Cây cầu có trụ tháp đôi cao 75 m so với mặt của cây cầu và cách nhau 400 m. Các dây cáp có hình dạng đường parabol và được treo trên các đỉnh tháp. Các dây cáp chạm mặt cầu ở tâm của cây cầu. Tìm chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m (giả sử mặt của cây cầu là bằng phẳng).

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxy như Hình 6.13: Trục Ox dọc theo mặt của cây cầu, trục Oy vuông góc với trục Ox tại tâm của cây cầu. Khi đó các dây cáp có hình dạng đường parabol có bề lõm hướng lên trên và đỉnh của parabol là gốc $O(0;\ 0)$. Vì thế ta giả sử công thức của parabol là $y = ax^2$, $a > 0$.



Hình 6.13

Theo giả thiết, cây cầu có trụ tháp đôi cao 75 m so với mặt của cây cầu và cách nhau 400 m nên ta có các điểm $A(-200; 75)$ và $B(200; 75)$ thuộc parabol. Khi đó ta có:

$75 = a \cdot 200^2 \Rightarrow a = \dfrac{3}{1\,600}$.

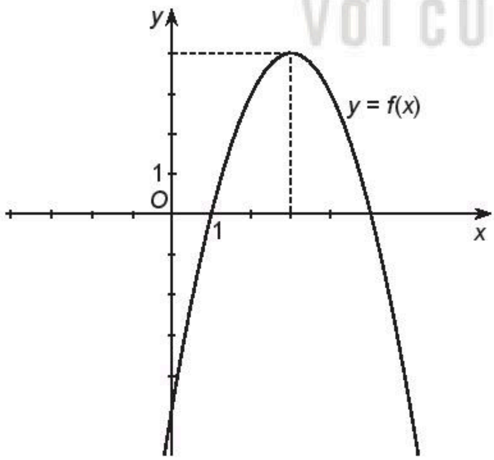
Do đó, phương trình của parabol là: $y = \dfrac{3}{1\,600}x^2$.

Với $x = 100$ ta có $y = \dfrac{3}{1\,600} \cdot 100^2 = 18{,}75$.

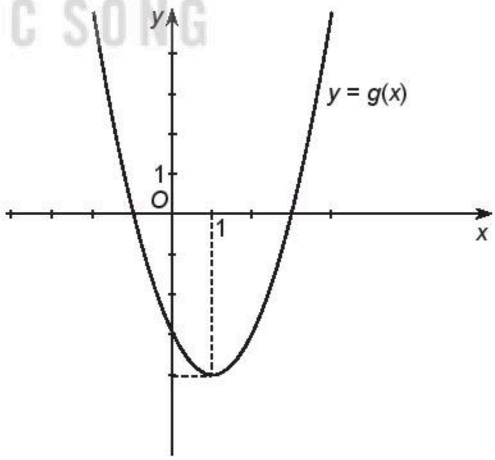
Vậy chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m là 18,75 m.

C – Bài tập

6.11. Cho đồ thị của hai hàm số bậc hai như dưới đây.



Hình 6.14



Hình 6.15

Với mỗi đồ thị, hãy:

a) Tìm toạ độ đỉnh của đồ thị;

b) Tìm khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số;

c) Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số;

d) Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số.

6.12. Với mỗi hàm số bậc hai cho dưới đây:

$y = f(x) = -x^2 - x + 1$; $y = g(x) = x^2 - 8x + 8$;

hãy thực hiện các yêu cầu sau:

a) Viết lại hàm số bậc hai dưới dạng $y = a(x-h)^2 + k$;

b) Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số;

c) Vẽ đồ thị của hàm số.

6.13. Tìm tập xác định và tập giá trị của các hàm số bậc hai sau:

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;

b) $f(x) = x^2 - 7x + 12$.

6.14. Tìm parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

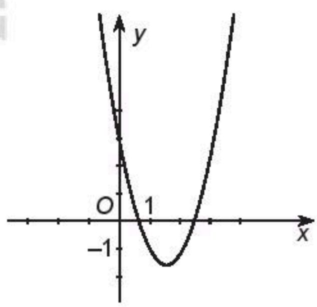
a) đi qua hai điểm $M(1;\, 5)$ và $N(-2;\, 8)$;

b) đi qua điểm $A(3;\, -4)$ và có trục đối xứng $x = -\dfrac{3}{2}$;

c) có đỉnh $I(2;\, -2)$.

6.15. Tìm phương trình của parabol có đỉnh $I(-1;\, 2)$ và đi qua điểm $A(1;\, 6)$.

6.16. Xác định dấu của các hệ số a, b, c và dấu của biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, biết đồ thị của nó có dạng như Hình 6.16.



Hình 6.16

6.17. Bác Hùng dùng 200 m hàng rào dây thép gai để rào miếng đất đủ rộng thành một mảnh vườn hình chữ nhật.

a) Tìm công thức tính diện tích $S(x)$ của mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng x (m) của mảnh vườn đó.

b) Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có thể rào được.

6.18. Một quả bóng được ném lên trên theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu 14,7 m/s. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao của quả bóng so với mặt đất (tính bằng mét) có thể mô tả bởi phương trình

$$h(t) = -4,9t^2 + 14,7t.$$

a) Sau khi ném bao nhiêu giây thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất?

b) Tìm độ cao lớn nhất của quả bóng.

c) Sau khi ném bao nhiêu giây thì quả bóng rơi chạm đất?

6.19. Một hòn đá được ném lên trên theo phương thẳng đứng. Khi bỏ qua sức cản không khí, chuyển động của hòn đá tuân theo phương trình sau:

$$y = -4,9t^2 + mt + n,$$

với m, n là các hằng số. Ở đây $t = 0$ là thời điểm hòn đá được ném lên, $y(t)$ là độ cao của hòn đá tại thời điểm t (giây) sau khi ném và $y = 0$ ứng với bóng chạm đất.

a) Tìm phương trình chuyển động của hòn đá, biết rằng điểm ném cách mặt đất 1,5 m và thời gian để hòn đá đạt độ cao lớn nhất là 1,2 giây sau khi ném.

b) Tìm độ cao của hòn đá sau 2 giây kể từ khi bắt đầu ném.

c) Sau bao lâu kể từ khi ném, hòn đá rơi xuống mặt đất (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

6.20. Một rạp chiếu phim có sức chứa 1 000 người. Với giá vé là 40 000 đồng, trung bình sẽ có khoảng 300 người đến rạp xem phim mỗi ngày. Để tăng số lượng vé bán ra, rạp chiếu phim đã khảo sát thị trường và thấy rằng nếu giá vé cứ giảm 10 000 đồng thì sẽ có thêm 100 người đến rạp mỗi ngày.

a) Tìm công thức của hàm số $R(x)$ mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp chiếu phim khi giá vé là x nghìn đồng.

b) Tìm mức giá vé để doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp là lớn nhất.

BÀI 17

DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A – Kiến thức cần nhớ

1. Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức có dạng $ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những số thực cho trước (với $a \neq 0$) và được gọi là các hệ số của tam thức bậc hai.

2. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.

– Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ *cùng dấu* với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

– Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ *cùng dấu* với hệ số a với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$ và $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 0$.

– Nếu $\Delta > 0$ thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó:

$f(x)$ *cùng dấu* với hệ số a với mọi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$,

$f(x)$ *trái dấu* với hệ số a với mọi $x \in (x_1; x_2)$.

Dấu của $f(x)$ được thể hiện trong bảng dưới đây:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

3. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$. Ta có các kết quả sau:

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$.

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac < 0$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $-2x^2 + 5x - 2 \geq 0$;

b) $\dfrac{1}{x^2 - x + 1} < 1$.

Giải

a) Tam thức bậc hai $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$ có hệ số $a = -2 < 0$ và có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{1}{2}$ và $x_2 = 2$ nên ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{1}{x^2-x+1}-1<0$ hay $\frac{-x^2+x}{x^2-x+1}<0$. Do mẫu thức x^2-x+1 là tam thức bậc hai có $a=1>0$ và $\Delta=-3<0$ nên $x^2-x+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Vậy bất phương trình đã cho tương đương với $-x^2+x<0$. Tam thức $f(x)=-x^2+x$ có $a=-1<0$ và có hai nghiệm $x_1=0$ và $x_2=1$. Lập bảng xét dấu tương tự ý a) ta được tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình

$$x^2-2(m+1)x+3m^2-3=0 \qquad (1)$$

a) có nghiệm;

b) có hai nghiệm trái dấu.

Giải

Biệt thức thu gọn của tam thức $f(x)=x^2-2(m+1)x+3m^2-3$ là

$$\Delta'=-2m^2+2m+4.$$

a) Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'=-2m^2+2m+4\geq 0$, tức là

$$-1\leq m\leq 2.$$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac=3m^2-3<0$, tức là $-1<m<1$.

Ví dụ 3. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$x^2+2(m-2)x+2m-1\geq 0. \qquad (2)$$

Giải

Vì hệ số $a=1>0$, nên bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta'=(m-2)^2-(2m-1)\leq 0$. (3)

Thu gọn bất phương trình (3) ta được $m^2-6m+5\leq 0$, từ đó $1\leq m\leq 5$. Vậy bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $1\leq m\leq 5$.

C – Bài tập

6.21. Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = -x^2 + 6x + 7$;

b) $g(x) = 3x^2 - 2x + 2$;

c) $h(x) = -16x^2 + 24x - 9$;

d) $k(x) = 2x^2 - 6x + 1$.

6.22. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x^2 - 36x + 108 > 0$;

b) $-x^2 + 2x - 2 \geq 0$;

c) $x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0$;

d) $\dfrac{1}{x^2 - x + 1} \leq \dfrac{1}{2x^2 + x + 2}$.

6.23. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình

$$x^2 - 2(m-1)x + 4m^2 - m = 0$$

a) có hai nghiệm phân biệt;

b) có hai nghiệm trái dấu.

6.24. Tìm các giá trị của tham số m để

a) $-x^2 + (m+1)x - 2m + 1 \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $x^2 - (2m+1)x + m + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

6.25. Một công ty đồ gia dụng sản xuất bình đựng nước thấy rằng khi đơn giá của bình đựng nước là x nghìn đồng thì doanh thu R (tính theo đơn vị nghìn đồng) sẽ là $R(x) = -560x^2 + 50\,000x$.

a) Theo mô hình doanh thu này, thì đơn giá nào là quá cao dẫn đến doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 (tức là sẽ không có người mua)?

b) Với khoảng đơn giá nào của bình đựng nước thì doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng?

6.26. Một viên đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu 500 m/s, hợp với phương ngang một góc bằng $45°$. Biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, quỹ đạo chuyển động của một vật ném xiên sẽ tuân theo phương trình:

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha,$$

trong đó x là khoảng cách (tính bằng mét) vật bay được theo phương ngang, vận tốc ban đầu v_0 của vật hợp với phương ngang một góc α và $g = 9{,}8$ m/s^2 là gia tốc trọng trường.

a) Viết phương trình chuyển động của viên đạn.

b) Để viên đạn bay qua một ngọn núi cao 4 000 mét thì khẩu pháo phải đặt cách chân núi một khoảng cách bao xa?

6.27. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$b^2x^2-(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

BÀI 18

PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A – Kiến thức cần nhớ

1. Để giải phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$, bình phương hai vế sau đó thu gọn ta được phương trình

$$(a-d)x^2+(b-e)x+(c-f)=0. \qquad (1)$$

Giải phương trình (1) được các nghiệm, sau đó thay vào phương trình ban đầu để thử lại xem nghiệm nào thoả mãn và kết luận.

Chú ý rằng nếu x_0 là một nghiệm của phương trình (1) thì khi thử lại ta chỉ cần kiểm tra xem, nếu $ax_0^2+bx_0+c\geq 0$ thì x_0 sẽ là nghiệm của phương trình đã cho.

2. Để giải phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$, bình phương hai vế sau đó thu gọn ta được phương trình

$$\left(a-d^2\right)x^2+(b-2de)x+\left(c-e^2\right)=0. \qquad (2)$$

Giải phương trình (2) được các nghiệm, sau đó thay vào phương trình ban đầu để thử lại xem nghiệm nào thoả mãn và kết luận.

Chú ý rằng nếu x_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì khi thử lại ta chỉ cần kiểm tra xem, nếu $dx_0+e\geq 0$ thì x_0 sẽ là nghiệm của phương trình đã cho.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2+7x+1}=\sqrt{3x^2+4x-9}$; (3)

b) $\sqrt{5x^2-5x}=2x-1$. (4)

Giải

a) Bình phương hai vế của (3) và thu gọn ta được $x^2-3x-10=0$. Từ đó $x=-2$ và $x=5$.

– Thay $x=-2$ vào phương trình đã cho:

$\sqrt{2(-2)^2+7(-2)+1}=\sqrt{3(-2)^2+4(-2)-9}$ hay $\sqrt{-5}=\sqrt{-5}$, vô lí.

– Thay $x=5$ vào phương trình đã cho: $\sqrt{2\cdot 5^2+7\cdot 5+1}=\sqrt{3\cdot 5^2+4\cdot 5-9}$ hay $\sqrt{86}=\sqrt{86}$, thoả mãn.

Vậy phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x=5$.

b) Bình phương hai vế của (4) và thu gọn ta được $x^2-x-1=0$. Từ đó

$$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ và } x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

– Thay $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ vào vế phải của phương trình (4) ta được:

$$2\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1=-\sqrt{5}<0.$$

– Thay $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vào vế phải của phương trình (4) ta được:

$$2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\sqrt{5}>0.$$

Vậy phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+mx+m+1}. \qquad (5)$$

Giải

Bình phương hai vế của phương trình (5) và thu gọn ta được

$x^2+(m-1)x+m=0$. (*)

Nhận thấy rằng tam thức bậc hai x^2+x+1 có $a=1>0$ và $\Delta=-3<0$. Suy ra $x^2+x+1>0$ với mọi x. Như vậy nếu phương trình (*) có nghiệm x_0 thì khi thử lại ta thấy $x_0^2+x_0+1>0$, tức là x_0 thoả mãn phương trình (5).

Vậy phương trình (5) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm. Điều này tương đương với $\Delta = (m-1)^2 - 4m \geq 0$ hay $m^2 - 6m + 1 \geq 0$. Từ đó ta được $m \leq 3 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

C – Bài tập

6.28. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{-x^2 + 77x - 212} = \sqrt{x^2 + x - 2}$; b) $\sqrt{x^2 + 25x - 26} = \sqrt{x - x^2}$;

c) $\sqrt{4x^2 + 8x - 37} = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$.

6.29. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2 - 13x + 16} = 6 - x$; b) $\sqrt{3x^2 - 33x + 55} = x - 5$;

c) $\sqrt{-x^2 + 3x + 1} = x - 4$.

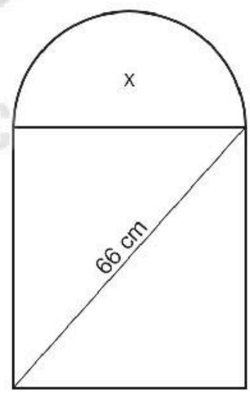
6.30. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x - 3} = x - 3$; b) $(x-3)\sqrt{x^2 + 4} = x^2 - 9$.

6.31. Tìm điều kiện của tham số *m* để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 + mx + m - 1}.$$

6.32. Mặt cắt đứng của cột cây số trên quốc lộ có dạng nửa hình tròn ở phía trên và phía dưới có dạng hình chữ nhật (xem hình bên). Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và đường chéo của hình chữ nhật có độ dài 66 cm. Tìm kích thước của hình chữ nhật, biết rằng diện tích của phần nửa hình tròn bằng 0,3 lần diện tích của phần hình chữ nhật. Lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai.



Mặt cắt của cột cây số

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A – Trắc nghiệm

6.33. Thu nhập bình quân theo đầu người (GDP) của Việt Nam (tính theo USD) trong vòng 10 năm, từ năm 2009 đến năm 2018 được cho bởi bảng sau (dựa theo số liệu của Tổng cục Thống kê):

Năm	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
GDP	1 055	1 273	1 517	1 749	1 908	2 052	2 109	2 215	2 385	2 587

Bảng này xác định một hàm số chỉ sự phụ thuộc của GDP (kí hiệu là y) vào thời gian x (tính bằng năm). Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Giá trị của hàm số tại $x = 2\,018$ là 2 587.

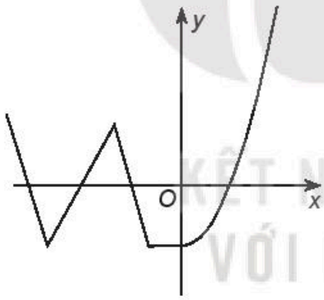
B. Tập xác định của hàm số có 10 phần tử.

C. Tập giá trị của hàm số có 10 phần tử.

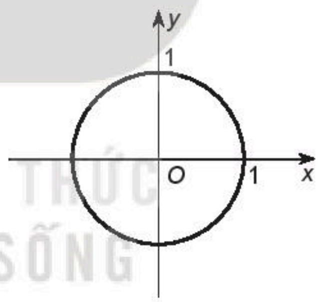
D. Giá trị của hàm số tại $x = 2\,587$ là 2 018.

6.34. Các đường dưới đây, đường nào **không** là đồ thị của hàm số?

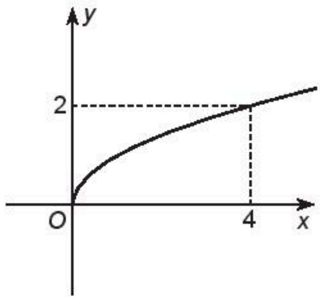
A.



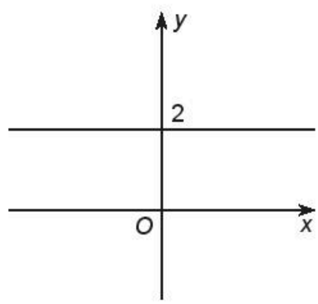
B.



C.



D.



6.35. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $[0;+\infty)$. D. $(0;+\infty)$.

6.36. Hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ có

A. Tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.

B. Tập xác định và tập giá trị cùng là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

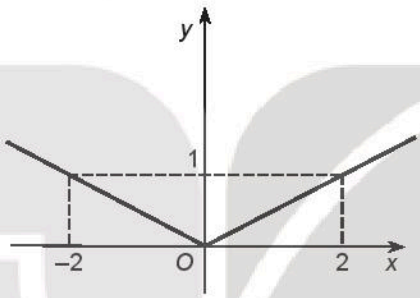
C. Tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

D. Tập xác định và tập giá trị cùng là $\mathbb{R}$.

6.37. Với những giá trị nào của m thì hàm số $f(x)=(m+1)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m>-1$. B. $m=1$. C. $m<0$. D. $m=0$.

6.38. Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?



A. $y=\left|\dfrac{1}{2}x\right|$. B. $y=|3-x|$. C. $y=|x|$. D. $y=|2x|$.

6.39. Trục đối xứng của parabol $(P): y=2x^2+6x+3$ là

A. $y=-3$. B. $y=-\dfrac{3}{2}$. C. $x=-3$. D. $x=-\dfrac{3}{2}$.

6.40. Parabol $y=-4x-2x^2$ có đỉnh là

A. $I(-1;\ 1)$. B. $I(-1;\ 2)$. C. $I(1;\ 1)$. D. $I(2;\ 0)$.

6.41. Cho hàm số $y=x^2-2x+3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

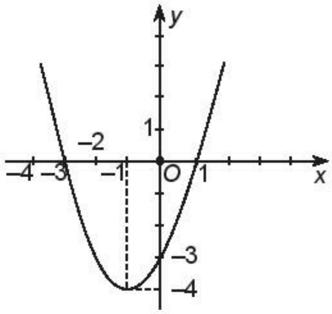
A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.

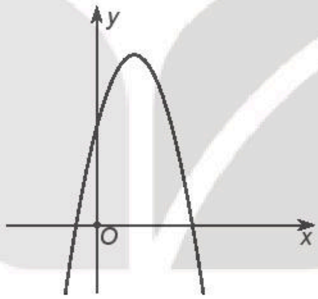
D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

6.42. Đường parabol trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = x^2 + 2x - 3$.
B. $y = -x^2 - 2x + 3$.
C. $y = -x^2 + 2x - 3$.
D. $y = x^2 - 2x - 3$.

6.43. Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là đường parabol dưới đây. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a < 0, b < 0, c < 0$.
B. $a < 0, b < 0, c > 0$.
C. $a < 0, b > 0, c < 0$.
D. $a < 0, b > 0, c > 0$.

6.44. Điều kiện cần và đủ của tham số m để parabol (P): $y = x^2 - 2x + m - 1$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung là

A. $m < 1$.
B. $m < 2$.
C. $m > 2$.
D. $m > 1$.

6.45. Bảng xét dấu dưới đây là của tam thức bậc hai nào?

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

A. $f(x) = -x^2 + x + 6$.
B. $f(x) = x^2 - x - 6$.
C. $f(x) = -x^2 + 5x - 6$.
D. $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

6.46. Bảng xét dấu nào sau đây là bảng xét dấu của tam thức $f(x) = x^2 + 12x + 36$?

A.

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

B.

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

C.

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

D.

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

6.47. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-4x+3<0$ là

A. $(1;3)$.
B. $(-\infty;1)\cup[3;+\infty)$.
C. $[1;3]$.
D. $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

6.48. Các giá trị của tham số m làm cho biểu thức $f(x)=x^2+4x+m-5$ luôn dương là

A. $m\geq 9$.
B. $m>9$.
C. Không có m.
D. $m<9$.

6.49. Phương trình $(m+2)x^2-3x+2m-3=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m<-2$ hoặc $m>\frac{3}{2}$.
B. $m>\frac{3}{2}$.
C. $-2<m<\frac{3}{2}$.
D. $m<2$.

6.50. Bất phương trình $mx^2-(2m-1)x+m+1<0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m\leq\frac{1}{8}$.
B. $m>\frac{1}{8}$.
C. $m<\frac{1}{8}$.
D. $m\geq\frac{1}{8}$.

6.51. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+4x-2}=x-3$ là

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

6.52. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2-9x-9}=3-x$ là

A. $S=\{6\}$.
B. $S=\varnothing$.
C. $S=\{-3\}$.
D. $S=\{-3;6\}$.

6.53. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2-5x+1}=\sqrt{x^2+2x-9}$ là

A. $S=\{2\}$.
B. $S=\{5\}$.
C. $S=\varnothing$.
D. $S=\{2;5\}$.

B – Tự luận

6.54. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$;

b) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

6.55. Cho hàm số $y=\begin{cases} 2x+3 & \text{khi } -2\le x<-1 \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} & \text{khi } -1\le x<1 \\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2} & \text{khi } 1\le x\le 3. \end{cases}$

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Vẽ đồ thị hàm số.

c) Từ đồ thị vẽ ở ý b) hãy chỉ ra các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

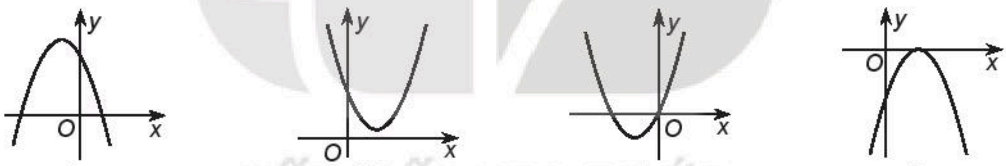
d) Tìm tập giá trị của hàm số.

6.56. Với mỗi hàm số dưới đây, hãy vẽ đồ thị, tìm tập xác định, tập giá trị, khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của chúng.

a) $y=|x-1|+|x+1|$;

b) $y=\begin{cases} x+1 & \text{khi } x<-1 \\ x^2-1 & \text{khi } x\ge -1. \end{cases}$

6.57. Dựa vào đồ thị của hàm số $y=ax^2+bx+c$, hãy xác định dấu của các hệ số a, b, c trong mỗi trường hợp dưới đây.



a) b) c) d)

6.58. Trong mỗi trường hợp dưới đây, hãy vẽ đồ thị của các hàm số trên cùng một mặt phẳng toạ độ rồi xác định toạ độ giao điểm của chúng:

a) $y=-x+3$ và $y=-x^2-4x+1$.

b) $y=2x-5$ và $y=x^2-4x-1$.

6.59. Vẽ đồ thị mỗi hàm số sau, từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình tương ứng

a) $y=x^2-3x+2$ và bất phương trình: $x^2-3x+2\ge 0$;

b) $y=x^2-x-6$ và bất phương trình: $x^2-x-6<0$.

6.60. Tìm các giá trị của tham số m để:

a) Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{mx^2-2mx+5}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$;

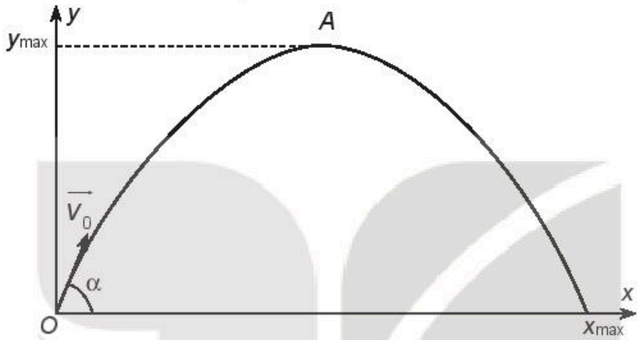
b) Tam thức bậc hai $y=-x^2+mx-1$ có dấu không phụ thuộc vào x;

c) Hàm số $y=\sqrt{-2x^2+mx-m-6}$ có tập xác định chỉ gồm một phần tử.

6.61. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6$ cm, $AD = 13$ cm. Tìm vị trí điểm M trên cạnh AD sao cho $BM = 2MD$.

6.62. Trong Vật lí ta biết rằng, khi một vật được ném xiên với vận tốc ban đầu v_0, góc ném hợp với phương ngang Ox một góc α, nếu ta bỏ qua sức cản của không khí và gió, vật chỉ chịu tác động của trọng lực với gia tốc trọng trường $g \approx 9{,}8$ m/s^2, thì độ cao y (so với mặt đất) của vật phụ thuộc vào khoảng cách theo phương ngang x (tính đến mặt đất tại điểm ném) theo một hàm số bậc hai cho bởi công thức

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$



Như vậy quỹ đạo chuyển động của vật là một phần của đường parabol. Hãy xác định

a) Các hệ số a, b và c của hàm số bậc hai này;

b) Độ cao lớn nhất mà vật có thể đạt được;

c) Giả sử vận tốc ban đầu v_0 không đổi. Từ kết quả câu b) hãy xác định góc ném α để độ cao lớn nhất của vật đạt giá trị lớn nhất.

d) Một quả bóng được đá từ mặt đất lên cao với vận tốc ban đầu $v_0 = 20$ m/s và góc đá so với phương ngang là $\alpha = 45°$. Khi quả bóng ở độ cao trên 5 m thì khoảng cách theo phương ngang từ vị trí của quả bóng đến vị trí đá bóng nằm trong khoảng nào (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

6.63. Một công ty kinh doanh máy tính cầm tay thấy rằng khi bán máy ở mức giá x (nghìn đồng) một chiếc thì số lượng máy bán được n cho bởi phương trình $n = 1\,200\,000 - 1\,200x$.

a) Tìm công thức biểu diễn doanh thu R như là hàm số của đơn giá x. Tìm miền xác định của hàm số $R = R(x)$.

b) Máy tính được bán ở đơn giá nào sẽ cho doanh thu lớn nhất? Tính doanh thu lớn nhất và số máy tính bán được trong trường hợp đó.

c) Với đơn giá nào thì công ty sẽ đạt được doanh thu trên 200 tỉ đồng (làm tròn đến nghìn đồng)?

CHƯƠNG VII

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

BÀI 19

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A – Kiến thức cần nhớ

- Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của đường thẳng Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ.
- Trong mặt phẳng toạ độ, mọi đường thẳng đều có *phương trình tổng quát* dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0.
- Phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và nhận vectơ $\vec{n}(a;b)$ là vectơ pháp tuyến có dạng $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ hay $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$.
- Mỗi phương trình dạng $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) đều là phương trình tổng quát của một đường thẳng, nhận $\vec{n}(a;b)$ là vectơ pháp tuyến.
- Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ được gọi là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.
- Nếu $\vec{n}(a;b)$ là một vectơ pháp tuyến của Δ thì $\vec{u}(-b;a)$ và $\vec{v}(b;-a)$ là các vectơ chỉ phương của Δ.
- Nếu $\vec{u}(a;b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $\vec{n_1}(-b;a)$ và $\vec{n_2}(b;-a)$ là các vectơ pháp tuyến của Δ.
- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u}(a;b)$ là vectơ chỉ phương. Khi đó phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \end{cases}$

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(-1;2)$ và hai vectơ $\vec{n}(3;-2)$, $\vec{u}(2;1)$.

a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua M nhận vectơ $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến.

b) Lập phương trình tham số của đường thẳng đi qua M nhận vectơ $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương.

c) Lập phương trình đường thẳng đi qua M có hệ số góc bằng 3.

Giải

a) Áp dụng công thức ta có phương trình tổng quát của đường thẳng cần tìm là

$$3(x+1)-2(y-2)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+7=0.$$

b) Áp dụng công thức ta có phương trình tham số của đường thẳng cần tìm là

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t. \end{cases}$$

c) Phương trình đường thẳng đi qua M có hệ số góc bằng 3 là $y=3(x+1)+2$ hay $y=3x+5$.

Lưu ý

- Phương trình tham số của một đường thẳng có thể có hình thức khác nhau do cách chọn điểm đi qua và vectơ chỉ phương.
- Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0;y_0)$, có hệ số góc k là:

$$d: y=k(x-x_0)+y_0.$$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-1;0)$, $B(1;2)$ và $C(3;3)$.

a) Lập phương trình tham số của đường thẳng AB.

b) Lập phương trình đường trung trực của đoạn AB.

c) Tìm điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho $CD=5$.

Giải

a) Đường thẳng AB nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(2;2)$ là một vectơ chỉ phương. Khi đó đường thẳng AB đi qua điểm A và nhận $\vec{u}(1;1)$ là một vectơ chỉ phương nên đường thẳng AB có phương trình tham số là $\begin{cases} x=-1+t \\ y=t. \end{cases}$

b) Trung điểm của đoạn thẳng AB là $M=\left(\dfrac{-1+1}{2};\dfrac{0+2}{2}\right)=(0;1)$. Đường trung trực Δ của AB vuông góc với AB nên nó nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(2;2)$ là một vectơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $M(0;1)$ của đoạn thẳng AB. Do đó phương trình đường thẳng Δ là

$$2(x-0)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y-1=0.$$

c) Do điểm D thuộc đường thẳng AB nên toạ độ của D có dạng $D(-1+t;t)$. Khi đó ta có

$$CD=\sqrt{(t-4)^2+(t-3)^2}=5 \Leftrightarrow (t-4)^2+(t-3)^2=25 \Leftrightarrow 2t^2-14t=0.$$

Giải phương trình ta có $t_1=0, t_2=7$. Vậy có hai điểm D thoả mãn là $D_1(-1;0)$, $D_2(6;7)$.

Lưu ý

Để tìm toạ độ của một điểm trên một đường thẳng, ta lập phương trình đường thẳng đó dưới dạng tham số và gọi toạ độ của điểm cần tìm theo một tham số. Khi đó, ta chỉ cần một điều kiện để tìm ra tham số, và từ đó suy ra điểm cần tìm.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác MNP có $M(2;1)$, $N(-3;0)$ và $P(1;4)$.

a) Lập phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ M của tam giác MNP.

b) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng MN.

c) Lập phương trình tổng quát của đường trung tuyến kẻ từ M của tam giác MNP.

Giải

a) Đường cao kẻ từ M của tam giác MNP là đường thẳng đi qua M và vuông góc với NP nên nhận vectơ $\overrightarrow{NP}$ là một vectơ pháp tuyến. Ta có $\overrightarrow{NP}=(4;4)$ và $M(2;1)$, vậy phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ M là

$$4(x-2)+4(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0.$$

b) Đường thẳng MN nhận vectơ $\overrightarrow{MN}(-5;-1)$ là một vectơ chỉ phương nên nhận vectơ $\vec{n}(1;-5)$ là một vectơ pháp tuyến. Phương trình tổng quát của đường thẳng MN đi qua điểm $M(2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-5)$ là

$$1(x-2)-5(y-1)=0 \Leftrightarrow x-5y+3=0.$$

c) Đường trung tuyến Δ kẻ từ M của tam giác MNP đi qua $M(2;1)$ và trung điểm của NP là $I(-1;2)$, do đó Δ nhận $\overrightarrow{MI}(-3;1)$ là một vectơ chỉ phương. Khi đó Δ nhận vectơ $\vec{n}(1;3)$ là một vectơ pháp tuyến. Phương trình tổng quát của đường trung tuyến đó là

$$1(x-2)+3(y-1)=0 \Leftrightarrow x+3y-5=0.$$

Lưu ý

- Để giải quyết được các bài toán về tam giác hay mở rộng hơn là đa giác trong mặt phẳng toạ độ, ta cần ghi nhớ các mối liên hệ giữa các yếu tố quen thuộc trong tam giác. Chẳng hạn:

  – Đường cao có yếu tố vuông góc.

  – Đường trung tuyến có yếu tố trung điểm, trọng tâm.

  – Đường trung bình có yếu tố song song và trung điểm.

  – Đường trung trực có yếu tố vuông góc và trung điểm.

- Khi viết phương trình đường thẳng, ta có thể viết phương trình đường thẳng dạng tổng quát hoặc tham số. Tuy nhiên khi đề bài hỏi cụ thể loại phương trình nào thì ta cần phải viết đúng loại phương trình đó.

C – Bài tập

7.1. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho điểm $D(0;2)$ và hai vectơ $\vec{n} = (1;-3)$, $\vec{u} = (1;3)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua D và nhận $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua D và nhận $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương.

7.2. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(0;-1)$ và $C(-2;3)$. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC.

7.3. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(2;3)$. Tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB và viết phương trình tham số của đường thẳng AB.

7.4. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho đường thẳng $\Delta: 2x - y + 5 = 0$. Tìm tất cả các vectơ pháp tuyến có độ dài $2\sqrt{5}$ của đường thẳng Δ.

7.5. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $y = -2x + 3$. Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d.

7.6. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho điểm $M(2;1)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t. \end{cases}$

Tìm điểm N thuộc đường thẳng Δ sao cho $MN = \sqrt{2}$.

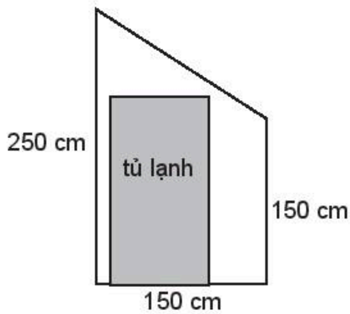
7.7. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho tam giác ABC có toạ độ ba đỉnh $A(0;-1)$, $B(2;3)$ và $C(-4;1)$. Lập phương trình tham số của đường trung bình ứng với cạnh BC của tam giác ABC.

7.8. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hình vuông *ABCD* có $A(-1;0)$ và $B(1;2)$.

a) Lập phương trình đường thẳng *BC*.

b) Tìm toạ độ của điểm *C* biết rằng hoành độ của điểm *C* là số dương.

7.9. Nhà bạn Nam định đổi tủ lạnh và dự định kê vào vị trí dưới cầu thang. Biết vị trí định kê tủ lạnh có mặt cắt là một hình thang vuông với hai đáy lần lượt là 150 cm và 250 cm, chiều cao là 150 cm (như hình vẽ). Bố mẹ bạn Nam định mua một tủ lạnh 2 cánh (Side by side) có chiều cao là 183 cm và bề ngang 90 cm. Bằng cách sử dụng toạ độ trong mặt phẳng, em hãy giúp Nam tính xem bố mẹ bạn Nam có thể kê vừa chiếc tủ lạnh vào vị trí cần kê không ?



BÀI 20

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

A – Kiến thức cần nhớ

1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trên mặt phẳng toạ độ, xét hai đường thẳng với phương trình tổng quát

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } \Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Toạ độ điểm chung của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Khi đó:

- Δ_1 cắt Δ_2 $\Leftrightarrow$ hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0;$

- Δ_1 song song với $\Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ và $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ hoặc $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ khác 0;

- Δ_1 trùng $\Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (I) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$

  Trong trường hợp a_2, b_2, c_2 đều khác 0 thì ta có:

- Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$;

- Δ_1 song song với $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;

- Δ_1 trùng $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

  Xét hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ và hai vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$. Lấy một điểm *M* thuộc Δ_1. Khi đó ta cũng có kết quả sau:

- Δ_1 và Δ_2 trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ (hoặc $\overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$) và *M* thuộc Δ_2.

- Δ_1 *và* Δ_2 song song khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ (hoặc $\overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$) và *M* không thuộc Δ_2.

- Δ_1 *và* Δ_2 cắt nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ (hay khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$).

2. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng cắt nhau

$$\Delta_1:\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } \Delta_2:\ a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Khi đó, $\overrightarrow{n_1}(a_1; b_1)$, $\overrightarrow{n_2}(a_2; b_2)$ tương ứng là các vectơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2 và góc φ giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 được xác định thông qua công thức

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

3. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$. Khoảng cách từ điểm *M* đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M, \Delta)$, được tính bởi công thức

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) *d*: $x + y + 1 = 0$ và *k*: $2x + y - 3 = 0$;

b) *d*: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$ và *k*: $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2t' \end{cases}$;

c) *d*: $\begin{cases} x = 6t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và *k*: $x - 3y + 5 = 0$.

Giải

a) Do $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{1}$ nên hai đường thẳng *d* và *k* cắt nhau.

b) Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{u_d} = (-1; -2)$, $\overrightarrow{u_k} = (1; 2)$. Khi đó $\overrightarrow{u_d} = -\overrightarrow{u_k}$, do đó hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng cùng phương. Mặt khác, từ phương trình tham số của *d* ta nhận thấy *d* đi qua điểm *M*(3; 4). Thay toạ độ điểm *M* vào phương trình đường thẳng *k* ta có

$$\begin{cases} 3 = 1 + t' \\ 4 = 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2 \\ t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t' = 2.$$

Vậy *k* cũng đi qua *M*. Từ đó suy ra hai đường thẳng trùng nhau.

c) Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{u_d} = (6; 2)$, $\overrightarrow{n_k} = (1; -3)$. Khi đó vectơ pháp tuyến của đường thẳng *d* là $\overrightarrow{n_d} = (-2; 6)$, do đó $\overrightarrow{n_d} = -2\overrightarrow{n_k}$. Vậy hai vectơ pháp tuyến của hai đường thẳng cùng phương. Mặt khác, từ phương trình tham số của *d* ta nhận thấy *d* đi qua điểm *N*(0; 2). Thay toạ độ điểm *N* vào phương trình đường thẳng *k* ta có $0 - 3 \cdot 2 + 5 \neq 0$. Do đó *N* không thuộc đường thẳng *k*. Vậy hai đường thẳng song song với nhau.

Lưu ý

- Khi xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, ta có thể chuyển về tìm số điểm chung của hai đường thẳng.
- Một trong những sự lúng túng của nhiều em khi làm dạng bài này là ta cố gắng chuyển tất cả các phương trình của các đường thẳng về dạng tổng quát.
- Khi hai đường thẳng có các vectơ pháp tuyến (các vectơ chỉ phương tương ứng) cùng phương, nhiều em hay nhầm lẫn khi kết luận ngay rằng hai đường thẳng song song mà không kiểm tra xem hai đường thẳng đó có trùng nhau hay không. Trong tình huống này, để biết chính xác vị trí giữa hai đường thẳng ta cần xét thêm điểm chung của hai đường thẳng.

Ví dụ 2. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau.

a) d: $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ và k: $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$.

b) a: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ và b: $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 5 + 3t'. \end{cases}$

c) p: $\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và q: $5x - 4y + 3 = 0$.

Giải

a) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d và k. Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{n_d} = \left(\sqrt{3}; -1\right)$, $\overrightarrow{n_k} = \left(1; -\sqrt{3}\right)$. Do đó theo công thức tính góc của hai đường thẳng ta có

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{n_k}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_d} \cdot \overrightarrow{n_k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_d}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_k}\right|} = \frac{\left|2\sqrt{3}\right|}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng là $\varphi = 30^\circ$.

b) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng a và b. Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{u_a} = (1; -2)$, $\overrightarrow{u_b} = (1; 3)$. Do đó theo công thức tính góc của hai đường thẳng ta có

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_a}, \overrightarrow{u_b}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u_a} \cdot \overrightarrow{u_b}\right|}{\left|\overrightarrow{u_a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u_b}\right|} = \frac{|-5|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng a và b là $\alpha = 45^\circ$.

c) Gọi β là góc giữa hai đường thẳng *p* và *q*. Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{u_p} = (-5;4) \Rightarrow \overrightarrow{n_p} = (4;5)$. Mặt khác $\overrightarrow{n_q} = (5;-4)$. Do đó theo công thức tính góc của hai đường thẳng thì

$$\cos\beta = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{n_q}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_p} \cdot \overrightarrow{n_q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_p}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_q}\right|} = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng *p* và *q* là $\beta = 90^\circ$.

Lưu ý

- Khi tính góc giữa hai đường thẳng chúng ta cần phải dựa vào công thức góc giữa hai vectơ chỉ phương hoặc hai vectơ pháp tuyến của hai đường thẳng đó. Nhiều em hay mắc sai lầm khi dùng công thức tính góc giữa hai đường thẳng bằng vectơ chỉ phương của đường thẳng này và vectơ pháp tuyến của đường thẳng kia.
- Nhiều em thường mắc lỗi khi tính góc giữa hai đường thẳng bằng cách đưa về góc giữa hai vectơ pháp tuyến (hoặc hai vectơ chỉ phương). Khi góc giữa hai vectơ là góc tù thì góc giữa hai đường thẳng sẽ bù với góc giữa hai vectơ.
- Gọi góc giữa hai đường thẳng là α. Khi đề bài cần tính $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ thì các em phải dùng công thức tính $\cos\alpha$ rồi áp dụng các tính chất giá trị lượng giác của một góc để tính $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

Ví dụ 3. Cho đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$ và hai điểm $A(-1;2)$, $B(4;0)$.

a) Tính khoảng cách từ *A* đến đường thẳng *d*.

b) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của *A* lên đường thẳng *d*.

c) Tìm điểm *C* trên trục *Oy* sao cho trọng tâm của tam giác *ABC* thuộc đường thẳng *d*. Khi đó tính diện tích tam giác *ABC*.

Giải

a) Khoảng cách từ điểm *A* đến đường thẳng *d* là $\dfrac{|2\cdot(-1) - 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

b) Gọi Δ là đường thẳng đi qua *A* và vuông góc với đường thẳng *d*. Khi đó Δ nhận vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (1;2)$ của đường thẳng *d* là một vectơ pháp tuyến nên phương trình của Δ là $1(x+1) + 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$. Hình chiếu vuông góc *H* của điểm *A* trên đường thẳng *d* là giao điểm của đường thẳng *d* và Δ. Do đó toạ độ của điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$. Giải hệ phương trình ta được $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{7}{5}$. Vậy $H\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

c) Điểm C thuộc trục Oy nên toạ độ của C có dạng $C(0; c)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ là $G = \left(\frac{-1+4+0}{3}; \frac{2+0+c}{3}\right) = \left(1; \frac{2+c}{3}\right)$. Do G thuộc đường thẳng d nên ta có $2 \cdot 1 - \left(\frac{2+c}{3}\right) + 1 = 0 \Rightarrow c = 7$. Vậy $C(0; 7)$.

Đường thẳng AB nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (5; -2)$ là một vectơ chỉ phương nên AB nhận vectơ $\vec{n}(2; 5)$ là một vectơ pháp tuyến. Phương trình của AB là $2x + 5y - 8 = 0$. Khi đó diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(C, AB) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{|2 \cdot 0 + 5 \cdot 7 - 8|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} \cdot \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \frac{27}{2}.$$

Lưu ý

- Khi tìm hình chiếu vuông góc H của A lên đường thẳng d ta có thể viết phương trình tham số của d và biểu diễn toạ độ của H tính theo một tham số. Sau đó dùng điều kiện $AH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$ để tính ra tham số. Từ đó các em tìm được toạ độ của điểm H.
- Diện tích tam giác ABC có thể tính theo công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$.

  Từ đó áp dụng các công thức tính diện tích tam giác để suy ra góc, độ dài các đường cao, bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C – Bài tập

7.10. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) m: $x + y - 2 = 0$ và k: $2x + 2y - 4 = 0$.

b) a: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 \end{cases}$ và b: $\begin{cases} x = 3t' \\ y = 1 + t' \end{cases}$.

c) $d_1: x - 2y - 1 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$.

7.11. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $d: y-1=0$ và $k: x-y+4=0$;

b) $a: \begin{cases} x=3+t \\ y=2t \end{cases}$ và $b: 3x+y+1=0$;

c) $m: \begin{cases} x=1-t \\ y=2-\sqrt{3}t \end{cases}$ và $n: \begin{cases} x=4-t' \\ y=\sqrt{3}t' \end{cases}$.

7.12. Cho hai đường thẳng d: $2x+y+1=0$ và k: $2x+5y-3=0$.

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng cắt nhau. Tìm giao điểm của hai đường thẳng đó.

b) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng.

7.13. Trong mặt phẳng Oxy, tìm điểm M thuộc trục Ox sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: 3x+y-3=0$ bằng $\sqrt{10}$.

7.14. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 2x+y-5=0$.

a) Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(3;1)$ và song song với đường thẳng Δ.

b) Viết phương trình đường thẳng k đi qua điểm $B(-1;0)$ và vuông góc với đường thẳng Δ.

c) Lập phương trình đường thẳng a song song với đường thẳng Δ và cách điểm O một khoảng bằng $\sqrt{5}$.

7.15. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1), B(2;-2)$ và $C(0;-1)$.

a) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

b) Tính diện tích tam giác ABC.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

7.16. Cho đường thẳng $d: x-2y+1=0$ và điểm $A(-2;2)$.

a) Chứng minh A không thuộc đường thẳng d.

b) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d.

c) Xác định điểm đối xứng của A qua đường thẳng d.

7.17. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-3;0), B(1;-2)$ và đường thẳng $d: x+y-1=0$.

a) Chứng minh rằng hai điểm A và B nằm cùng phía so với đường thẳng d.

b) Điểm M thay đổi trên đường thẳng d. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABM.

7.18. Trong một hoạt động ngoại khoá của trường, lớp Việt định mở một gian hàng bán bánh mì và nước khoáng. Biết rằng giá gốc một bánh mì là 15 000 đồng, một chai nước là 5 000 đồng. Các bạn dự kiến bán bánh mì với giá 20 000 đồng/1 bánh mì và nước giá 8 000 đồng/1 chai. Dựa vào thống kê số người tham gia hoạt động và nhu cầu thực tế các bạn dự kiến tổng số bánh mì và số chai nước không vượt qua 200. Theo quỹ lớp thì số tiền lớp Việt được dùng không quá 2 000 000 đồng. Hỏi lớp Việt có thể đạt được tối đa lợi nhuận là bao nhiêu?

BÀI 21

ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

A – Kiến thức cần nhớ

- Phương trình của đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$, bán kính R là

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

- Với các hằng số a, b, c thoả mãn $a^2+b^2-c>0$, phương trình

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

  là phương trình của một đường tròn có tâm $I(a;b)$ và có bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

- Cho đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$, bán kính R. Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại $M_0(x_0;y_0)$ là $(a-x_0)\cdot(x-x_0)+(b-y_0)\cdot(y-y_0)=0$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai điểm $I(2;-1)$, $A(-1;4)$ và đường thẳng $\Delta: 3x-4y-20=0$.

a) Viết phương trình đường tròn (C_1) có tâm I và đi qua A.

b) Viết phương trình đường tròn (C_2) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ.

Giải

a) Vì đường tròn (C) có tâm I và đi qua A nên (C) có bán kính R bằng

$$R=IA=\sqrt{(-1-2)^2+(4-(-1))^2}=\sqrt{34}.$$

Vậy phương trình của (C) là $(x-2)^2+(y+1)^2=34$.

b) Vì đường tròn (C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ nên bán kính R của (C) được tính bởi công thức

$$R = d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) - 20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2.$$

Vậy phương trình của (C) là $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Lưu ý

Trong câu a, một số sai lầm có thể mắc phải khi viết phương trình của (C):

- $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{34}$ (nhầm vế phải là R);
- $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 34$ (nhầm dấu ở vế trái).

Ví dụ 2. Cho bốn điểm $A(2;6)$, $B(-6;2)$, $C(-1;-3)$ và $M(3;5)$.

a) Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm A, B, C.

b) Chứng minh rằng điểm M thuộc đường tròn (C).

c) Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm M.

Giải. a) Phương trình của đường tròn (C) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Vì $A(2;6) \in (C)$ nên ta có $2^2 + 6^2 - 2a \cdot 2 - 2b \cdot 6 + c = 0 \Leftrightarrow 4a + 12b - c = 40$. (1)

Tương tự, thay toạ độ các điểm B, C vào phương trình (C) ta được hai phương trình

$$12a - 4b + c = -40. \quad (2)$$

$$2a + 6b + c = -10. \quad (3)$$

Cộng theo từng vế của phương trình (1) với phương trình (2), phương trình (1) với phương trình (3), ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 16a + 8b = 0 \\ 6a + 18b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Suy ra $C = 4a + 12b - 40 = -20$.

Vậy phương trình của đường tròn (C) là: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.

b) Ta có $x_M^2 + y_M^2 + 2x_M - 4y_M - 20 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 5 - 20 = 0$.

Suy ra điểm M thuộc đường tròn (C).

c) Đường tròn (C) có tâm là $I(a;b) = (-1;2)$.

Tiếp tuyến Δ của (C) vuông góc với đường thẳng IM, do đó nó có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n_\Delta} = \overrightarrow{IM} = (3-(-1); 5-2) = (4;3).$$

Mặt khác, Δ đi qua điểm $M(3;5)$, vậy phương trình của Δ là

$$4\cdot(x-3)+3\cdot(y-5)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-27=0.$$

Nhận xét

- Trong câu a, ta có thể tìm tâm I của đường tròn bằng cách gọi toạ độ của điểm $I(a;b)$. Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} AI^2=BI^2 \\ AI^2=CI^2 \end{cases}$, từ đó ta tìm được toạ độ điểm I.

  Sau đó tìm bán kính $R=IA$.
- Em có thể làm câu b bằng cách tính độ dài đoạn thẳng IM rồi so sánh với bán kính R của (C).

C – Bài tập

7.19. Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) $(x-2)^2+(y-8)^2=49$.

b) $(x+3)^2+(y-4)^2=23$.

7.20. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một đường tròn? Khi đó hãy tìm tâm và bán kính của nó.

a) $x^2+2y^2-4x-2y+1=0$.

b) $x^2+y^2-4x+3y+2xy=0$.

c) $x^2+y^2-8x-6y+26=0$.

d) $x^2+y^2+6x-4y+13=0$.

e) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$.

7.21. Viết phương trình của đường tròn (C) trong các trường hợp sau.

a) Có tâm $I(3;1)$ và có bán kính $R=2$.

b) Có tâm $I(3;1)$ và đi qua điểm $M(-1;7)$.

c) Có tâm $I(2;-4)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x-2y-1=0$.

d) Có đường kính AB với $A(4;1), B(-2;-5)$.

7.22. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$ và đi qua hai điểm $A(6;2)$, $B(-1;3)$.

7.23. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm $M(0;-2)$.

7.24. Cho điểm $A(4;2)$ và hai đường thẳng $d: 3x + 4y - 20 = 0$, $d': 2x + y = 0$.

a) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với d.

b) Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc đường thẳng d' và tiếp xúc với d tại điểm A.

7.25. Cho đường tròn (C), đường thẳng Δ có phương trình lần lượt là:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2,\ x + y + 2 = 0.$$

a) Chứng minh rằng Δ là một tiếp tuyến của đường tròn (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến d của (C), biết rằng d song song với đường thẳng Δ.

7.26. Cho đường thẳng $\Delta: x \cdot \sin\alpha^\circ + y \cdot \cos\alpha^\circ - 1 = 0$, trong đó α là một số thực thuộc khoảng $(0;180)$.

a) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng Δ.

b) Chứng minh rằng khi α thay đổi, tồn tại một đường tròn cố định luôn tiếp xúc với đường thẳng Δ.

7.27. Vị trí của một chất điểm M tại thời điểm t (t trong khoảng thời gian từ 0 phút đến 180 phút) có toạ độ là $(3 + 5\sin t^\circ;\ 4 + 5\cos t^\circ)$. Tìm toạ độ của chất điểm M khi M ở cách xa gốc toạ độ nhất.

BÀI 22

BA ĐƯỜNG CONIC

A – Kiến thức cần nhớ

- **Định nghĩa elip:** Cho hai điểm cố định và phân biệt F_1, F_2. Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$. Cho số thực $a > c$. Tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ được gọi là đường elip (E). Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai tiêu điểm và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự của (E).

  Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$. Elip (E) có hai tiêu điểm là $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ và có tiêu cự là $2c$, với $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

- **Định nghĩa hypebol**: Cho hai điểm phân biệt cố định F_1 và F_2. Đặt $F_1F_2 = 2c$. Cho số thực dương $a < c$. Tập hợp các điểm M sao cho $\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$ được gọi là đường hypebol (H). Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai tiêu điểm và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự của (H).

  Phương trình chính tắc của hypebol (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a, b > 0$.

  Hypebol (H) có hai tiêu điểm là $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ và có tiêu cự là $2c$, với $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- **Định nghĩa parabol:** Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ được gọi là đường parabol (P). Điểm F được gọi là *tiêu điểm*, Δ được gọi là đường chuẩn của (P). Khoảng cách từ F đến Δ được gọi là tham số tiêu của (P). *Phương trình chính tắc của parabol* (P) có dạng $y^2 = 2px$ với $p > 0$. Parabol (P) có tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, phương trình đường chuẩn Δ là $x = -\frac{p}{2}$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Tìm toạ độ hai tiêu điểm, tiêu cự của (E).

b) Cho điểm M bất kì thuộc (E). Tính $MF_1 + MF_2$.

c) Cho điểm M thuộc (E) sao cho M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông. Tính đoạn OM, trong đó O là gốc toạ độ, từ đó hãy tìm toạ độ điểm M.

Giải. *a)* Trong phương trình chính tắc của (E) ta có

$$a^2 = 25,\ b^2 = 9 \Rightarrow a = 5, b = 3, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Vậy (E) có hai tiêu điểm là $F_1(-c;0) = (-4;0)$, $F_2(c;0) = (4;0)$, có tiêu cự là $2c = 8$.

b) Vì điểm M thuộc (E) nên theo định nghĩa của đường elip ta có

$$MF_1 + MF_2 = 2a = 2 \cdot 5 = 10.$$

c) Gọi $M(x_0;y_0)$. Do M thuộc (E) nên ta có $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1.$ (1)

Theo giả thiết ta có $\widehat{F_1MF_2} = 90^0$, kết hợp với O là trung điểm của F_1F_2 nên ta suy ra $OM = \frac{F_1F_2}{2} = c = 4.$ Điều này tương đương với

$$x_0^2 + y_0^2 = 4^2 = 16 \Leftrightarrow y_0^2 = 16 - x_0^2. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$\frac{x_0^2}{25} + \frac{16 - x_0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x_0^2 + 25\left(16 - x_0^2\right) = 225 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{175}{16} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{5\sqrt{7}}{4}.$$

Thay x_0 vào (2) ta được

$$y_0^2 = 16 - x_0^2 = 16 - \frac{175}{16} = \frac{81}{16} \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{9}{4}.$$

Vậy $OM = 4$ và có bốn điểm M thoả mãn đề bài, các điểm này có toạ độ là

$$M_1\left(\frac{5\sqrt{7}}{4};\frac{9}{4}\right), M_2\left(\frac{5\sqrt{7}}{4};-\frac{9}{4}\right), M_3\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4};\frac{9}{4}\right), M_4\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4};-\frac{9}{4}\right).$$

Lưu ý. Trong câu c, để tìm toạ độ điểm M, ta có thể giải hệ $\begin{cases} M \in (E) \\ \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0. \end{cases}$

Ví dụ 2. Lập phương trình chính tắc của hypebol (H), biết rằng (H) có một tiêu điểm là $F_2(5;0)$ và (H) đi qua điểm $A(-3;0)$. Tìm điểm M thuộc (H) có hoành độ dương sao cho khoảng cách từ M đến gốc toạ độ là nhỏ nhất.

Giải

Phương trình chính tắc của (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a,\ b > 0$.

Vì (H) đi qua điểm $A(-3;0)$ nên ta có $\frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a = 3.$

Do (H) có một tiêu điểm là $F_2(5;0)$ nên ta có $c = 5 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 3^2 = 16.$

Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$

Gọi $M(x_0;y_0)$, điều kiện $x_0 > 0$. Do M thuộc (H) nên ta có

$$\frac{x_0^2}{9} - \frac{y_0^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x_0^2}{9} = 1 + \frac{y_0^2}{16} \geq 1 \Rightarrow x_0^2 \geq 9.$$

Kết hợp với $x_0 > 0$ ta được $x_0 \geq 3$.

Từ đó suy ra $OM = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \geq \sqrt{x_0^2} = x_0 \geq 3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow M(3;0)$.

Vậy $M(3;0)$.

Nhận xét

- Điểm M thuộc nhánh bên phải của (H) (nhánh nằm bên phải trục tung) sao cho khoảng cách từ M đến gốc toạ độ O nhỏ nhất chính là giao điểm của nhánh đó với trục Ox.
- Một cách tương tự, ta có thể tìm được điểm N thuộc nhánh bên trái của (H) (nhánh nằm bên trái trục tung) sao cho khoảng cách từ N đến gốc toạ độ O nhỏ nhất là giao điểm của nhánh đó với trục Ox.

Ví dụ 3. Cho parabol (P) có phương trình ở dạng chính tắc và (P) đi qua điểm $A(8;8)$.

a) Viết phương trình của (P).

b) Tìm toạ độ tiêu điểm F, phương trình đường chuẩn Δ và tham số tiêu p của (P).

c) Cho điểm M thuộc (P) và có hoành độ bằng 3. Tính độ dài đoạn thẳng MF.

Giải. a) Phương trình chính tắc của (P) có dạng $y^2 = 2px$, trong đó $p > 0$.

Vì $A(8;8)$ thuộc (P) nên ta có phương trình $8^2 = 2p \cdot 8 \Leftrightarrow p = 4$.

Vậy phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 8x$.

b) (P) có tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2};0\right) = (2;0)$, phương trình đường chuẩn Δ là $x = -\frac{p}{2} = -2$ và có tham số tiêu là $p = 4$.

c) Vì điểm M thuộc (P) nên ta có $MF = d(M,\Delta)$.

Phương trình tổng quát của Δ là $x + 2 = 0$. Từ đó suy ra

$$MF = d(M,\Delta) = \frac{|3+2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 5.$$

Lưu ý

- Dựa vào điều kiện điểm M có hoành độ bằng 3 và M thuộc (P), ta có thể tìm được hai điểm M, từ đó tính được độ dài đoạn thẳng MF (đều bằng 5).

- Với một điểm N bất kì thuộc (P), dựa vào điều kiện $NF = d(N, \Delta)$ và công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, ta có thể tìm ra được công thức tính khoảng cách NF một cách dễ dàng $NF = x_N + \frac{p}{2}$.

C – Bài tập

7.28. Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tìm tiêu điểm và tiêu cự của elip.

7.29. Cho hypebol (H) có phương trình $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$. Tìm tiêu điểm và tiêu cự của hypebol.

7.30. Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 4x$. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol.

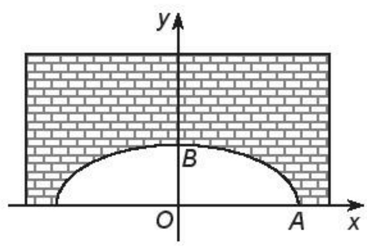
7.31. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết (E) đi qua điểm $A(6;0)$ và có tiêu cự bằng 8.

7.32. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H), biết (H) đi qua điểm $M\left(3\sqrt{2};-4\right)$ và có một tiêu điểm là $F_2(5;0)$.

7.33. Viết phương trình chính tắc của parabol (P), biết rằng (P) có đường chuẩn là đường thẳng $\Delta: x + 4 = 0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho khoảng cách từ M đến tiêu điểm của (P) bằng 5.

7.34. Cho parabol (P) có phương trình là $y^2 = 16x$. Gọi Δ là đường thẳng bất kì đi qua tiêu điểm F của (P) và không trùng với trục hoành. Chứng minh rằng Δ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B, đồng thời tích các khoảng cách từ A và B đến trục hoành không đổi.

7.35. Một người kĩ sư thiết kế một đường hầm một chiều có mặt cắt là một nửa hình elip, chiều rộng của hầm là 12 m, khoảng cách từ điểm cao nhất của elip so với mặt đường là 3 m. Người kĩ sư này muốn đưa ra cảnh báo cho các loại xe có thể đi qua hầm. Biết rằng những loại xe tải có chiều cao 2,8 m thì có chiều rộng không quá 3 m. Hỏi chiếc xe tải có chiều cao 2,8 m có thể đi qua hầm được không?



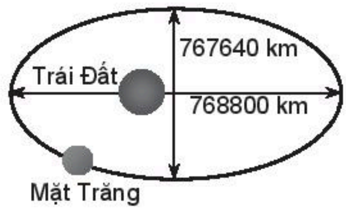
7.36. Cho điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

a) Tính $MF_1^2 - MF_2^2$ theo $x_0; y_0$. Từ đó tính MF_1, MF_2 theo $x_0; y_0$.

b) Tìm điểm M sao cho $MF_2 = 2MF_1$.

c) Tìm M sao cho góc nhìn của M tới hai điểm F_1, F_2 (tức là góc $\widehat{F_1MF_2}$) là lớn nhất?

7.37. Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip với tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ của quỹ đạo lần lượt là 768 800 km và 767 640 km. Tìm khoảng cách lớn nhất và bé nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng.



BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A – Trắc nghiệm

7.38. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường hypebol?

A. $16x^2 - 5y^2 = -80$.

B. $x^2 = 4y$.

C. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1$.

D. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

7.39. Cho hai điểm $A(-1; 0)$ và $B(-2; 3)$. Phương trình đường thẳng đi qua B và vuông góc với AB là

A. $x - 3y + 11 = 0$.

B. $x - 3y + 1 = 0$.

C. $-x - 3y + 7 = 0$.

D. $3x + y + 3 = 0$.

7.40. Cho điểm $A(2; 3)$ và đường thẳng $d: x + y + 3 = 0$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d là

A. $\dfrac{8}{\sqrt{13}}$.

B. $4\sqrt{2}$.

C. 8.

D. $2\sqrt{2}$.

7.41. Cho hai đường thẳng $d: x - 2y - 5 = 0$ và $k: x + 3y + 3 = 0$. Góc giữa hai đường thẳng d và k là

A. 30°.

B. 135°.

C. 45°.

D. 60°.

7.42. Cho đường tròn (*C*) có phương trình $(x-2)^2+(y+3)^2=9$. Tâm *I* và bán kính *R* của đường tròn (*C*) là

A. $I(2;-3), R=9$.

B. $I(-2;3), R=3$.

C. $I(-2;3), R=9$.

D. $I(2;-3), R=3$.

7.43. Cho elip (*E*) có phương trình $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$. Điểm nào sau đây là một tiêu điểm của (*E*)?

A. (0;3). B. (4;0). C. (3;0). D. (0;4).

7.44. Đường thẳng qua $A(1;-1)$ và $B(-2;-4)$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-1-3t. \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-4-t. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-1-4t. \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-4+t. \end{cases}$

7.45. Cho hypebol (*H*) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{13}=1$. Tiêu cự của hypebol là

A. 7. B. 14. C. $2\sqrt{23}$. D. $\sqrt{23}$.

7.46. Cho hai điểm $A(0;-2), B(2;4)$. Phương trình đường tròn tâm *A* đi qua điểm *B* là

A. $x^2+(y+2)^2=40$.

B. $x^2+(y+2)^2=10$.

C. $x^2+(y-2)^2=40$.

D. $x^2+(y-2)^2=10$.

7.47. Phương trình chính tắc của parabol (*P*) đi qua điểm *E*(2; 2) là

A. $x^2=2y$.

B. $x^2=4y$.

C. $x^2=y$.

D. $y=2x^2$.

7.48. Cho đường tròn (*C*) có phương trình $(x+1)^2+(y+1)^2=4$ và điểm $M(1;-1)$ thuộc đường tròn. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại điểm *M* là

A. $y+1=0$.

B. $y=0$.

C. $x+1=0$.

D. $x-1=0$.

7.49. Cho đường thẳng $d: 4x+3y-2=0$ và đường thẳng $k: \begin{cases} x=-1+3t \\ y=2-4t \end{cases}$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng d và k là

A. trùng nhau.

B. song song.

C. cắt nhau nhưng không vuông góc.

D. vuông góc.

7.50. Phương trình chính tắc của elip (E) đi qua điểm $M(8;0)$ và có tiêu cự bằng 6 là

A. $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{100}=1$.

B. $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{28}=1$.

C. $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{73}=1$.

D. $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{55}=1$.

7.51. Cho điểm $I(1;-1)$ và đường thẳng $d: x-y+2=0$. Phương trình đường tròn tâm I tiếp xúc với đường thẳng d là

A. $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

B. $(x+1)^2+(y-1)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2=8$.

D. $(x+1)^2+(y-1)^2=8$.

7.52. Cho đường thẳng $d: x-y+3=0$. Phương trình đường thẳng song song với d và cách d một khoảng là $\sqrt{2}$ là

A. $x+y+1=0$ và $x+y+3=0$.

B. $x-y-1=0$.

C. $x-y+3=0$.

D. $x-y+3=0$ và $x-y-1=0$.

B – Tự luận

7.53. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(-3;2)$ và vectơ $\vec{u}=(2;-5)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M và nhận $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương.

7.54. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $N(2;-1)$ và vectơ $\vec{n}=(3;-1)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua N và nhận $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến.

7.55. Cho tam giác ABC với $A(1;-1), B(3;5), C(-2;4)$.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng AB.

b) Viết phương trình đường cao AH của tam giác ABC.

c) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC.

d) Tính sin của góc giữa hai đường thẳng AB và AC.

7.56. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hai điểm $A(-1;0)$ và $B(3;1)$.

a) Viết phương trình đường tròn tâm *A* và đi qua *B*.

b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng *AB*.

c) Viết phương trình đường tròn tâm *O* và tiếp xúc với đường thẳng *AB*.

7.57. Cho đường tròn *(C)* có phương trình $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

a) Tìm toạ độ tâm *I* và bán kính *R* của *(C)*.

b) Chứng minh rằng điểm $M(5;1)$ thuộc *(C)*. Viết phương trình tiếp tuyến *d* của *(C)* tại *M*.

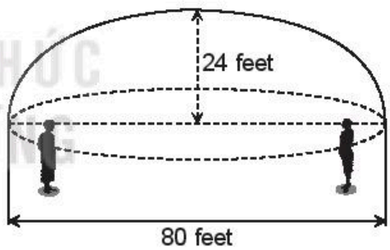
7.58. Các phương trình dưới đây là phương trình chính tắc của đường nào? Khi đó hãy tìm các tiêu điểm, tiêu cự, đường chuẩn (nếu là đường parabol).

a) $y^2=10x$.　　　　b) $x^2-y^2=1$.　　　　c) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

7.59. Cho elip *(E)* có phương trình là $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Tìm toạ độ các điểm *M* thuộc *(E)*, biết rằng *M* nhìn hai tiêu điểm của *(E)* dưới một góc vuông.

7.60. Lập phương trình chính tắc của parabol *(P)* biết rằng, *(P)* đi qua điểm $A(2;4)$. Khi đó hãy tìm điểm *M* thuộc *(P)* và cách tiêu điểm của *(P)* một khoảng bằng 5.

7.61. Hình vẽ bên minh hoạ một phòng thì thầm (whispering gallery) với mặt cắt ngang là một hình bán elip với chiều cao 24 feet và chiều rộng 80 feet. Một âm thanh được phát ra từ một tiêu điểm của phòng thì thầm có thể được nghe thấy tại tiêu điểm còn lại. Hỏi hai người nói thầm qua lại với nhau thì sẽ cách trung tâm của phòng bao nhiêu mét? Theo đơn vị đo lường quốc tế, 1 feet = 0,3048 m.



CHƯƠNG VIII

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

BÀI 23

QUY TẮC ĐẾM

A – Kiến thức cần nhớ

Có hai quy tắc đếm quan trọng nhất, đó là quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Quy tắc cộng. Giả sử có một công việc có thể được thực hiện theo một trong k phương án khác nhau:

– Phương án 1 có n_1 cách thực hiện;

– Phương án 2 có n_2 cách thực hiện;

...

– Phương án k có n_k cách thực hiện.

Khi đó số cách thực hiện công việc là $n_1 + n_2 + ... + n_k$ cách.

Quy tắc nhân. Giả sử có một công việc nào đó phải hoàn thành qua k công đoạn liên tiếp nhau:

– Công đoạn 1 có m_1 cách thực hiện;

– Công đoạn 2 có m_2 cách thực hiện;

...

– Công đoạn k có m_k cách thực hiện.

Khi đó số cách thực hiện công việc là $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$ cách.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Một lớp học có 16 bạn nam và 14 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách bầu ra bạn lớp trưởng ?

Giải

Có hai phương án để bầu ra bạn lớp trưởng:

– Phương án 1: bầu 1 trong số 16 bạn nam làm lớp trưởng;

– Phương án 2: bầu 1 trong số 14 bạn nữ làm lớp trưởng.

Với phương án 1, ta có 16 cách bầu và với phương án 2, ta có 14 cách. Như vậy, theo quy tắc cộng, có tất cả 16 + 14 = 30 cách bầu ra một bạn làm lớp trưởng.

Ví dụ 2. Một câu lạc bộ cầu lông có 10 tay vợt nam và 8 tay vợt nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đôi nam nữ để tham gia một giải đấu đôi nam nữ?

Giải

Để lập một đôi nam nữ, câu lạc bộ có thể thực hiện hai công đoạn:

– Công đoạn 1: chọn 1 trong số 10 tay vợt nam;

– Công đoạn 2: chọn 1 trong số 8 tay vợt nữ.

Với công đoạn 1, câu lạc bộ có 10 cách chọn tay vợt nam và với công đoạn 2, có 8 cách chọn cây vợt nữ. Vì thế, theo quy tắc nhân, số các cách lập ra một đôi nam nữ tham gia giải đấu là

$$10 \cdot 8 = 80 \text{ (cách)}.$$

C – Bài tập

8.1. Cửa hàng ăn nhanh có bán combo bánh mì và nước uống. Có các loại bánh mì thịt bò, bánh mì thịt gà, bánh mì cá chiên, bánh mì pa tê, bánh mì trứng và nước cam, nước táo, nước chanh và trà xanh. Hỏi có bao nhiêu loại combo bánh mì và nước uống khác nhau?

8.2. Một phòng chiếu phim có 4 cửa đi vào và 2 cửa đi ra. Có tất cả bao nhiêu cách để một khán giả vào phòng chiếu phim rồi sau đó ra về?

8.3. Để chuẩn bị cho mùa giải mới, câu lạc bộ bóng đá của trường cần một mẫu áo thi đấu mới. Nhà sản xuất gửi đến câu lạc bộ các tuỳ chọn mẫu áo theo bảng sau:

Kiểu áo	– Có cổ – Không có cổ
Chất liệu	– 100% polyester – 70% polyester và 30% cotton – 30% polyester và 70% cotton – 100% cotton

Hoạ tiết	– Trơn – Sọc dọc – Sọc ngang – Ô vuông – Quả trám
Màu áo	– Trắng – Xám – Đỏ – Cam – Lam – Lá cây – Tím

Hỏi câu lạc bộ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn cho mẫu áo thi đấu?

8.4. Số điện thoại cho mỗi thuê bao của một nhà mạng có 10 chữ số và có các đầu số là 081, 082, 083, 084, 085, 088, 091 hoặc 094. Giả sử hiện tại, nhà mạng đó đã cấp số cho tổng số 35 triệu thuê bao. Hỏi, nếu không có thêm các đầu số mới và không thu hồi các đầu số đã cấp thì nhà mạng đó còn có thể cung cấp bao nhiêu thuê bao nữa?

BÀI 24

HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

A – Kiến thức cần nhớ

Trong các bài toán đếm, các khái niệm cơ bản nhất là hoán vị, tổ hợp và chỉnh hợp.

Hoán vị. Một hoán vị của một tập hợp n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử đó ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$). Số các hoán vị của n, kí hiệu là P_n, được tính bằng công thức:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1.$$

Ta quy ước $0! = 1$.

Chỉnh hợp. Một chỉnh hợp chập k của n là một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử từ một tập hợp n phần tử, với $k, n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. Số các chỉnh hợp chập k của n, kí hiệu là A_n^k được tính bằng công thức:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1),$$

hay

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Tổ hợp. Một tổ hợp chập k của n là một cách chọn k phần tử từ một tập hợp n phần tử, với $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$. Số các tổ hợp chập k của n, kí hiệu là C_n^k, được tính bằng công thức:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Để tránh nhầm lẫn các khái niệm tổ hợp và chỉnh hợp, cần lưu ý rằng chỉnh hợp liên quan đến việc chọn có xếp thứ tự còn tổ hợp là chọn không xếp thứ tự.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Có bao nhiêu số có 5 chữ số, các chữ số là đôi một khác nhau, được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5?

Giải

Mỗi số như vậy tương ứng với một cách sắp xếp có thứ tự các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Như vậy, số các số có 5 chữ số thoả mãn yêu cầu của bài toán bằng số các hoán vị của 5, nghĩa là có

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ (số)}.$$

Ví dụ 2. Cửa hàng kem có các vị va ni, sô cô la, dâu, trà xanh, cà phê, chuối, sầu riêng. Lan muốn mua một cốc kem có hai vị khác nhau. Hỏi Lan có bao nhiêu cách chọn?

Giải

Có 7 loại kem khác nhau. Lan muốn chọn 2 loại từ 7 loại kem đó. Do đó, số cách chọn là

$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \text{ (cách)}.$$

C – Bài tập

8.5. Có bao nhiêu cách xếp 6 lá thư khác nhau vào 6 chiếc phong bì khác nhau (mỗi lá thư vào trong một phong bì)?

8.6. Có 12 thí sinh tham gia một cuộc thi âm nhạc. Hỏi có bao nhiêu cách trao ba giải cao nhất: Nhất, Nhì và Ba của cuộc thi cho các thí sinh?

8.7. Minh có 4 vé xem bóng đá và muốn mời thêm các bạn đi xem cùng. Nhưng Minh có tới 6 người bạn thích bóng đá. Hỏi Minh có bao nhiêu cách mời 3 bạn để đi xem bóng đá cùng mình?

8.8. Ông An quyết định sơn ngôi nhà 4 tầng mới xây của mình bằng gam màu xanh. Hãng sơn mà ông An chọn có gam màu xanh với 10 màu xanh có mức độ đậm nhạt khác nhau.

a) Ông An có bao nhiêu cách sơn nhà sao cho 2 tầng khác nhau có màu khác nhau?

b) Sau khi tham khảo ý kiến của mọi người, ông điều chỉnh ý định ban đầu và bây giờ muốn các tầng sơn màu nhạt dần từ thấp lên cao. Số cách sơn nhà theo yêu cầu mới là bao nhiêu?

8.9. Một nhóm hành khách, gồm 2 nam và 3 nữ, lên một chiếc xe buýt. Trên xe có 10 ghế trống, trong đó có 5 ghế cạnh cửa sổ.

a) Hỏi họ bao nhiêu cách ngồi?

b) Các hành khách nữ mong muốn ngồi cạnh cửa sổ. Hỏi số cách ngồi của họ là bao nhiêu?

8.10. Để chuẩn bị cho buổi biểu diễn, 3 anh hề phải chọn trang phục biểu diễn cho mình gồm mũ, tóc giả, mũi và quần áo. Đoàn xiếc có 10 chiếc mũ, 6 bộ tóc giả, 5 cái mũi hề và 8 bộ quần áo hề. Hỏi các anh hề có bao nhiêu cách chọn trang phục biểu diễn?

8.11. Trong các số tự nhiên từ 1 đến 999 999, có bao nhiêu số chứa đúng một chữ số 1 và đúng một chữ số 2?

8.12. a) Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ "KHIÊNG" thành một dãy kí tự gồm 6 chữ cái khác nhau (có thể là vô nghĩa)?

b) Cùng câu hỏi như a) nhưng yêu cầu hai chữ cái đầu tiên là các phụ âm?

c) Giống câu hỏi a) nhưng yêu cầu các phụ âm phải đứng liên tiếp với nhau.

BÀI 25

NHỊ THỨC NEWTON

A – Kiến thức cần nhớ

Các công thức khai triển nhị thức Newton cho $(a+b)^4$ và $(a+b)^5$:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4\\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;\\ (a+b)^5 &= C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5\\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.\end{aligned}$$

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Khai triển $(x+3)^4$.

Giải

Áp dụng công thức khai triển của $(a+b)^4$ với $a = x,\ b = 3$, ta có

$$\begin{aligned}(x+3)^4 &= x^4 + 4x^3\cdot 3 + 6x^2\cdot 3^2 + 4x\cdot 3^3 + 3^4\\ &= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81.\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Hãy sử dụng ba hạng tử đầu tiên trong khai triển của $(3 - 0{,}02)^5$ để tính giá trị gần đúng của $2{,}98^5$. Xác định sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng nhận được.

Giải

Ta có $2{,}98^5 = (3 - 0{,}02)^5$.

Sử dụng công thức khai triển $(a+b)^5$, áp dụng cho $a = 3,\ b = -0{,}02$, ta thu được:

$$\begin{aligned}2{,}98^5 &= (3-0{,}02)^5 = 3^5 + 5\cdot 3^4\cdot(-0{,}02) + 10\cdot 3^3\cdot(-0{,}02)^2 + \ldots\\ &= 243 - 405\cdot 0{,}02 + 270\cdot 0{,}0004 + \ldots\\ &= 243 - 8{,}1 + 0{,}108 + \ldots\\ &\approx 235{,}008.\end{aligned}$$

Bằng máy tính, ta kiểm tra được rằng giá trị đúng là 235,0072823968. Như vậy, sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng nhận được trên đây là

$$|\,235{,}0072823968 - 235{,}008\,| = 0{,}0007176032.$$

C – Bài tập

8.13. Khai triển các đa thức

a) $(x-2)^4$;

b) $(x+2)^5$;

c) $(2x+3y)^4$;

d) $(2x-y)^5$.

8.14. Trong khai triển của $(5x-2)^5$, số mũ của x được sắp xếp theo luỹ thừa tăng dần, hãy tìm hạng tử thứ hai.

8.15. Hãy sử dụng ba số hạng đầu tiên trong khai triển của $(1 + 0{,}03)^4$ để tính giá trị gần đúng của $1{,}03^4$. Xác định sai số tuyệt đối.

8.16. Xác định hạng tử không chứa x trong khai triển của $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^4$.

8.17. Khai triển $\left(z^2+1+\dfrac{1}{z}\right)^4$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A – Trắc nghiệm

8.18. Có 5 nhà xe vận chuyển hành khách giữa Hà Nội và Hải Phòng. Số cách để một người đi từ Hà Nội tới Hải Phòng rồi sau đó quay lại Hà Nội bằng hai nhà xe khác nhau là

A. 5. B. 10. C. 15. D. 20.

8.19. Số các số tự nhiên chẵn có ba chữ số, các chữ số đôi một khác nhau, được tạo thành từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 là

A. 224. B. 280.

C. 324. D. Không số nào trong các số đó.

8.20. Số các số tự nhiên trong khoảng từ 3 000 đến 4 000, chia hết cho 5, các chữ số đôi một khác nhau, được tạo thành từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 là

A. C_4^2. B. A_4^2. C. A_5^2. D. C_6^4.

8.21. Cho số nguyên dương $n \geq 4$. Người ta đánh dấu n điểm phân biệt trên một đường tròn. Biết rằng số các hình tam giác với các đỉnh là các điểm được đánh dấu thì bằng số các tứ giác với các đỉnh là các điểm được đánh dấu. Giá trị của n là

A. 4. B. 6. C. 7. D. 9.

8.22. Có 3 ứng viên cho 1 vị trí làm việc. Hội đồng tuyển dụng có 5 người, mỗi người bầu cho đúng 1 ứng viên. Số cách bầu của hội đồng là

A. C_5^3. B. 5^3.

C. 3^5. D. Không số nào trong các số đó.

8.23. Tại một cuộc họp của học sinh các lớp 10A, 10B, 10C, 10D và 10E, ban tổ chức đề nghị đại diện của mỗi lớp trình bày một báo cáo. Bạn đại diện của lớp 10A đề nghị được trình bày báo cáo ngay trước đại diện của lớp 10B và được ban tổ chức đồng ý. Số cách xếp chương trình là

A. 24. B. 36. C. 48. D. 30.

8.24. Người ta muốn thành lập một uỷ ban gồm 6 thành viên, trong đó có ít nhất 3 thành viên nữ từ một nhóm đại biểu gồm 6 nam và 4 nữ. Số các cách thành lập uỷ ban như vậy là

A. 100. B. 210. C. 60. D. 95.

8.25. Có 3 cặp vợ chồng mua 6 vé xem phim với các chỗ ngồi liên tiếp nhau trên cùng một hàng ghế. Số cách xếp chỗ ngồi sao cho mỗi cặp vợ chồng đều ngồi cạnh nhau là

A. 24. B. 36. C. 48. D. 120.

8.26. Tổng các hệ số của các đơn thức trong khai triển của $(1+x)^4$ bằng

A. 32. B. 8. C. 4. D. 16.

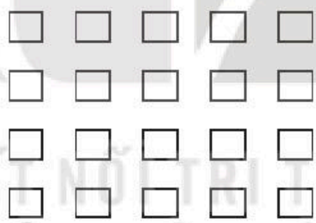
8.27. Giá trị của biểu thức $(\sqrt{5}+1)^5-(\sqrt{5}-1)^5$ bằng

A. 252. B. 352. C. 452. D. 425.

B – Tự luận

8.28. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn nam và 3 bạn nữ thành một hàng ngang sao cho đứng ngoài cùng bên trái và đứng ngoài cùng bên phải là các bạn nam?

8.29. Một phòng thi có 4 hàng bàn ghế, mỗi hàng có 5 bộ bàn ghế. Có 10 thí sinh nam và 10 thí sinh nữ được xếp vào phòng thi đó. Người ta muốn xếp các thí sinh, mỗi thí sinh ngồi một bàn, sao cho mỗi hàng chỉ xếp các thí sinh cùng giới tính và thí sinh ở hai hàng liên tiếp thì khác giới tính với nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ cho các thí sinh?



8.30. Ông giám đốc vườn thú mua 10 con vật để nhốt vào 10 cái chuồng mới xây. Thế nhưng có 3 cái chuồng lại không vừa so với 5 con vật lớn nhất. Hỏi vị giám đốc có bao nhiêu cách nhốt 10 con vật, mỗi con trong một chuồng?

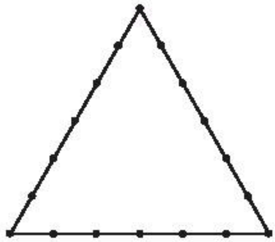
8.31. Một nhóm người gồm 3 bạn nam và 3 bạn nữ mua 6 chiếc vé xem phim với các chỗ ngồi liên tiếp nhau.

a) Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi sao cho các bạn nam và các bạn nữ ngồi xen kẽ nhau?

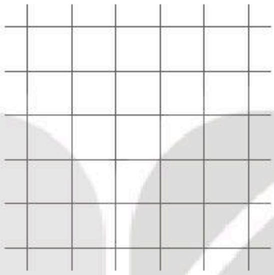
b) Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi sao cho các bạn nữ ngồi liên tiếp nhau?

8.32. Trong phần ca nhạc tại một cuộc gặp mặt của một nhóm bạn, hai người bất kì hát song ca đúng một lần với nhau trong 2 phút. Thời gian hát song ca kể từ lúc bắt đầu đến lúc kết thúc (coi các cặp hát nối tiếp nhau liên tục) là 30 phút. Hỏi nhóm bạn có bao nhiêu người?

8.33. Trong hình sau đây, mỗi cạnh của tam giác đều được chia thành 6 đoạn thẳng bằng nhau bởi 5 điểm nằm bên trong cùng với hai đầu mút. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là các chấm điểm ở trong hình:



8.34. Hình sau đây được tạo thành từ hai họ đường thẳng vuông góc, mỗi họ gồm 6 đường thẳng song song.



Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật khác nhau được tạo thành?

8.35. a) Có bao nhiêu dãy kí tự gồm 4 chữ cái (có thể là vô nghĩa) được tạo thành bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ "NGHI"?

b) Có bao nhiêu dãy kí tự gồm 6 chữ cái (có thể là vô nghĩa) được tạo thành bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ "NGHIÊN" ?

c) Có bao nhiêu dãy kí tự gồm 7 chữ cái (có thể là vô nghĩa) được tạo thành bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ "NGHIÊNG"?

8.36. Tính $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^5-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^5$.

8.37. Giả sử hệ số của x trong khai triển của $\left(x^2+\frac{r}{x}\right)^5$ bằng 640. Xác định giá trị của r.

CHƯƠNG IX
TÍNH XÁC SUẤT THEO ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN

BÀI 26

BIẾN CỐ VÀ ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

A – Kiến thức cần nhớ

- Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà kết quả của nó không thể biết trước được. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là Ω.
- Kết quả của phép thử làm cho biến cố E xảy ra gọi là kết quả thuận lợi cho E. Biến cố E là một tập con của không gian mẫu Ω, bao gồm tất cả các kết quả thuận lợi cho E.
- Biến cố đối của biến cố E là biến cố: "E không xảy ra" và được kí hiệu là $\overline{E}$. Đó là phần bù của E trong Ω.
- Cho phép thử T có không gian mẫu là Ω với các kết quả có thể của T là đồng khả năng. Nếu E là một biến cố liên quan đến phép thử T thì xác suất của E được cho bởi công thức

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

tức là xác suất của E bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi của E và số kết quả có thể.
- Nếu biến cố E có xác suất là $P(E)$ thì khi thực hiện phép thử n lần ($n \geq 30$), thì số lần xuất hiện biến cố E sẽ xấp xỉ bằng $nP(E)$ (n càng lớn thì sai số tương đối càng bé).

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Một túi có chứa 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ, 5 viên bi đen và 6 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ trong túi.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi H là biến cố "Bi rút ra có màu đỏ". Các biến cố H và $\overline{H}$ là các tập con nào của không gian mẫu?

c) Gọi K là biến cố "Bi rút ra có màu xanh hoặc màu trắng". Các biến cố K và $\overline{K}$ là các tập con nào của không gian mẫu?

Giải

Kí hiệu 3 viên bi xanh là X_1, X_2, X_3; 4 viên bi đỏ là D_1, D_2, D_3, D_4; 5 viên bi đen là B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, và 6 viên bi trắng là $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$. Ta có

a) $\Omega = \{X_1; X_2; X_3; D_1; D_2; D_3; D_4; B_1; B_2; B_3; B_4; B_5; T_1; T_2; T_3; T_4; T_5; T_6\}$.

b) $H = \{D_1; D_2; D_3; D_4\}$.

$\overline{H} = \{X_1; X_2; X_3; B_1; B_2; B_3; B_4; B_5; T_1; T_2; T_3; T_4; T_5; T_6\}$.

c) $K = \{X_1; X_2; X_3; T_1; T_2; T_3; T_4; T_5; T_6\}$.

$\overline{K} = \{D_1; D_2; D_3; D_4; B_1; B_2; B_3; B_4; B_5\}$.

Ví dụ 2. Xếp ngẫu nhiên 3 bạn An, Bình, Cường đứng thành một hàng dọc. Tính xác suất để

a) An không đứng cuối hàng;

b) Bình và Cường đứng cạnh nhau;

c) An đứng giữa Bình và Cường;

d) Bình đứng trước An.

Giải

Kí hiệu A, B, C tương ứng là An, Bình, Cường. Ta có

Ω = {ABC; ACB; BCA; BAC; CAB; CBA}. Vậy $n(\Omega) = 6$.

a) Gọi E là biến cố đang xét. Ta có E = {ABC; BAC; CAB; ACB}, $n(E) = 4$. Vậy $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

b) Gọi F là biến cố đang xét. Ta có F = {ABC; ACB; BCA; CBA}, $n(F) = 4$. Vậy $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

c) Gọi G là biến cố đang xét. Ta có G = {BAC; CAB}, $n(G) = 2$.

Vậy $P(G) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

d) Gọi H là biến cố đang xét. Ta có H = {BAC; BCA; CBA}, $n(H) = 3$.

Vậy $P(H) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

C – Bài tập

9.1. Gieo một con xúc xắc liên tiếp hai lần.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố: "Tổng số chấm xuất hiện lớn hơn hay bằng 8". Biến cố A và $\overline{A}$ là các tập con nào của không gian mẫu?

9.2. Gieo một con xúc xắc đồng thời rút ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp chứa 4 thẻ A, B, C, D.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xét các biến cố sau:

E: "Con xúc xắc xuất hiện mặt 6";

F: "Rút được thẻ A hoặc con xúc xắc xuất hiện mặt 5".

Các biến cố E, $\overline{E}$, F và $\overline{F}$ là các tập con nào của không gian mẫu?

9.3. Hai túi I và II chứa các tấm thẻ được đánh số. Túi I: {1; 2; 3; 4}, túi II: {1; 2; 3; 4; 5}. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi I và II một tấm thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xét các biến cố sau:

A: "Hai số trên hai tấm thẻ bằng nhau";

B: "Hai số trên hai tấm thẻ chênh nhau 2";

C: "Hai số trên hai tấm thẻ chênh nhau lớn hơn hay bằng 2".

Các biến cố A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, C, $\overline{C}$, là các tập con nào của không gian mẫu?

9.4. Gieo một đồng xu và một con xúc xắc đồng thời. Tính xác suất của biến cố A: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp hoặc con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm".

9.5. Có hai hộp I và II. Hộp thứ nhất chứa 12 tấm thẻ vàng đánh số từ 1 đến 12. Hộp thứ hai chứa 6 tấm thẻ đỏ đánh số từ 1 đến 6. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp một tấm thẻ. Tính xác suất của các biến cố:

a) A: "Cả hai tấm thẻ đều mang số 5".

b) B: "Tổng hai số trên hai tấm thẻ bằng 6".

9.6. Có ba chiếc hộp. Hộp thứ nhất chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Hộp thứ hai chứa 6 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 6. Hộp thứ ba chứa 7 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 7. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Tính xác suất để tổng ba số ghi trên ba tấm thẻ bằng 15.

BÀI 27

THỰC HÀNH TÍNH XÁC SUẤT THEO ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN

A – Kiến thức cần nhớ

- Trong nhiều bài toán, để tính số phần tử của không gian mẫu và biến cố ta sử dụng phương pháp tổ hợp như: các quy tắc đếm, các công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.
- Trong một số bài toán, phép thử được hình thành từ một vài phép thử. Khi đó để có thể mô tả đầy đủ, trực quan không gian mẫu và biến cố, ta sử dụng sơ đồ hình cây.
- Cho E là một biến cố. Xác suất của biến cố đối $\overline{E}$ liên hệ với xác suất của E bởi công thức sau:

$$P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E).$$

Trong một số bài toán, nếu tính trực tiếp xác suất của một biến cố gặp khó khăn, ta có thể tính gián tiếp bằng cách tính xác suất biến cố đối của nó.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Một hộp đựng 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên 10 tấm thẻ. Tính xác suất để trong đó có 5 số chia hết cho 3 và 5 số không chia hết cho 3.

Giải. Ta có $n(\Omega) = C_{30}^{10}$.

Gọi E là biến cố "Trong 10 số có 5 số chia hết cho 3 và 5 số không chia hết cho 3". Trong tập {1; 2; ...; 30} có 10 số chia hết cho 3 và 20 số không chia hết cho 3. Vậy có C_{10}^{5} cách chọn 5 số chia hết cho 3 từ 10 số chia hết cho 3; có C_{20}^{5} cách chọn 5 số không chia hết cho 3 từ 20 số không chia hết cho 3. Theo quy tắc nhân, ta có $n(E) = C_{10}^{5}C_{20}^{5}$.

Vậy $P(E) = \dfrac{C_{10}^{5}C_{20}^{5}}{C_{30}^{10}} \approx 0,13$.

Ví dụ 2. Gieo một đồng tiền cân đối ba lần.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Tính xác suất của các biến cố:

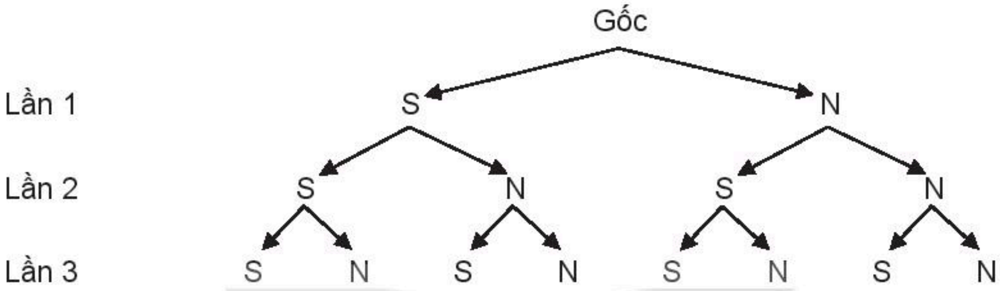
A: “Trong ba lần gieo có hai lần sấp, một lần ngửa”;

B: “Trong ba lần gieo có ít nhất một lần sấp”.

Giải

a) Kí hiệu S là đồng tiền ra mặt sấp, N là đồng tiền ra mặt ngửa.

Ta có sơ đồ hình cây:



Các nhánh cây là: SSS, SSN, SNS, SNN, NSS, NSN, NNS, NNN.

Vậy Ω = {SSS; SSN; SNS; SNN; NSS; NSN; NNS; NNN}, $n(\Omega) = 8$.

b) A = {SSN; SNS; NSS}, $n(A) = 3$. Vậy $P(A) = \frac{3}{8}$.

B = {SSS; SSN; SNS; SNN; NSS; NSN; NNS}, $n(B) = 7$. Vậy $P(B) = \frac{7}{8}$.

Ví dụ 3. Gieo ba con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm.

Giải

Gọi E là biến cố “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm”.

Ta có $\Omega = \{(a; b; c), 1 \leq a, b, c \leq 6\}$. Theo quy tắc nhân $n(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Tuy nhiên khó kiểm đếm trực tiếp được $n(E)$. Ta chuyển qua tính xác suất của biến cố đối.

Ta có $\overline{E}$: “ Không có con xúc xắc nào xuất hiện mặt 6 chấm” là biến cố đối của E.

$\overline{E} = \{(i; j; k), 1 \leq i, j, k \leq 5\}$. Theo quy tắc nhân $n(\overline{E}) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

$P(\overline{E}) = \frac{125}{216}$.

Do đó $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

C – Bài tập

9.7. Tại một quán ăn, lúc đầu có 50 khách trong đó có $2x$ đàn ông và y phụ nữ. Sau một tiếng, $y - 6$ đàn ông ra về và $2x - 5$ khách mới đến là nữ. Chọn ngẫu nhiên một khách. Biết rằng xác suất để chọn được một khách nữ là $\frac{9}{13}$. Tìm x và y.

9.8. Một lớp có 40 học sinh trong đó có 16 nam. Trong các em nam có 3 em thuận tay trái. Trong các em nữ có 2 em thuận tay trái. Chọn ngẫu nhiên hai em. Tính xác suất để hai em chọn được có một em nữ không thuận tay trái và một em nam thuận tay trái.

9.9. Có ba chiếc hộp trong đó hộp I có một viên bi đỏ, một viên bi xanh, một viên bi vàng; hộp II có một viên bi xanh, một viên bi vàng; hộp III có một viên bi đỏ và một viên bi xanh. Tất cả các viên bi đều có cùng kích thước. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một viên bi.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Tính xác suất để trong ba viên bi rút ra có ít nhất một viên bi đỏ bằng cách tính gián tiếp thông qua tính xác suất của biến cố đối.

9.10. Có ba hộp đựng thẻ. Hộp I chứa các tấm thẻ đánh số {1; 2; 3}. Hộp II chứa các tấm thẻ đánh số {2; 4; 6; 8}. Hộp III chứa các tấm thẻ đánh số {1; 3; 5; 7; 9; 11}. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ rồi cộng ba số trên ba tấm thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả là một số lẻ.

9.11. Trên một dãy phố có 3 quán ăn A, B, C. Hai bạn Văn và Hải mỗi người chọn ngẫu nhiên một quán để ăn trưa.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

E: "Hai người cùng vào một quán".
F: "Cả hai không chọn quán C".

9.12. Trên một phố có hai quán ăn A, B. Bốn bạn Sơn, Hải, Văn, Đạo mỗi người chọn ngẫu nhiên một quán ăn.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Tính xác suất để:

- Tất cả đều vào một quán;
- Mỗi quán có đúng 2 bạn vào;
- Quán A có 3 bạn vào, quán B có 1 bạn vào;
- Một quán có 3 bạn vào, quán kia có 1 bạn vào.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A – Trắc nghiệm

9.13. Xếp ngẫu nhiên ba bạn An, Bình, Cường đứng trên một hàng dọc.

a) Xác suất để An không đứng cuối hàng là

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{2}{5}$.

b) Xác suất để Bình và Cường đứng cạnh nhau là

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{2}$.

c) Xác suất để An đứng giữa Bình và Cường là

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{2}{5}$.

d) Xác suất để Bình đứng trước An là

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{2}$.

9.14. Một cái túi đựng 3 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh và 6 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để chọn được 3 viên bi màu đỏ là

A. $\frac{1}{364}$. B. $\frac{1}{14}$. C. $\frac{1}{182}$. D. $\frac{1}{95}$.

9.15. Gieo hai con xúc xắc cân đối.

a) Xác suất để có đúng 1 con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm là

A. $\frac{11}{36}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{5}{18}$. D. $\frac{4}{9}$.

b) Xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn hoặc bằng 7 là

A. $\frac{11}{36}$. B. $\frac{7}{12}$. C. $\frac{5}{11}$. D. $\frac{4}{9}$.

9.16. Chọn ngẫu nhiên 5 số trong tập $S = \{1; 2; \ldots; 20\}$. Xác suất để cả 5 số được chọn không vượt quá 10 xấp xỉ là

A. 0,016. B. 0,013. C. 0,014. D. 0,015.

9.17. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong một danh sách được đánh số thứ tự từ 1 đến 199.

a) Xác suất để cả 5 học sinh được chọn có số thứ tự nhỏ hơn 100 xấp xỉ là

A. 0,028. B. 0,029. C. 0,027. D.0,026.

b) Xác suất để cả 5 học sinh được chọn có số thứ tự lớn hơn 149 xấp xỉ là

A. 0,00089. B. 0,00083. C. 0,00088. D. 0,00086.

9.18. Một túi đựng 3 viên bi trắng và 5 viên bi đen. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để trong 3 viên bi đó có cả bi trắng và bi đen là

A. $\frac{13}{15}$. B. $\frac{9}{11}$. C. $\frac{43}{56}$. D. $\frac{45}{56}$.

9.19. Mũi tên của bánh xe trong trò chơi "Chiếc nón kì diệu" có thể dừng lại ở một trong 7 vị trí. Người chơi được quay 3 lần. Xác suất để mũi tên dừng lại ở ba vị trí khác nhau là

A. $\frac{30}{49}$. B. $\frac{29}{50}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{7}{11}$.

9.20. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối. Xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc hơn kém nhau 2 là

A. $\frac{5}{22}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{7}{34}$.

9.21. Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập hợp $S = \{1; 2; \ldots; 19\}$ rồi nhân hai số đó với nhau. Xác suất để kết quả là một số lẻ là

A. $\frac{9}{19}$. B. $\frac{10}{19}$. C. $\frac{4}{19}$. D. $\frac{5}{19}$.

9.22. Gieo ba con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xác suất để số chấm xuất hiện trên mặt của ba con xúc xắc khác nhau là

A. $\frac{5}{9}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{7}{9}$. D. $\frac{2}{9}$.

9.23. Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách thuê phòng trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lí chọn ngẫu nhiên 6 người cho nhận phòng.

a) Xác suất để cả 6 người là nam là

A. $\frac{11}{210}$. B. $\frac{1}{105}$. C. $\frac{1}{210}$. D. $\frac{7}{210}$.

b) Xác suất để có 4 nam và 2 nữ là

A. $\frac{2}{7}$.   B. $\frac{3}{7}$.   C. $\frac{4}{7}$.   D. $\frac{5}{7}$.

c) Xác suất để có ít nhất 3 nữ là

A. $\frac{17}{42}$.   B. $\frac{23}{42}$.   C. $\frac{25}{42}$.   D. $\frac{19}{42}$.

B – Tự luận

9.24. Gieo ba con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên ba con xúc xắc bằng 7.

9.25. Một cửa hàng bán ba loại kem: xoài, sô cô la và sữa. Một học sinh chọn mua ba cốc kem một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để ba cốc kem chọn được thuộc hai loại.

9.26. Hai thầy trò đến dự một buổi hội thảo. Ban tổ chức xếp ngẫu nhiên 6 đại biểu trong đó có hai thầy trò ngồi trên một chiếc ghế dài. Tính xác suất để hai thầy trò ngồi cạnh nhau.

9.27. Có ba cặp vợ chồng, trong đó có hai vợ chồng ông bà An đến dự một bữa tiệc. Họ được xếp ngẫu nhiên ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn.

a) Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử.

Hai cách xếp chỗ ngồi quanh bàn tròn được coi là như nhau nếu đối với mỗi người *A* trong nhóm, trong hai cách xếp đó, người ngồi bên trái *A* và bên phải *A* không thay đổi.

b) Tính xác suất để hai vợ chồng ông bà An ngồi cạnh nhau.

9.28. Một chiếc hộp đựng 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ và 2 quả cầu đen. Chọn ngẫu nhiên 6 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 3 quả trắng, 2 quả đỏ và 1 quả đen.

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Cho các mệnh đề:

P: "Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt";

Q: "Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$".

a) Hãy phát biểu các mệnh đề: $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$, $P \Leftrightarrow Q$, $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề này.

b) Dùng các khái niệm "điều kiện cần" và "điều kiện đủ" để diễn tả mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

c) Gọi X là tập hợp các phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt, Y là tập hợp các phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hệ số a và c trái dấu. Nêu mối quan hệ giữa hai tập hợp X và Y.

2. a) Biểu diễn hình học tập nghiệm D của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x - 2y \geq -6 \\ 2x + y \leq 10. \end{cases}$$

b) Từ kết quả ở câu a), tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x;y) = 2x + 3y$ trên miền D, biết rằng giá trị lớn nhất (tương ứng, nhỏ nhất) của F đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác D.

3. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với đồ thị là parabol có đỉnh $I(1;\ 4)$ và đi qua điểm $A(2;\ 3)$.

a) Xác định các hệ số a, b, c của tam thức bậc hai $f(x)$.

b) Vẽ parabol này.

c) Từ đồ thị đã vẽ ở câu b), hãy cho biết khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến và tập giá trị của hàm số $y = f(x)$.

d) Lập bảng xét dấu để giải bất phương trình $\dfrac{f(x)}{x-2} \geq 0$.

4. Một quả bóng chày được đánh đi với vận tốc 35 m/s hợp với phương ngang một góc bằng 45° ở độ cao 1 m so với mặt sân phẳng ở chỗ vụt bóng. Bỏ qua sức cản của không khí và lấy g = 9,8 m/s^2.

a) Biết rằng quỹ đạo chuyển động của quả bóng chày được cho bởi phương trình:

$$y = \frac{-g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h,$$

trong đó x là quãng đường (tính bằng mét) quả bóng bay được theo phương ngang, h là độ cao của quả bóng lúc được đánh đi so với mặt đất, vận tốc ban đầu v_o hợp với phương ngang một góc α.

Viết phương trình chuyển động của quả bóng chày.

b) Tính độ cao lớn nhất của quả bóng chày.

c) Tính tầm xa của quả bóng chày, tức là khoảng cách từ mặt đất ở chỗ đánh bóng và nơi quả bóng chạm đất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Có một hàng rào cao 4 m cách chỗ đánh bóng 125 m theo hướng đánh bóng. Hỏi quả bóng chày được đánh đi như trên có bị bay qua hàng rào đó hay không?

5. Một công ty thời trang thấy rằng khi một loại áo phông được bán ở mức giá x (nghìn đồng) một chiếc thì số lượng áo phông bán được n cho bởi phương trình nhu cầu

$$n = 21\,000 - 150x.$$

a) Tìm công thức biểu diễn doanh thu R như là hàm của giá bán x. Tìm miền xác định của hàm số $R = R(x)$.

b) Giá bán nào sẽ làm cho doanh thu đạt cực đại? Tính doanh thu cực đại đó và số áo phông bán được trong trường hợp đó.

c) Với giá bán như thế nào thì công ty sẽ đạt được ít nhất 675 triệu đồng doanh thu?

6. Người ta ước tính rằng trong khoảng từ năm 2010 đến năm 2030, số lượng điện thoại di động bán được của một công ty có thể được xấp xỉ bởi một hàm số bậc hai. Năm 2010 công ty đó bán được khoảng 19 nghìn chiếc điện thoại di động và năm 2019 bán được khoảng 100 nghìn chiếc điện thoại di động. Giả sử t là số năm tính từ năm 2010. Số điện thoại di động bán được năm 2010 được biểu diễn bởi điểm (0; 19) và số điện thoại di động bán được năm 2019 được biểu diễn bởi điểm (9; 100). Giả sử điểm (0;19) là đỉnh đồ thị của hàm số bậc hai này.

a) Tìm hàm số bậc hai biểu diễn số điện thoại di động công ty đó bán được qua từng năm.

b) Dựa trên mô hình này, hãy tính số điện thoại di động bán được năm 2024.

c) Dựa trên mô hình này, hãy ước lượng xem khi nào thì số điện thoại di động bán được được vượt mức 300 nghìn chiếc.

7. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

8. Giải các phương trình chứa căn thức sau:

a) $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 - x}$;

b) $\sqrt{6x^2 - 11x - 3} = 2x - 1$.

9. Đội văn nghệ của một trường trung học phổ thông gồm có 5 học sinh khối lớp 10, 5 học sinh khối lớp 11 và 5 học sinh khối lớp 12. Nhà trường cần chọn một đội gồm 10 học sinh để tham gia thi văn nghệ cấp huyện. Tính số cách lập đội văn nghệ sao cho có học sinh ở cả ba khối lớp và có nhiều nhất 2 học sinh khối lớp 10.

10. Viết khai triển nhị thức Newton của $(3x - 2)^n$, biết n là số tự nhiên thoả mãn

$$A_n^2 + 2C_n^1 = 30.$$

11. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$.

a) Tính diện tích S của tam giác.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác.

12. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(3; 4)$, $B(8; 6)$. Kẻ đường phân giác trong OD của tam giác OAB (D thuộc đoạn AB).

a) Tính OA, OB.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

c) Tìm toạ độ điểm D.

13. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AC, AB. Biết rằng $M(1; 2)$, $N(0; -1)$ và $P(-2; 3)$.

a) Lập phương trình tham số của đường thẳng BC.

b) Lập phương trình tổng quát của đường trung trực của đoạn thẳng BC.

14. Cho đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 25 = 0$. Gọi (C) là đường tròn tâm O và tiếp xúc với Δ.

a) Viết phương trình đường tròn (C).

b) Tìm toạ độ tiếp điểm H của Δ và (C).

15. Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng toạ độ. Theo đó, tại thời điểm t $(0 \le t \le 180)$, vật thể có vị trí toạ độ $\left(4\cos t^{\circ}; 3\sin t^{\circ}\right)$.

a) Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của vật thể.

b) Tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

16. Bảng sau đây cho biết lượng mưa trung bình hằng tháng tại Đà Nẵng và Hà Nội (mm).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đà Nẵng	39,5	13,2	14,1	28,0	60,2	62,5	58,6	119,6	291,2	253,5	304,0	145,1
Hà Nội	13,0	11,9	29,2	52,5	126,3	160,1	204,0	226,2	173,8	84,8	45,0	14,1

(Theo *www.weatherspark.com*)

a) Đà Nẵng hay Hà Nội có lượng mưa trung bình cả năm cao hơn?

b) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu về lượng mưa trung bình các tháng tại Đà Nẵng và Hà Nội. Nhận xét gì về sự phân tán của hai mẫu số liệu này?

17. Khi tham gia một trò chơi quay số trúng thưởng, mỗi người chơi chọn một số 4 chữ số (có tính cả số 0 ở đầu). Bạn An chọn số 0347. Người quản trò quay 4 tấm bìa cứng hình tròn I, II, III, IV, mỗi tấm bìa được chia thành 10 phần có diện tích bằng nhau và đánh số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 được gắn vào trục quay có mũi tên ở tâm. Giả sử mũi tên của bìa cứng số I, II ,III và IV tương ứng dừng ở các *số a, b, c, d*. Khi đó số $\overline{abcd}$ gọi là *số trúng thưởng*. Nếu số của người chơi trùng hoàn toàn với số trúng thưởng thì người chơi trúng giải nhất; trùng với 3 chữ số của số trúng thưởng (tính cả thứ tự) thì người chơi trúng giải nhì.

Tính xác suất bạn An trúng giải nhất, giải nhì.

18. Khi tham gia một trò chơi bốc thăm trúng thưởng, mỗi người chơi chọn một bộ 6 số đôi một khác nhau từ 45 số: 1; 2; ...; 45, chẳng hạn bạn Bình chọn bộ số {4; 12; 20; 31; 32; 33}. Sau đó, người quản trò bốc thăm ngẫu nhiên 6 quả bóng (không hoàn lại) từ một thùng kín đựng 45 quả bóng như nhau ghi các số 1; 2; ...; 45. Bộ 6 số ghi trên 6 quả bóng đó, gọi là *bộ số trúng thưởng*. Nếu bộ số của người chơi trùng với 4 số của bộ số trúng thưởng thì người chơi trúng giải nhì. Tính xác suất bạn Bình trúng giải nhì khi chơi.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

CHƯƠNG VI – HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 15. HÀM SỐ

6.1. Trong các trường hợp a, b, d thì y là một hàm số của x.

6.2. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$; c) $D = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; d) $D = (-\infty; 4)$.

6.3. a) Có. Tập xác định của hàm số là $D = \{-5; -3; -1; 0; 1; 2; 5; 8; 9\}$.

Tập giá trị của hàm số là $\{-6; -8; -4; 1; 3; 2; 3; 12; 15\}$.

b) Không. Vì tại $x = 6$ ta xác định được hai giá trị của y là 20 và 24.

6.4. Trong Hình 6.6 và Hình 6.7, ta thấy rằng mỗi giá trị của x cho hai giá trị của y nên Hình 6.6 và Hình 6.7 không phải là đồ thị của hàm số.

Trong Hình 6.8, với mỗi giá trị của x chỉ có duy nhất giá trị tương ứng của y nên Hình 6.8 là đồ thị của hàm số. Tập xác định của hàm số là $D = [-6; 10]$. Tập giá trị của hàm số là $[0; 8]$.

6.5. a) Đường biểu diễn quãng đường chạy được của mỗi học sinh có là đồ thị hàm số.

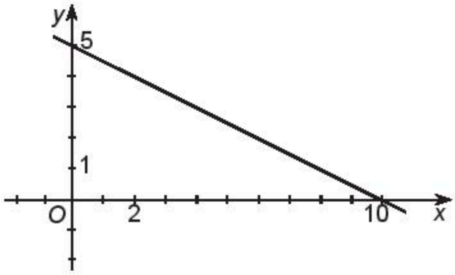
b) Từ đồ thị ta thấy, học sinh A về đích đầu tiên vì thời gian chạy là ít nhất.

Cả ba học sinh đều chạy hết quãng đường 100 m theo quy định.

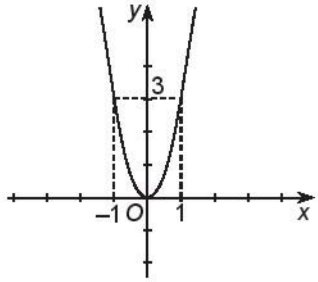
6.6. a) (H.6.17) Đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 5$:

Tập giá trị của hàm số là $\mathbb{R}$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.



Hình 6.17



Hình 6.18

b) (H.6.18) Đồ thị của hàm số $y = 3x^2$:

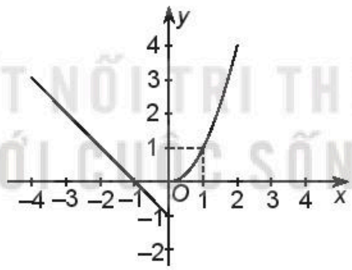
Tập giá trị của hàm số là $[0;+\infty)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

c) (H.6.19) Đồ thị của hàm số

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \ge 0 \\ -x-1 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Trong nửa khoảng $[0;+\infty)$, đồ thị của hàm số đã cho trùng với đồ thị của hàm số $y = x^2$.

Trong khoảng $(-\infty;0)$, đồ thị của hàm số đã cho trùng với đồ thị của hàm số $y = -x-1$.



Hình 6.19

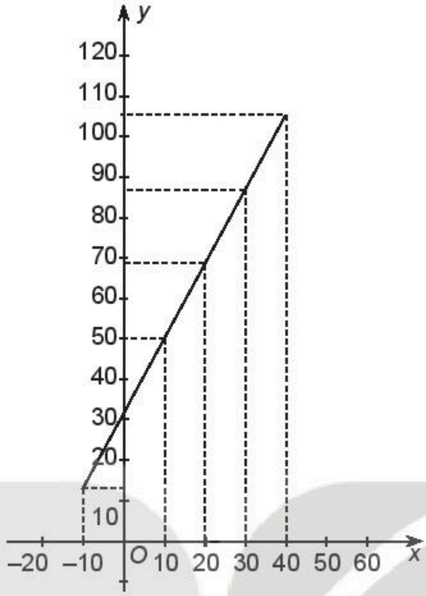
Tập giá trị của hàm số là $(-1;+\infty)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

6.7. a) $F = \frac{9}{5}C + 32.$

b)

C (Celsius)	–10	0	10	20	30	40
F(Fahrenheit)	14	32	50	68	86	104

c) Đồ thị của hàm số $F = F(C) = \frac{9}{5}C + 32$ trên đoạn [–10; 40] (H.6.20):



Hình 6.20

6.8. a) $T = T(x) = \begin{cases} 750x & \text{nếu } 0 \le x \le 2 \\ 1\,500 + 500(x-2) & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$

b) $T(2) = 1\,500$: khách sẽ phải trả 1,5 triệu đồng nếu thuê phòng khách sạn 2 ngày;

$T(3) = 3\,000$: khách sẽ phải trả 3 triệu đồng nếu thuê phòng khách sạn 5 ngày;

$T(7) = 4\,000$: khách sẽ phải trả 4 triệu đồng nếu thuê phòng khách sạn 5 ngày.

6.9. a)

Lượng nước sử dụng (m^3)	10	20	30	40
Số tiền (VND)	59 730	130 250	216 940	376 230

b) Công thức mô tả sự phụ thuộc của y vào x là:

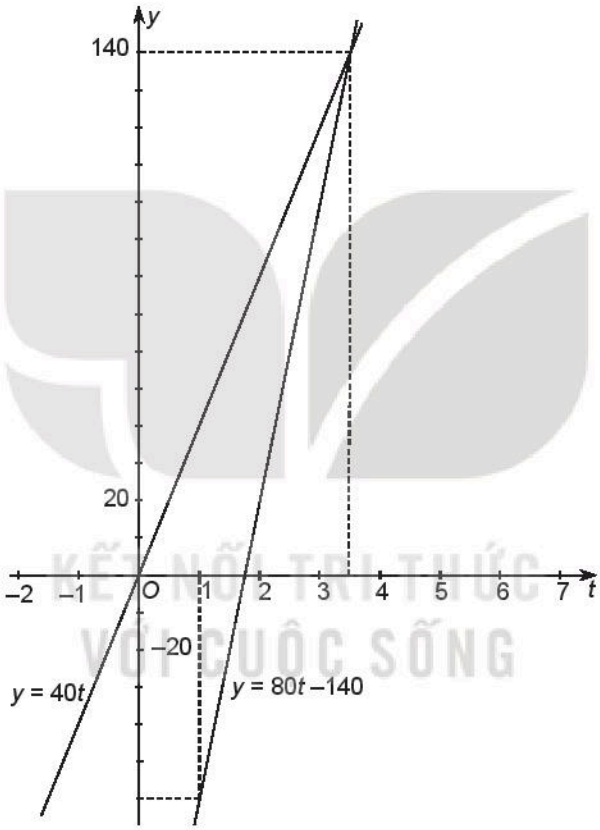
$$y = \begin{cases} 5\,973x & \text{với } x \le 10 \\ 59\,730 + 7\,052(x-10) & \text{với } 10 < x \le 20 \\ 130\,250 + 8\,669(x-20) & \text{với } 20 < x \le 30 \\ 216\,940 + 15\,929(x-30) & \text{với } x \ge 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = \begin{cases} 5\,973x & \text{với } x \le 10 \\ 7\,052x - 10\,790 & \text{với } 10 < x \le 20 \\ 8\,669x - 43\,130 & \text{với } 20 < x \le 30 \\ 15\,929x - 260\,930 & \text{với } x > 30 \end{cases}$$

6.10. a) Phương trình chuyển động của xe máy là: $y = 40t$.

Phương trình chuyển động của ô tô là: $y = 20 + 80(t - 2) = 80t - 140$.

b) Hình 6.21



Hình 6.21

c) Hai đồ thị cắt nhau tại điểm (3,5; 140), suy ra ô tô đuổi kịp xe máy khi $t = 3{,}5$, tức là đuổi kịp lúc 9 giờ 30 phút tại vị trí cách địa điểm A là 140 km.

d) Xét phương trình $40t = 80t - 140 \Leftrightarrow 40t = 140 \Leftrightarrow t = 3{,}5$. Khi $t = 3{,}5$ thì $y = 40 \cdot 3{,}5 = 140$.

Vậy ô tô đuổi kịp xe máy lúc 9 giờ 30 phút tại vị trí cách địa điểm A là 140 km.

BÀI 16. HÀM SỐ BẬC HAI

6.11. a) Toạ độ đỉnh của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $I(3;4)$, của $y=g(x)$ là $I(1;-4)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là 4.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=g(x)$ là -4.

d) Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $(-\infty;4]$.

Hàm số $y=g(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[-4;+\infty)$.

6.12. a) $y=f(x)=-x^2-x+1=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$.

$y=g(x)=x^2-8x+8=(x-4)^2-8$.

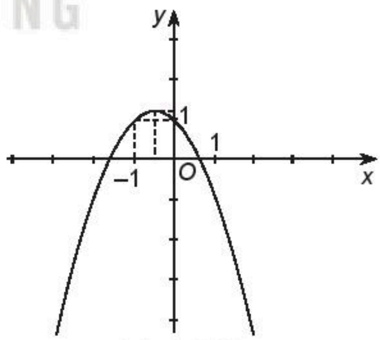
b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=-x^2-x+1$ là $\frac{5}{4}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=g(x)=x^2-8x+8$ là -8.

c) * (H.6.22) Đồ thị hàm số

$y=f(x)=-x^2-x+1$.

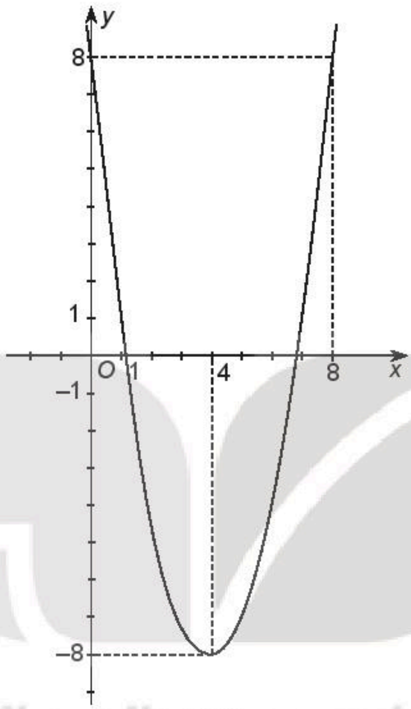
Ta có $a=-1<0$ nên parabol quay bề lõm xuống dưới. Đỉnh $I\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$. Trục đối xứng $x=-\frac{1}{2}$. Giao điểm với Oy là (0; 1). Điểm đối xứng với điểm (0; 1) qua trục đối xứng $x=-\frac{1}{2}$ là (–1; 1). Giao điểm với Ox là $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.



Hình 6.22

* (H.6.23) Đồ thị hàm số $y = g(x) = x^2 - 8x + 8$.

Ta có $a = 1 > 0$ nên parabol quay bề lõm lên trên. Đỉnh $I(4; -8)$. Trục đối xứng $x = 4$. Giao điểm với Oy là (0; 8). Điểm đối xứng với điểm (0; 8) qua trục đối xứng $x = 4$ là (8; 8). Giao điểm với Ox là $(4 - 2\sqrt{2}; 0)$ và $(4 + 2\sqrt{2}; 0)$.



Hình 6.23

6.13. a) Tập xác định D = $\mathbb{R}$. Tập giá trị là $(-\infty; 1]$.

b) Tập xác định D = $\mathbb{R}$. Tập giá trị là $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

6.14. a) Parabol cần tìm là $y = 2x^2 + x + 2$.

b) Parabol cần tìm là $y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 2$.

c) Parabol cần tìm là $y = x^2 - 4x + 2$.

6.15. Giả sử parabol có phương trình $y = a(x - h)^2 + k$.

Parabol có đỉnh là $I(-1; 2)$ nên ta có $h = -1$, $k = 2$.

Do đó $y = a(x+1)^2 + 2$.

Vì parabol qua điểm $A(1;\,6)$ nên $6 = a(1+1)^2 + 2$, do đó $a = 1$.

Vậy parabol cần tìm là $y = 1\cdot(x+1)^2 + 2 = x^2 + 2x + 3$.

6.16. Từ đồ thị của hàm số ta thấy:

+ Đồ thị quay bề lõm lên trên nên $a > 0$.

+ Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

+ Hoành độ đỉnh $x = -\dfrac{b}{2a}$ có giá trị dương nên a và b trái dấu. Vì $a > 0$ nên $b < 0$.

Mặt khác, vì đồ thị hàm số cắt trục hoành Ox tại hai điểm phân biệt, tức là phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Vậy $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

6.17. a) Chiều dài của mảnh vườn là: 100 – x (m).

Do đó, ta có công thức diện tích $S(x) = (100 - x)x = -x^2 + 100x$ (m^2).

b) Mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất khi hàm số $S(x) = -x^2 + 100x$ đạt giá trị lớn nhất. Vì $a = -1 < 0$ nên hàm số bậc hai này đạt giá trị lớn nhất tại $x = -\dfrac{b}{2a} = 50$.

Vậy mảnh vườn có diện tích lớn nhất khi nó có kích thước là 50 m × 50 m (tức là khi nó trở thành hình vuông).

6.18. a) Quả bóng đạt độ cao lớn nhất khi $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất, tức là khi t = 1,5 (giây).

Vậy sau khi ném 1,5 giây thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất.

b) Ta có $h(1{,}5) = -4{,}9\cdot(1{,}5)^2 + 14{,}7\cdot 1{,}5 = 11{,}025$.

Độ cao lớn nhất của quả bóng là 11,025 m.

c) Quả bóng chạm đất tức là $h(t) = 0 \Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 14{,}7t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ (loại) hoặc $t = 3$.

Vậy sau khi ném 3 giây thì quả bóng chạm đất.

6.19. a) Theo giả thiết điểm ném ở độ cao 1,5 m so với mặt đất nên $n = 1,5$.

Hòn đá đạt độ cao lớn nhất khi $t = -\dfrac{m}{2\cdot(-4,9)} = \dfrac{m}{9,8}$.

Theo đề ra ta có $\dfrac{m}{9,8} = 1,2 \Leftrightarrow m = 11,76$.

Vậy phương trình chuyển động của hòn đá là: $y = -4,9t^2 + 11,76t + 1,5$.

b) Khi $t = 2$ ta có $y = -4,9\cdot 2^2 + 11,76\cdot 2 + 1,5 = 5,42$.

Vậy sau 2 giây, hòn đá có độ cao là 5,42 m.

c) Hòn đá rơi xuống mặt đất tức là $y = 0$. Xét phương trình

$-4,9t^2 + 11,76t + 1,5 = 0 \Leftrightarrow t \approx 2,52$ hoặc $t \approx -0,12$ (loại).

Vậy sau khoảng 2,52 giây kể từ khi ném thì hòn đá rơi xuống mặt đất.

6.20. a) Khi giá vé là x (nghìn đồng) thì số tiền giảm giá mỗi vé so với mức giá cũ là $40 - x$ (nghìn đồng).

Số người tăng lên sau khi giảm giá vé là: $\dfrac{100(40-x)}{10} = 10(40-x)$.

Số người đến rạp chiếu phim mỗi ngày sau khi giảm giá là:

$$300 + 10(40-x) = 700 - 10x.$$

Công thức của hàm số $R(x)$ mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày khi giá vé là x (nghìn đồng) là:

$$R(x) = x(700 - 10x) = -10x^2 + 700x \text{ (nghìn đồng).}$$

b) Hàm số $R(x) = -10x^2 + 700x$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 35$. Khi đó

$$R(35) = 12\,250.$$

Vậy doanh thu lớn nhất mà rạp chiếu có thể thu được mỗi ngày là 12 250 000 đồng khi giá bán mỗi vé là 35 000 đồng.

BÀI 17. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

6.21. a) $f(x)$ có hệ số $a=-1<0$ và có hai nghiệm $x_1=-1, x_2=7$ nên $f(x)<0$ với mọi $x\in(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in(-1;7)$.

b) $g(x)$ có hệ số $a=3>0$ và biệt thức thu gọn $\Delta'=-5<0$ nên $g(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

c) $h(x)$ có hệ số $a=-16<0$ và có biệt thức thu gọn $\Delta'=0$ nên $h(x)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$ và $h\left(\dfrac{3}{4}\right)=0$ (hay $h(x)=-(4x-3)^2\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$).

d) $k(x)$ có hệ số $a=2>0$ và có hai nghiệm $x_1=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$, $x_2=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra $k(x)>0$ với mọi $x\in\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2};+\infty\right)$ và $k(x)<0$ với mọi $x\in\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2};\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)$.

6.22. a) Tam thức $3x^2-36x+108$ có hệ số $a=3>0$ và $\Delta'=0$ nên $3x^2-36x+108>0$ với mọi $x\ne 6$ và bằng 0 tại $x=6$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}\setminus\{6\}$.

b) Tam thức $-x^2+2x-2$ có hệ số $a=-1<0$ và biệt thức thu gọn $\Delta'=-1<0$ nên $-x^2+2x-2<0$ với mọi x. Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

c) Đây là bất phương trình trùng phương nên nếu đặt $t=x^2\ge 0$ thì ta được $t^2-3t+2\le 0$. Từ đó $1\le t\le 2$ hay $1\le x^2\le 2$.

Giải bất phương trình $1\le x^2$ ta được $x\le -1$ hoặc $x\ge 1$.

Giải bất phương trình $x^2\le 2$ ta được $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

Kết hợp nghiệm ta được tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-\sqrt{2};-1\right]\cup\left[1;\sqrt{2}\right]$.

d) Dễ thấy $x^2-x+1>0$ với mọi x (vì $a=1>0$ và biệt thức Δ âm); $2x^2+x+2>0$ với mọi x (vì $a=2>0$ và biệt thức Δ âm). Do đó ta có thể nhân chéo để được bất phương trình $2x^2+x+2\le x^2-x+1$ hay $x^2+2x+1\le 0$. Tam thức x^2+2x+1 có hệ số $a=1>0$ và biệt thức Δ = 0 nên $x^2+2x+1>0$ với mọi $x\ne -1$ và bằng 0 tại $x=-1$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\{-1\}$.

6.23. Phương trình đã cho có biệt thức thu gọn $\Delta' = -3m^2 - m + 1$.

a) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0$ tức là

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{6} < m < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}.$$

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$ac = 4m^2 - m < 0$ hay $0 < m < \frac{1}{4}$.

6.24. a) Ta có $a = -1 < 0$ nên $-x^2 + (m+1)x - 2m + 1 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$\Delta = (m+1)^2 - 4(2m-1) \le 0$ hay $m^2 - 6m + 5 \le 0$.

Từ đó ta được $m \in [1; 5]$.

b) Ta có $a = 1 > 0$ nên $x^2 - (2m+1)x + m + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$\Delta = (2m+1)^2 - 4(m+2) < 0$ hay $4m^2 - 7 < 0$.

Từ đó ta được $m \in \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

6.25. a) Doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 tức là
$R(x) = -560x^2 + 50000x = 0$ hay $x = 0$ hoặc $x \approx 89$.
Vậy theo mô hình đã cho, với đơn giá 89 nghìn đồng thì công ty sẽ không có doanh thu (đơn giá cao quá dẫn đến không có ai mua hàng).

b) Doanh thu vượt mức 1 tỉ đồng tức là $R(x) = -560x^2 + 50\,000x > 1\,000\,000$, hay $56x^2 - 5\,000x + 100\,000 < 0$. Giải bất phương trình ta được $30,25 < x < 59,04$.
Vậy đơn giá của bình đựng nước từ khoảng 31 nghìn đồng đến 59 nghìn đồng thì doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng.

6.26. a) Phương trình chuyển động của viên đạn là

$$y = \left(\frac{-9,8}{2 \cdot 500^2 \cdot \cos^2 45^0}\right)x^2 + (\tan 45^0)x \text{ hay } y = \frac{-9,8}{250000}x^2 + x.$$

b) Để viên đạn bay qua một ngọn núi cao 4 000 mét thì

$y = \frac{-9,8}{250000}x^2 + x > 4000$. Thu gọn ta được bất phương trình bậc hai

$9,8x^2 - 250\,000x + 1\,000\,000\,000 < 0$. Giải bất phương trình này ta được $4\,967,17 < x < 20\,543,03$.

Vậy khẩu pháo phải đặt cách chân núi trong khoảng từ 4 967 m đến 20 543 m (tất nhiên là phải tính đến tầm bắn của khẩu pháo nữa) thì viên đạn sẽ bay qua đỉnh núi.

6.27. Biệt thức của tam thức bậc hai $f(x) = b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ bằng

$$\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)$$
$$= \left((b-c)^2 - a^2\right)\left((b+c)^2 - a^2\right).$$

Từ đó $\Delta = (a+b+c)(a+b-c)(b-c-a)(b+c-a)$. Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên tổng hai cạnh luôn lớn hơn cạnh thứ ba, suy ra $a+b-c>0$, $b+c-a>0$ và $b-c-a<0$, do đó $\Delta<0$. Theo định lí dấu tam thức bậc hai ta có $f(x) = b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 > 0$ với mọi x.

BÀI 18. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

6.28. a) Tập nghiệm $S = \{3; 35\}$. b) Tập nghiệm $S = \{1\}$.

c) Phương trình đã cho vô nghiệm.

6.29. a) Tập nghiệm $S = \{-4; 5\}$. b) Tập nghiệm $S = \{10\}$.

c) Phương trình đã cho vô nghiệm.

6.30. a) Tập nghiệm $S = \{6\}$.

b) Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$(x-3)\left[\sqrt{x^2+4} - (x+3)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ \sqrt{x^2+4} = x+3 \end{array}\right.$$

Giải phương trình $\sqrt{x^2+4} = x+3$ ta được $x = -\dfrac{5}{6}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 3$ và $x = -\dfrac{5}{6}$.

6.31. Bình phương hai vế phương trình đã cho và thu gọn ta được $x^2+(1-m)x+2-m=0$. (*)

Do $2x^2+x+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ (vì $a=2>0$ và $\Delta=-7<0$) nên nếu x_0 là một nghiệm của phương trình (*) thì khi thử lại ta được $2x_0^2+x_0+1>0$, tức là x_0 thoả mãn phương trình đã cho. Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm. Điều này tương đương với

$$\Delta=(1-m)^2-4(2-m)\geq 0 \Leftrightarrow m^2+2m-7\geq 0$$
$$\Leftrightarrow m\geq -1+2\sqrt{2} \text{ hoặc } m\leq -1-2\sqrt{2}.$$

6.32. Gọi đường kính của nửa hình tròn là x (cm) ($x>0$). Độ dài cạnh bên của hình chữ nhật là $\sqrt{66^2-x^2}$. Diện tích nửa hình tròn là $\frac{3,14x^2}{8}$. Diện tích hình chữ nhật là $x\sqrt{66^2-x^2}$. Theo giả thiết ta có:

$$\frac{3,14x^2}{8}=0,3x\sqrt{66^2-x^2} \Leftrightarrow 157x=120\sqrt{66^2-x^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{62\,726\,400}{39\,049} \Leftrightarrow x\approx \pm 40,08.$$

Vậy kích thước của hình chữ nhật khoảng 40,08 cm × 52,44 cm.

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG

A – Trắc nghiệm

6.33. D	**6.34.** B	**6.35.** C	**6.36.** B	**6.37.** A
6.38. A	**6.39.** D	**6.40.** B	**6.41.** D	**6.42.** A
6.43. D	**6.44.** A	**6.45.** A	**6.46.** B	**6.47.** A
6.48. B	**6.49.** C	**6.50.** D	**6.51.** A	**6.52.** C
6.53. B				

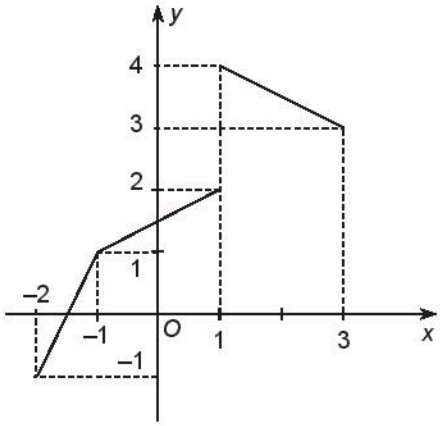
B – Tự luận

6.54. a) Hàm số xác định khi $-x^2+3x-2\geq 0$, tức là $1\leq x\leq 2$. Vậy tập xác định của hàm số là đoạn $[1; 2]$.

b) Điều kiện xác định: $x^2-1>0$, tức là $x<-1$ hoặc $x>1$. Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

6.55. a) Tập xác định của hàm số là đoạn $D = [-2; 3]$.

b) Đồ thị hàm số cho bởi hình dưới đây



Hình 6.24

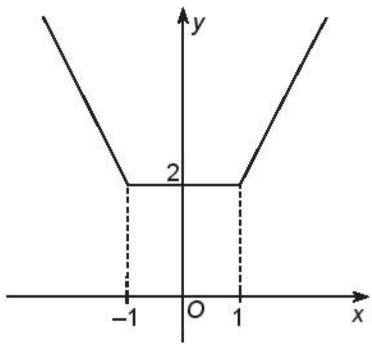
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

d) Tập giá trị của hàm số là $[-1; 2) \cup [3; 4]$.

6.56. a) Ta có

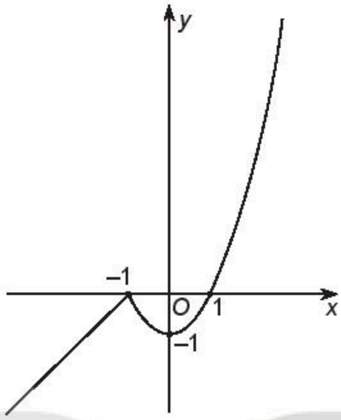
$$y = |x-1| + |x+1| = \begin{cases} -2x & \text{khi } x < -1 \\ 2 & \text{khi } -1 \le x < 1 \\ 2x & \text{khi } x \ge 1. \end{cases}$$

Tập xác định của hàm số này là $\mathbb{R}$ còn tập giá trị của nó là $[2; +\infty)$. Hàm số này nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$, đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và là hàm hằng trên $(-1; 1)$. Đồ thị của hàm số được vẽ trong Hình 6.25.



Hình 6.25

b) Tập xác định và tập giá trị của hàm số này đều là $\mathbb{R}$. Hàm số này đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$ còn nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$. Đồ thị của hàm số được vẽ trong Hình 6.26.



Hình 6.26

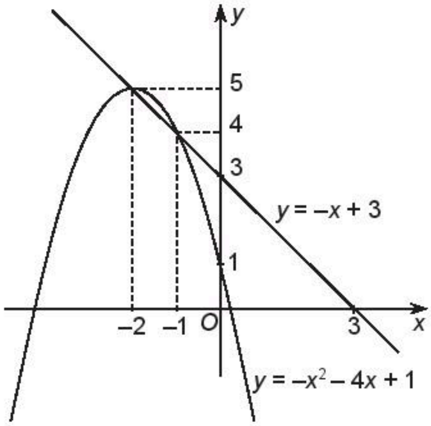
6.57. a) Parabol có bề lõm quay xuống nên $a < 0$. Parabol cắt trục Oy tại điểm $(0; c)$ nằm phía trên trục Ox nên $c > 0$. Trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a} < 0$ kết hợp với $a < 0$ suy ra $b < 0$. Vậy $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.

b) Parabol có bề lõm quay lên nên $a > 0$. Parabol cắt trục tại điểm $(0; c)$ nằm phía trên trục Ox nên $c > 0$. Trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a} > 0$ kết hợp với $a > 0$ suy ra $b < 0$. Vậy $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.

c) Parabol có bề lõm quay lên nên $a > 0$. Parabol đi qua gốc toạ độ $O(0; 0)$ nên $c = 0$. Trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a} < 0$ kết hợp với $a > 0$ suy ra $b > 0$. Vậy $a > 0$, $b > 0$, $c = 0$.

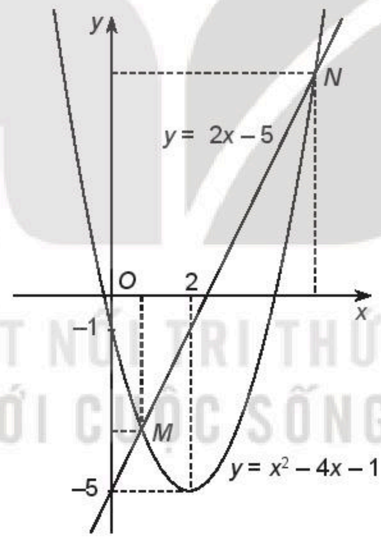
d) Parabol có bề lõm quay xuống nên $a < 0$. Parabol cắt trục Oy tại điểm $(0; c)$ nằm phía dưới trục Ox nên $c < 0$. Trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a} > 0$ kết hợp với $a < 0$ suy ra $b > 0$. Vậy $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$.

6.58. a) Đồ thị hàm số $y = -x + 3$ và $y = -x^2 - 4x + 1$ được vẽ trong Hình 6.27 dưới đây. Hai đồ thị này cắt nhau tại hai điểm A(–2; 5) và B(–1; 4).



Hình 6.27

b) Đồ thị hàm số $y = 2x - 5$ và $y = x^2 - 4x - 1$ được vẽ trong Hình 6.28. Hai đồ thị này cắt nhau tại hai điểm M và N.



Hình 6.28

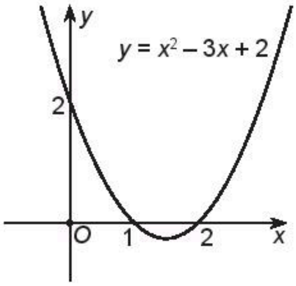
Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$x^2 - 4x - 1 = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{5}$.

Với $x = 3 - \sqrt{5}$ ta được $y = 2\left(3 - \sqrt{5}\right) - 5 = 1 - 2\sqrt{5}$. Vậy $M\left(3 - \sqrt{5}; 1 - 2\sqrt{5}\right)$.

Với $x = 3 + \sqrt{5}$ ta được $y = 2\left(3 + \sqrt{5}\right) - 5 = 1 + 2\sqrt{5}$. Vậy $N\left(3 + \sqrt{5}; 1 + 2\sqrt{5}\right)$.

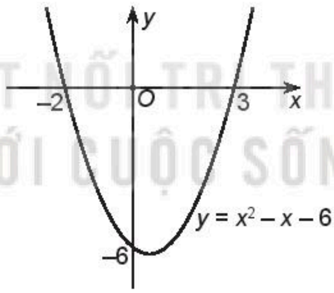
6.59. a) Đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ được vẽ trong Hình 6.29 dưới đây. Việc giải bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ ứng với việc tìm các khoảng mà phần đồ thị tương ứng của nó nằm phía trên trục hoành. Từ Hình 6.29 ta thấy khi $x \leq 1$ và $x \geq 2$ thì đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ nằm phía trên trục hoành. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.



Hình 6.29

b) Đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 6$ được vẽ trong Hình 6.30. Việc giải bất phương trình $x^2 - x - 6 < 0$ ứng với việc tìm các khoảng mà phần đồ thị tương ứng của nó nằm phía dưới trục hoành. Từ Hình 6.30 ta thấy khi $-2 < x < 3$ thì đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 6$ nằm phía dưới trục hoành.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-2; 3)$.



Hình 6.30

6.60. a) Hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{mx^2 - 2mx + 5}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu $mx^2 - 2mx + 5 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

– Khi $m = 0$ thì hàm số cho bởi công thức $y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, lúc này hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

– Khi $m \neq 0$ thì $mx^2 - 2mx + 5 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu

$a = m > 0$ và $\Delta' = m^2 - 5m < 0$ hay $0 < m < 5$.

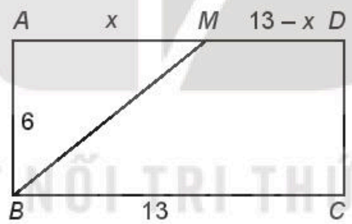
Vậy hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu $0 \leq m < 5$.

b) Tam thức $y = -x^2 + mx - 1$ có dấu không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi $\Delta = m^2 - 4 < 0$ hay $-2 < m < 2$.

c) Hàm số $y = \sqrt{-2x^2 + mx - m - 6}$ có tập xác định chỉ gồm một phần tử khi và chỉ khi nó có dạng $y = \sqrt{-2(x + \alpha)^2}$. Điều này tương đương với $\Delta = m^2 - 8m - 48 = 0$, tức là $m = -4$ hoặc $m = 12$. Chẳng hạn khi $m = -4$ thì $y = \sqrt{-2x^2 - 4x - 2} = \sqrt{-2(x+1)^2}$ có tập xác định là $D = \{-1\}$.

6.61. Đặt $AM = x$ $(0 < x < 13)$. Khi đó ta có $BM = \sqrt{36 + x^2}$ và $MD = 13 - x$. Theo giả thiết ta có $BM = 2MD$, tức là $\sqrt{36 + x^2} = 2(13 - x)$. Giải phương trình này và kết hợp với điều kiện ta được $x = 8$.

Vậy $AM = 8$ cm.



6.62. a) Các hệ số của hàm số bậc hai là $a = \dfrac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} < 0$, $b = \tan\alpha$ và $c = 0$.

b) Toạ độ đỉnh $I(x_I; y_I)$ của đường parabol là

$$\begin{cases} x_I = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(\tan\alpha)\cdot\left(2v_0^2\cos^2\alpha\right)}{-2g} = \dfrac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \\ y_I = f(x_I) = \left(\dfrac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)\left(\dfrac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2 + (\tan\alpha)\dfrac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}. \end{cases}$$

Vậy độ cao lớn nhất của vật là $y_{\max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

c) Độ cao lớn nhất $y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \le \frac{v_0^2}{2g}$, dấu "=" xảy ra khi $\sin^2 \alpha = 1$ hay $\alpha = 90^0$. Như vậy góc ném $\alpha = 90^0$ thì độ cao lớn nhất của vật sẽ đạt giá trị lớn nhất.

d) Phương trình quỹ đạo của quả bóng là

$$y = \left(\frac{-9,8}{2 \cdot 20^2 \cdot \cos^2 45^0} \right) x^2 + (\tan 45^0)x = -\frac{9,8}{400} x^2 + x.$$

Quả bóng ở độ cao trên 5 m nghĩa là

$$y = -\frac{9,8}{400} x^2 + x > 5 \Leftrightarrow 9,8x^2 - 400x + 2\,000 < 0 \Rightarrow 5,83 < x < 34,98.$$

Vậy khi quả bóng ở độ cao trên 5 m thì khoảng cách theo phương ngang từ vị trí của quả bóng đến vị trí đá bóng nằm trong khoảng (5,83; 34,98) mét.

6.63. a) Công thức biểu thị doanh thu R là

$$R(x) = nx = (1\,200\,000 - 1\,200x)x = -1\,200x^2 + 1\,200\,000x.$$

Điều kiện để hàm số $R = R(x)$ xác định là $x \ge 0$ và $n = 1\,200\,000 - 1\,200x \ge 0$, tức là $0 \le x \le 1\,000$. Tập xác định của hàm số $R = R(x)$ là đoạn $[0; 1\,000]$.

b) Hàm số $R = R(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = 500$ và giá trị lớn nhất của doanh thu bằng $R(500) = 300\,000\,000$. Như vậy với đơn giá 500 nghìn đồng một chiếc thì công ty đạt doanh thu cao nhất là 300 tỉ đồng và khi đó số máy tính bán được là $n = 600\,000$ chiếc.

c) Doanh thu đạt trên 200 tỉ đồng nghĩa là

$$R(x) = -1\,200x^2 + 1\,200\,000x > 200\,000\,000$$
$$\Leftrightarrow 1\,200x^2 - 1\,200\,000x + 200\,000\,000 < 0.$$

Giải bất phương trình ta được nghiệm gần đúng $211,32 < x < 788,68$. Như vậy với đơn giá từ 212 nghìn đồng đến 788 nghìn đồng thì doanh thu của công ty đạt trên 200 tỉ đồng.

CHƯƠNG VII – PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

BÀI 19. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

7.1. a) Phương trình tổng quát của đường thẳng *d*:

$1(x-0)-3(y-2)=0 \Leftrightarrow x-3y+6=0$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=t \\ y=2+3t. \end{cases}$

7.2. Đường thẳng cần tìm là đường thẳng đi qua *A* và nhận vectơ $\overrightarrow{BC}$ là một vectơ pháp tuyến. Ta có $\overrightarrow{BC}=(-2;4)$ và $A(1;2)$. Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng cần tìm là $-2(x-1)+4(y-2)=0$ hay $x-2y+3=0$.

7.3. Đường thẳng *AB* nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(1;1)$ là một vectơ chỉ phương. Phương trình tham số của đường thẳng *AB* đi qua điểm $A(1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;1)$ là $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t. \end{cases}$

7.4. Đường thẳng Δ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=(2;-1)$ nên các vectơ pháp tuyến của Δ có dạng là $\overrightarrow{n'}=(2t;-t)$. Theo giả thiết, ta có $|\overrightarrow{n'}|=\sqrt{(2t)^2+(-t)^2}=2\sqrt{5}$, suy ra $t_1=2$, $t_2=-2$. Vậy các vectơ thoả mãn yêu cầu đề bài là $\overrightarrow{n_1'}(4;-2)$, $\overrightarrow{n_2'}(-4;2)$.

Lưu ý. Một đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến và các vectơ đó cùng phương. Cụ thể, nếu $\overrightarrow{n}$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng *d* thì $t\cdot\overrightarrow{n}$ cũng là vectơ pháp tuyến của *d* với mọi số thực *t* khác 0. Sai lầm của nhiều em là nghĩ rằng đường thẳng chỉ có một vectơ pháp tuyến.

7.5. Biến đổi tương đương phương trình ta có: $y=-2x+3 \Leftrightarrow 2x+y-3=0$ nên phương trình tổng quát của đường thẳng *d* là $2x+y-3=0$.

Đường thẳng *d* có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}(2;1)$ nên *d* nhận $\overrightarrow{u}(1;-2)$ là một vectơ chỉ phương. Thay $x=0$ vào phương trình tổng quát của đường thẳng *d* ta được $y = 3$. Do đó d đi qua điểm $M(0;3)$. Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$

7.6. Do điểm N nằm trên đường thẳng Δ nên $N(2-t;2t)$, với t là tham số. Khi đó ta có $\overrightarrow{MN}(-t;2t-1)$. Từ giả thiết ta suy ra $MN = \sqrt{(-t)^2 + (2t-1)^2} = \sqrt{2}$. Giải phương trình trên ta được $t_1 = 1$; $t_2 = -\dfrac{1}{5}$.

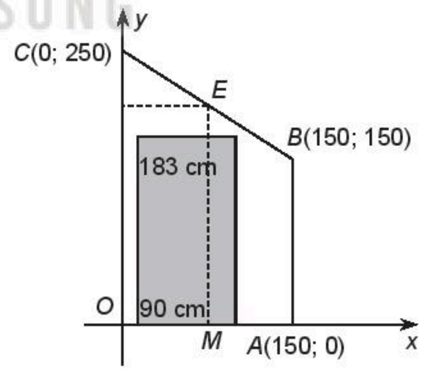
Vậy các điểm cần tìm là $N_1(1;2)$; $N_2\left(\dfrac{11}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

7.7. Gọi d là đường trung bình ứng với cạnh BC, khi đó d đi qua trung điểm $M(1;1)$ của cạnh AB và song song với BC. Suy ra d nhận $\overrightarrow{BC}(-6;-2)$ là một vectơ chỉ phương. Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 1 - 2t. \end{cases}$

7.8. a) Do $ABCD$ là hình vuông nên BC vuông góc với AB. Do đó, đường thẳng BC đi qua điểm $B(1;2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{AB}(2;2)$ là một vectơ pháp tuyến. Phương trình của BC là: $x + y - 3 = 0$.

b) Ta có C thuộc đường thẳng BC nên toạ độ điểm C có dạng $C(t;3-t)$, $t > 0$. Do $ABCD$ là hình vuông nên $BC = AB$. Do đó, ta có phương trình $\sqrt{(t-1)^2 + (1-t)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2}$. Giải phương trình trên ta được $t_1 = -1$; $t_2 = 3$. Kết hợp điều kiện ta có $C(3;0)$.

7.9. Gắn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ. Khi đó để tận dụng tối đa chiều cao có thể khi kê tủ lạnh thì bố mẹ bạn Nam sẽ kê tủ sát vào trục Oy. Do đó để kê được một chiếc tủ lạnh 2 cánh với bề ngang 90 cm thì chiều cao của tủ phải nhỏ hơn tung độ của điểm E thuộc đường thẳng BC với hoành độ điểm E bằng 90.



Ta có:

$B(150;150), C(0;250)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = (-150;100) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BC}} = (100;150)$.

Phương trình đường thẳng BC là:

$100(x-0)+150(y-250)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-750=0.$

Điểm E thuộc BC có hoành độ bằng 90 nên tung độ của E tính theo công thức $2\cdot 90+3y_E-750=0 \Rightarrow y_E=190.$

Do 183 cm < 190 cm nên bố mẹ bạn Nam có thể kê chiếc tủ lạnh có bề ngang là 90 cm và chiều cao 183 cm.

BÀI 20. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

7.10. a) Từ giả thiết ta có $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}$ nên hai đường thẳng này trùng nhau.

b) Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{u_a}=(2;0), \overrightarrow{u_b}=(3;1)$. Khi đó hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng không cùng phương với nhau nên hai đường thẳng cắt nhau.

c) Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{n_{d_1}}=(1;-2), \overrightarrow{u_{d_2}}=(-2;-1)$. Khi đó vectơ pháp tuyến của đường thẳng d_2 là $\overrightarrow{n_{d_2}}=(1;-2)=\overrightarrow{n_{d_1}}$, mà điểm $M(1;2)$ thuộc d_2 nhưng không thuộc d_1 nên hai đường thẳng song song với nhau.

7.11. a) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d và k. Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{n_d}=(0;1)$, $\overrightarrow{n_k}=(1;-1)$. Do đó, theo công thức tính góc của hai đường thẳng thì

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_d},\overrightarrow{n_k}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_d}\cdot\overrightarrow{n_k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_d}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_k}\right|}=\frac{|0\cdot 1+1\cdot(-1)|}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi=45^\circ.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng là $\varphi=45^\circ$.

b) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng a và b. Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{u_a}=(1;2)$, $\overrightarrow{n_b}=(3;1)$ nên $\overrightarrow{u_b}=(1;-3)$. Do đó, theo công thức tính góc của hai đường thẳng thì

$$\cos\alpha=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_a},\overrightarrow{u_b}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{u_a}\cdot\overrightarrow{u_b}\right|}{\left|\overrightarrow{u_a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u_b}\right|}=\frac{|1\cdot 1+2\cdot(-3)|}{\sqrt{5}.\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha=45^\circ.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng a và b là $\alpha=45^\circ$.

c) Gọi β là góc giữa hai đường thẳng *m* và *n*. Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{u_m} = (1; \sqrt{3})$, $\overrightarrow{u_n} = (-1; \sqrt{3})$. Do đó theo công thức tính góc giữa hai đường thẳng thì

$$\cos\beta = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_m}, \overrightarrow{u_n}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u_m} \cdot \overrightarrow{u_n}\right|}{\left|\overrightarrow{u_m}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u_n}\right|} = \frac{\left|1 \cdot (-1) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right|}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng *m* và *n* là $\beta = 60^\circ$.

7.12. a) Do $\frac{2}{2} \neq \frac{1}{5}$ nên hai đường thẳng này cắt nhau. Gọi *I* là toạ độ giao điểm của hai đường thẳng. Khi đó toạ độ *I* là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2x + 5y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } I(-1; 1).$$

b) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng *d* và *k*. Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{n_d} = (2; 1), \overrightarrow{n_k} = (2; 5)$. Do đó, theo công thức tính góc của hai đường thẳng thì

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{n_k}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_d} \cdot \overrightarrow{n_k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_d}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_k}\right|} = \frac{\left|2 \cdot 2 + 1 \cdot 5\right|}{\sqrt{5}\sqrt{29}} = \frac{9}{\sqrt{145}}.$$

Do đó, $\tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = \frac{145}{81} - 1 = \frac{64}{81} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{8}{9}$.

7.13. Do *M* thuộc *Ox* nên toạ độ của *M* có dạng $M(m; 0)$. Từ giả thiết ta có $d(M, \Delta) = \frac{\left|3m + 0 - 3\right|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \sqrt{10}$. Giải phương trình ta được $m_1 = \frac{13}{3}$; $m_2 = -\frac{7}{3}$.

Vậy có hai điểm thoả mãn là $M_1\left(\frac{13}{3}; 0\right)$; $M_2\left(-\frac{7}{3}; 0\right)$.

7.14. a) Δ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(2; 1)$. Do *d* song song với Δ nên *d* nhận $\vec{n}(2; 1)$ là một vectơ pháp tuyến. Đường thẳng *d* đi qua $A(3; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2; 1)$ nên có phương trình tổng quát là $2x + y - 7 = 0$.

b) Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; -2)$. Do *k* vuông góc với Δ nên *k* nhận vectơ $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; -2)$ là một vectơ pháp tuyến. Đường thẳng *k* đi qua $B(-1; 0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_k} = (1; -2)$ nên có phương trình tổng quát là $x - 2y + 1 = 0$.

c) Đường thẳng a song song với Δ nên phương trình đường thẳng a có dạng $2x+y+c=0$ với $c\neq -5$. Theo công thức tính khoảng cách ta có $d(O,a)=\dfrac{|2\cdot 0+0+c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$. Giải phương trình ta được $c=\pm 5$. Kết hợp điều kiện ta có $c=5$. Vậy phương trình đường thẳng a là $2x+y+5=0$.

Lưu ý. Khi viết phương trình đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước thì các em có thể gọi dạng phương trình đường thẳng đó nhưng cần có điều kiện hai đường thẳng không trùng nhau.

7.15. a) Độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ A chính là khoảng cách từ điểm A đến cạnh BC.

Đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{BC}=(-2;1)$ là một vectơ chỉ phương. Do đó $\vec{n}=(1;2)$ là một vectơ pháp tuyến của BC. Đường thẳng BC đi qua điểm $B(2;-2)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2)$ nên có phương trình tổng quát là $x+2y+2=0$.

Theo công thức tính khoảng cách, ta có $d(A,BC)=\dfrac{|2+2\cdot(-1)+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

b) Ta có $BC=\sqrt{5}$ nên $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}d(A;BC)\cdot BC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=1$(đvdt).

c) Ta có $AB=1$, $BC=\sqrt{5}$, $AC=2$. Vậy bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r=\dfrac{S_{ABC}}{p}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}+2}{2}\right)}=\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (đvđd).

Lưu ý. Có thể nhận xét tam giác ABC vuông tại đỉnh A rồi áp dụng hệ thức lượng trong tam giác để giải quyết bài toán.

7.16. a) Thay toạ độ điểm A vào phương trình đường thẳng d ta có $-2-2\cdot 2+1=-5\neq 0$. Vậy điểm A không thuộc đường thẳng d.

b) Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d. Khi đó Δ nhận vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(2;1)$ của đường thẳng d là một vectơ pháp tuyến nên phương trình Δ là $2(x+2)+1(y-2)=0 \Leftrightarrow 2x+y+2=0$. Hình chiếu vuông góc H của điểm A trên đường thẳng d là giao điểm của đường thẳng d và Δ. Do đó, toạ độ của điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x-2y+1=0\\2x+y+2=0\end{cases}$. Giải hệ phương trình ta được $x=-1$, $y=0$. Vậy $H(-1;0)$.

c) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d. Khi đó H là trung điểm của AA'. Từ đó ta có $A'(0;-2)$.

Lưu ý. Ta có thể tìm toạ độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d bằng cách gọi toạ độ điểm $A'(a;b)$. Sau đó dùng điều kiện $AA' \perp d$ và trung điểm của AA' thuộc d để tìm ra a, b.

7.17. a) Ta có $(-3+0-1)\cdot(1-2-1)=8>0$ nên theo tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn ta có A, B nằm cùng phía so với đường thẳng d.

b) Do $M \in d$ nên toạ độ của điểm M có dạng $M(t;1-t)$. Chu vi tam giác ABM nhỏ nhất khi và chỉ khi $MA+MB$ nhỏ nhất.

Lấy A' đối xứng với A qua đường thẳng d. Khi đó ta có $MA+MB=MA'+MB \geq A'B$. Dấu bằng xảy ra khi $M=A'B \cap d$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên d. Khi đó AH đi qua điểm $A(-3;0)$ và nhận vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;-1)$ của đường thẳng d là vectơ pháp tuyến nên phương trình của AH là $x-y+3=0$. Vậy toạ độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$. Giải hệ phương trình ta được $x=-1$, $y=2$. Suy ra $H(-1;2)$. Mặt khác, H là trung điểm của AA' nên $A'(1;4)$.

Ta có $\overrightarrow{A'B}=(0;-6)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $A'B$. Do đó $A'B$ là đường thẳng đi qua điểm $A'(1;4)$ và nhận $\vec{n}(1;0)$ là một vectơ pháp tuyến. Phương trình của đường thẳng $A'B$ là $x=1$.

Vậy toạ độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x=1. \end{cases}$

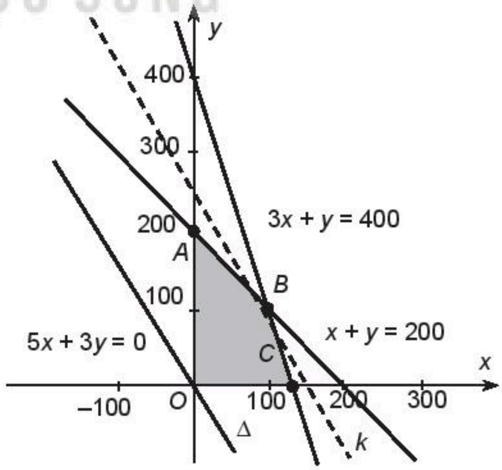
Do đó ta có $M(1;0)$.

7.18. Gọi x, y lần lượt là số chiếc bánh mì và chai nước khoáng mà lớp Việt định mua để bán. Khi đó từ giả thiết ta có: $x, y \in \mathbb{N}$.

Mặt khác từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x+y \leq 200 \\ 15\,000x+5\,000y \leq 2\,000\,000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq 200 \\ 3x+y \leq 400. \end{cases}$$



Nếu bán hết thì lợi nhuận lớp Việt có được là: $T = 5x + 3y$ (nghìn đồng).

Để tìm lợi nhuận lớn nhất ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $d = 5x + 3y$.

Trước hết, ta biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 200 \\ 3x + y \leq 400 \end{cases}$ trên mặt phẳng *Oxy*, là miền tứ giác *OABC*.

Khi đó các cặp (*x; y*) thoả mãn đề bài là các cặp số tự nhiên sao cho điểm *M*(*x; y*) nằm trong miền tứ giác *OABC*.

Ta có $d = 5x + 3y = \sqrt{34} \cdot \dfrac{|5x + 3y|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \sqrt{34} \cdot d(M, \Delta)$, với Δ là đường thẳng có phương trình $5x + 3y = 0$.

Gọi k là đường thẳng qua M và song song với Δ. Khi đó ta có $d(M, \Delta) = d(k, \Delta)$. Do đó d lớn nhất tương ứng với khoảng cách giữa k và Δ lớn nhất. Từ hình vẽ ta có khoảng cách giữa k và Δ lớn nhất khi M trùng B. Do đó giá trị lớn nhất của d là $\sqrt{34} \cdot \dfrac{|5 \cdot 100 + 3 \cdot 100|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = 800$.

Vậy lợi nhuận tối đa mà lớp Việt có thể đạt được là 800 nghìn đồng khi các bạn mua và bán được 100 chiếc bánh mì và 100 chai nước.

Lưu ý. Dạng toán này các em đã được gặp ở phần hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Tuy nhiên khi đó các em thường công nhận kết quả là giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất đạt được tại đỉnh của miền đa giác là miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn mà không có giải thích rõ ràng. Bài giải này là một minh hoạ cho cách chứng minh chặt chẽ của dạng toán này. Đây là một cách làm thú vị thông qua hình học toạ độ.

BÀI 21. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

7.19. a) $I(2;8), R = 7.$ b) $I(-3;4), R = \sqrt{23}.$

7.20. a) Phương trình đã cho không là phương trình của đường tròn (hệ số của x^2 và y^2 không bằng nhau).

b) Phương trình đã cho không là phương trình của đường tròn (trong phương trình của đường tròn không có thành phần tích $x \cdot y$).

c) Phương trình đã cho có các hệ số $a = 4, b = 3, c = 26,$ suy ra

$a^2 + b^2 - c = 3^2 + 4^2 - 26 = -1 < 0,$ do đó nó không là phương trình của đường tròn.

d) Phương trình đã cho có các hệ số $a = -3, b = 2, c = 13,$ suy ra

$a^2 + b^2 - c = (-3)^2 + 2^2 - 13 = 0,$ do đó nó không là phương trình của đường tròn.

e) Phương trình đã cho có các hệ số $a = 2, b = -1, c = 1$ thoả mãn $a^2 + b^2 - c = 2^2 + (-1)^2 - 1 = 4 > 0,$ nên là phương trình của đường tròn có tâm $I(2;-1)$ và có bán kính $R = \sqrt{4} = 2$.

7.21. a) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = R^2 = 4.$

b) Bán kính của (C) bằng $R = IM = \sqrt{(-1-3)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{52}.$

Mặt khác (C) có tâm là $I(3;1)$, suy ra (C) có phương trình là

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 52.$$

c) Vì Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) nên bán kính của (C) bằng

$$R = d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \sqrt{13}.$$

Vậy phương trình của (C) là $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 13.$

d) Vì AB là đường kính của (C) nên (C) có tâm I là trung điểm của AB và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$. Ta có

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{4-2}{2}=1 \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1-5}{2}=-2 \end{cases} \Rightarrow I(1;-2);$$

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(-2-4)^2+(-5-1)^2}}{2}=3\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình của đường tròn (C) là $(x-1)^2+(y+2)^2=18$.

7.22. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Ta có $I\in\Delta: y=1-x\Rightarrow I(t;1-t)$.

Vì A, B thuộc (C) nên ta có

$$\begin{aligned} AI^2=BI^2 &\Leftrightarrow (t-6)^2+(1-t-2)^2=(t+1)^2+(1-t-3)^2 \\ &\Leftrightarrow (t-6)^2+(t+1)^2=(t+1)^2+(t+2)^2 \\ &\Leftrightarrow t^2-12t+36=t^2+4t+4 \\ &\Leftrightarrow 16t=32\Leftrightarrow t=2 \\ &\Rightarrow I(2;-1). \end{aligned}$$

Bán kính của (C) bằng

$$R=IA=\sqrt{(6-2)^2+(2-(-1))^2}=5.$$

Phương trình của (C) là $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

Lưu ý. Ta có thể viết phương trình đường thẳng trung trực d của đoạn thẳng AB, sau đó tìm tâm I là giao của hai đường thẳng d và Δ.

7.23. Đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(0;-2)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_\Delta}=\overrightarrow{IM}=(3;-4)$. Phương trình của Δ là

$$3(x-0)-4(y+2)=0\Leftrightarrow 3x-4y-8=0.$$

7.24. a) Ta có $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_d}=(3;4)\rightarrow\overrightarrow{n_\Delta}=(4;-3)$. Phương trình của Δ là

$$4(x-4)-3(y-2)=0\Leftrightarrow 4x-3y-10=0.$$

b) Gọi I là tâm của đường tròn (C). Vì d tiếp xúc với (C) tại điểm A nên ta có $IA \perp d$, do đó I thuộc Δ. Mặt khác, I thuộc đường thẳng d'. Suy ra toạ độ của I thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - 3y - 10 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(1; -2).$$

Bán kính của (C) bằng $R = IA = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = 5.$

Vậy phương trình của (C) là $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$

Lưu ý

• Khi viết phương trình đường tròn, thông thường ta nên tìm tâm của đường tròn trước, sau đó tìm bán kính của nó.

• Ở câu b, sau khi tìm được tâm I, ta có thể tính bán kính R như sau

$$R = d(I, d) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5.$$

• Tâm I, bán kính R có thể tìm dựa theo hệ điều kiện sau đây

$$\begin{cases} I \in d' \\ d(I, d) = R = IA. \end{cases}$$

7.25. Đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ và có bán kính $R = \sqrt{2}.$

a) Khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ là

$$d(I, \Delta) = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}.$$

Ta có $d(I, \Delta) = R$, do đó Δ là một tiếp tuyến của (C).

b) Vì đường thẳng d song song với đường thẳng Δ nên phương trình đường thẳng d có dạng $x + y + m = 0$, trong đó $m \neq 2$.

d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi

$$d(I, d) = R \Leftrightarrow \frac{|1 - 1 + m|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |m| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2. \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $m \neq 2$ ta được $m = -2$. Vậy phương trình của đường thẳng d là $x + y - 2 = 0$.

Lưu ý. Trong câu b, nếu không để ý đến điều kiện hai đường thẳng song song thì ta có thể sẽ không loại được trường hợp tiếp tuyến trùng với Δ.

7.26. a) Khoảng cách từ O đến đường thẳng Δ là

$$d(O,\Delta)=\frac{|-1|}{\sqrt{(\sin\alpha^\circ)^2+(\cos\alpha^\circ)^2}}=1.$$

b) Gọi (C) là đường tròn có tâm O và bán kính $R=1$.

Vì $d(O,\Delta)=1=R$ nên (C) luôn tiếp xúc với Δ. Vậy phương trình đường tròn (C) cần tìm là $x^2+y^2=1$.

7.27. Từ cách xác định toạ độ của chất điểm M ta có

$$\begin{cases}x_M=3+5\sin t^\circ\\ y_M=4+5\cos t^\circ\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-3=5\sin t^\circ\\ y_M-4=5\cos t^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow(x_M-3)^2+(y_M-4)^2=25.$$

Vậy chất điểm M luôn thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$ và có bán kính $R=5$. Mặt khác gốc toạ độ O cũng thuộc đường tròn (C). Do đó ta có

$$OM\le 2R=10.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi OM là đường kính của đường tròn (C), nghĩa là I là trung điểm của OM, điều đó tương đương với

$$\begin{cases}x_M=2x_I-x_O=6\\ y_M=2y_I-y_O=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin t^\circ=\dfrac{3}{5}\\ \cos t^\circ=\dfrac{4}{5}\end{cases}$$ (có $t\in(0;180)$ thoả mãn hệ).

Vậy $M(6;8)$.

BÀI 22. BA ĐƯỜNG CONIC

7.28. Trong phương trình chính tắc của (E) ta có

$$\begin{cases} a^2 = 36 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{5}.$$

Vậy (E) có hai tiêu điểm là $F_1\left(-2\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{5};0\right)$ và có tiêu cự là $2c = 4\sqrt{5}$.

7.29. Trong phương trình chính tắc của (H) ta có

$$\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = 6.$$

Vậy (H) có hai tiêu điểm là $F_1(-6;0)$, $F_2(6;0)$ và có tiêu cự là $2c = 12$.

7.30. Trong phương trình chính tắc của (P) ta có

$$2p = 4 \Rightarrow p = 2.$$

Vậy (P) có tiêu điểm là $F(1;0)$ và có đường chuẩn là $\Delta : x = -1$.

7.31. Phương trình chính tắc của (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > b > 0$.

Vì (E) đi qua điểm $A(6;0)$ nên ta có $\frac{6^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a = 6$.

Do (E) có tiêu cự là $2c = 8$ nên ta có $c = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 20$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

7.32. Phương trình chính tắc của (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a, b > 0$.

Do (H) có một tiêu điểm là $F_2(5;0)$ nên ta có

$$c = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 25 - b^2.$$

Vì (H) đi qua điểm $M\left(3\sqrt{2};4\right)$ nên ta có

$$\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2}{a^2}-\frac{4^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{18}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Đặt $t=b^2>0 \Rightarrow a^2=25-t$. Thay vào (1) ta được

$$\frac{18}{25-t}-\frac{16}{t}=1 \Leftrightarrow 18t-16(25-t)=(25-t)t$$

$$\Leftrightarrow t^2+9t-400=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=16 \\ t=-25. \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $t>0$ ta được $t=16$.

Suy ra $b^2=t=16, a^2=25-t=9$.

Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Lưu ý. Trong phương trình chính tắc của hypebol, ta có $0<a, b<c$. Ngoài ra không có sự so sánh giữa a và b.

7.33. Phương trình chính tắc của (P) có dạng $y^2=2px$, trong đó $p>0$.

Vì (P) có đường chuẩn là $\Delta: x+4=0 \Leftrightarrow x=-4 \Rightarrow -\frac{p}{2}=-4 \Leftrightarrow p=8$.

Vậy phương trình chính tắc của (P) là $y^2=16x$.

Gọi $M(x_0;y_0)$. Vì M thuộc (P) nên ta có

$$d(M,\Delta)=MF=5 \Leftrightarrow \frac{|x_0+4|}{\sqrt{1^2+0^2}}=5$$

$$\Leftrightarrow |x_0+4|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+4=5 \\ x_0+4=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-9. \end{array}\right.$$

Với $x_0=-9$, thay vào phương trình của (P) ta được $y_0^2=16\cdot(-9)=-144$, phương trình này vô nghiệm.

Với $x_0=1$, thay vào phương trình của (P) ta được

$$y_0^2=16\cdot 1=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0=4 \\ y_0=-4. \end{array}\right.$$

Vậy $M(1;4)$ hoặc $M(1;-4)$.

Lưu ý. Ta có thể tìm được toạ độ điểm $M(x_0; y_0)$ bằng cách giải hệ

$$\begin{cases} M \in (P) \\ MF = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = 16x_0 \\ \sqrt{(x_0 - 4)^2 + y_0^2} = 5. \end{cases}$$

7.34. Gọi vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (a; b)$. Vì Δ đi qua điểm $F(4;0)$ và Δ không trùng với trục Ox nên ta có $b \neq 0$. Phương trình tham số của Δ là

$$\begin{cases} x = 4 + at \\ y = 0 + bt = bt. \end{cases}$$

Toạ độ giao điểm của Δ và (P) ứng với t thoả mãn phương trình

$$(bt)^2 = 16 \cdot (4 + at) \Leftrightarrow b^2t^2 - 16at - 64 = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) có $\Delta' = 64a^2 + 64b^2 > 0$ (do $b \neq 0$), suy ra phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Vậy Δ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi $A(4 + at_1; bt_1)$, $B(4 + at_2; bt_2)$, trong đó t_1, t_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Ta có

$$d(A, Ox) \cdot d(B, Ox) = \frac{|bt_1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \cdot \frac{|bt_2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \left|b^2 \cdot t_1t_2\right|.$$

Theo định lí Vi-ét ta có $t_1t_2 = \frac{-64}{b^2}$. Từ đó suy ra

$$d(A, Ox) \cdot d(B, Ox) = \left|b^2 \cdot \frac{-64}{b^2}\right| = 64.$$

Vậy tích các khoảng cách từ A và B đến trục hoành không đổi.

Lưu ý. Để tìm giao điểm của đường thẳng với các đường conic một cách thuận lợi, ta nên viết phương trình đường thẳng ở dạng tham số.

7.35. Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > b > 0$. Do các điểm $B(0; 3)$ và $A(6;0)$ thuộc (E) nên thay vào phương trình của (E) ta có $b = 3$ và $a = 6$. Suy ra phương trình của (E) là

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Với những xe tải có chiều cao 2,8 m, chiều rộng của xe tải là 3 m, tương ứng với x = 1,5. Thay vào phương trình của elip để ta tìm ra độ cao y của điểm M (có hoành độ bằng 1,5 thuộc (E)) so với trục Ox

$$y_M = 3\cdot\sqrt{1-\frac{x_M^2}{16}} = 3\cdot\sqrt{1-\frac{1,5^2}{16}} \approx 2,905 > 2,8.$$

Kết luận: Ô tô tải có thể đi được qua hầm, tuy nhiên cần khuyến cáo ô tô phải đi vào chính giữa hầm.

7.36. Trong phương trình chính tắc của (E) ta có $a=\sqrt{2},\ b=1,\ c=\sqrt{a^2-b^2}=1$. ($E$) có hai tiêu điểm là $F_1(-1;0),\ F_2(1;0)$.

a) Ta có $MF_1^2 - MF_2^2 = (x_0+1)^2 + y_0^2 - \left[(x_0-1)^2 + y_0^2\right] = 4x_0$.

Mặt khác, do M thuộc (E) nên ta có $MF_1 + MF_2 = 2a = 2\sqrt{2}$. (1)

Từ đó suy ra $MF_1 - MF_2 = \dfrac{MF_1^2 - MF_2^2}{MF_1 + MF_2} = \dfrac{4x_0}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}x_0$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\begin{cases} MF_1 = \sqrt{2} + \dfrac{x_0}{\sqrt{2}} \\ MF_2 = \sqrt{2} - \dfrac{x_0}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

b) Sử dụng kết quả của phần a) ta có

$$MF_2 = 2MF_1 \Leftrightarrow \sqrt{2} - \frac{x_0}{\sqrt{2}} = 2\left(\sqrt{2} + \frac{x_0}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \frac{3x_0}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{2}{3}.$$

Mặt khác do M thuộc (E) nên ta có

$$\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{2} = 1 - \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{2} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \\ y_0 = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}. \end{array}\right.$$

Vậy $M\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$ hoặc $M\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$.

c) Áp dụng định lí côsin trong tam giác MF_1F_2 ta có

$$\cos\widehat{F_1MF_2} = \frac{MF_1^2 + MF_2^2 - F_1F_2^2}{2 \cdot MF_1 \cdot MF_2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2} + \frac{x_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{x_0}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2^2}{2 \cdot \left(\sqrt{2} + \frac{x_0}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{x_0}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{x_0^2}{4 - x_0^2}.$$

Ta có $\frac{x_0^2}{2} = 1 - y_0^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le x_0^2 \le 2.$

Suy ra $\cos\widehat{F_1MF_2} \ge 0 \Rightarrow \widehat{F_1MF_2} \le 90^0.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \pm 1.$

Vậy $M(0;\pm 1)$ thì M nhìn hai tiêu điểm dưới góc nhìn lớn nhất.

Nhận xét. Điểm M (thuộc elip) nhìn hai tiêu điểm dưới góc nhìn lớn nhất chính là hai giao điểm của elip với trục tung.

7.37. Vì $2a = 768\,800$ và $2b = 767\,640$ nên ta có $a = 384\,400$ và $b = 383\,820.$

Từ đó suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{384400^2 - 383820^2} \approx 21\,108.$

Vì vậy, khoảng cách lớn nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng là

$$a + c \approx 384\,400 + 21\,108 = 405\,508 \text{ (km)}$$

và khoảng cách nhỏ nhất là

$$a - c \approx 384\,400 - 21\,108 = 363\,292 \text{ (km)}.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A – Trắc nghiệm

7.38. C	7.39. A	7.40. B	7.41. C	7.42. D
7.43. C	7.44. D	7.45. B	7.46. A	7.47. A
7.48. D	7.49. A	7.50. D	7.51. C	7.52. B

B – Tự luận

7.53. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $M(-3;2)$ và nhận $\vec{u}=(2;-5)$ là một vectơ chỉ phương là $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=2-5t. \end{cases}$

7.54. Phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $N(2;-1)$ và nhận $\vec{n}=(3;-1)$ là một vectơ pháp tuyến là $3x-y-7=0$.

7.55. a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;6)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB nên vectơ $\vec{u}(1;3)$ cũng là một vectơ chỉ phương của AB. Đường thẳng AB đi qua điểm $A(1;-1)$ và nhận $\vec{u}(1;3)$ là một vectơ chỉ phương có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+1t \\ y=-1+3t. \end{cases}$

b) Do AH vuông góc với BC nên $\overrightarrow{BC}(-5;-1)$ là một vectơ pháp tuyến của đường cao AH. Đường cao AH đi qua điểm $A(1;-1)$ nhận $\vec{n}(5;1)$ là một vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là $5x+y-4=0$.

c) Đường thẳng BC nhận vectơ $\overrightarrow{BC}(-5;-1)$ là một vectơ chỉ phương nên BC nhận $\vec{n'}(1;-5)$ là một vectơ pháp tuyến. Do đó phương trình đường thẳng BC là $x-5y+22=0$. Khoảng cách từ điểm $A(1;-1)$ đến đường thẳng BC là

$$d(A,BC)=\frac{|1-5\cdot(-1)+22|}{\sqrt{26}}=\frac{14\sqrt{26}}{13}.$$

d) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và AC. $\overrightarrow{AB}=(2;6),\overrightarrow{AC}=(-3;5)$. Khi đó

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\left|2\cdot(-3)+6\cdot 5\right|}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{34}} = \frac{6}{\sqrt{85}}.$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{7}{\sqrt{85}}.$$

7.56. a) Đường tròn tâm A đi qua B có bán kính $R = AB = \sqrt{17}$. Vậy phương trình đường tròn tâm A đi qua B là $(x+1)^2 + y^2 = 17$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB. Do đó $\vec{n}(1;-4)$ là một vectơ pháp tuyến của AB.

Phương trình đường thẳng AB là $x - 4y + 1 = 0$.

c) Đường tròn tâm O và tiếp xúc với đường thẳng AB có bán kính là $R = d(O,AB) = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Vậy phương trình đường tròn tâm O tiếp xúc với AB là $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{17}$.

7.57. a) Ta có $I(2;-3), R = \sqrt{2^2 + (-3)^2 - (-12)} = 5$.

b) Thay toạ độ điểm M vào phương trình của đường tròn (C) ta có $5^2 + 1^2 - 4\cdot 5 + 6\cdot 1 - 12 = 0$ nên điểm M thuộc đường tròn (C).

Tiếp tuyến của (C) tại điểm M là đường thẳng đi qua M và vuông góc với IM nên có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM} = (3;4)$. Vậy phương trình của tiếp tuyến đó là $3x + 4y - 19 = 0$.

7.58. a) $y^2 = 10x$ là phương trình chính tắc của parabol.

Ta có $y^2 = 10x = 2px \Rightarrow p = 5$.

Parabol trên có tiêu điểm là $F\left(\dfrac{5}{2};0\right)$, phương trình đường chuẩn là $x + \dfrac{5}{2} = 0$.

b) $x^2 - y^2 = 1$ là phương trình chính tắc của hypebol với $a = b = 1$ nên $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.

Tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{2};0)$, $F_2(\sqrt{2};0)$, tiêu cự là $F_1F_2 = 2\sqrt{2}$.

c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ là phương trình chính tắc của elip với $a=5, b=4$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$.

Tiêu điểm là $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$, tiêu cự $F_1F_2=6$.

7.59. Elip $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có $a=5, b=3, c=4$ nên hai tiêu điểm là $F_1(-4;0)$, $F_2(4,0)$.

Do *M* nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông nên *M* nằm trên đường tròn *(C)* đường kính F_1F_2.

Phương trình đường tròn *(C)* là $x^2+y^2=16$. Khi đó toạ độ của *M* là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases}$. Giải hệ trên ta được bốn điểm *M* thoả mãn là $M\left(\pm\frac{5\sqrt{7}}{4};\pm\frac{9}{4}\right)$.

7.60. Phương trình chính tắc của *(P)* có dạng $y^2=2px$. Do *(P)* đi qua điểm $A(2;4)$ nên ta có $4^2=2p\cdot 2 \Leftrightarrow p=4$. Vậy phương trình chính tắc của *(P)* là $y^2=8x$ với tiêu điểm $F(2;0)$.

Cách 1. Ta có $MF=d(M,\Delta)=x_M+2=5 \Rightarrow x_M=3$. Thay vào phương trình parabol ta có: ${y_M}^2=24 \Rightarrow y_M=\pm 2\sqrt{6}$. Vậy có hai điểm *M* thoả mãn là $M\left(3;\pm 2\sqrt{6}\right)$.

Cách 2. Do điểm *M* thuộc *(P)* nên toạ độ của điểm *M* có dạng $M\left(\frac{t^2}{8};t\right)$.

Từ giả thiết $MF=5$ ta suy ra $\left(\frac{t^2}{8}-2\right)^2+t^2=25$. Giải phương trình ta được $t=\pm 2\sqrt{6}$. Vậy có hai điểm *M* thoả mãn là $M\left(3;\pm 2\sqrt{6}\right)$.

7.61. Mặt cắt của phòng thì thầm là một nửa elip có $a=40, b=24$ nên $c=\sqrt{40^2-24^2}=32$. Vậy nếu hai người nói chuyện với nhau trong phòng thì sẽ cách trung tâm phòng là 32 feet = 9,7536 m.

BÀI 23. QUY TẮC ĐẾM

8.1. Để có một combo, khách hàng cần chọn bánh mì và chọn nước ngọt. Có 5 cách chọn bánh mì và 4 cách chọn nước ngọt. Theo quy tắc nhân, số các loại combo khác nhau là: $5 \cdot 4 = 20$.

8.2. Một khán giả có thể vào phòng chiếu phim bằng một cửa đi vào bất kì, do đó có 4 cách đi vào phòng chiếu phim. Sau khi vào phòng, khán giả có thể đi ra khỏi phòng bằng một cửa đi ra bất kì, như vậy, khán giả có 2 cách đi ra. Vì thế, theo quy tắc nhân, số cách mà một khán giả đi vào phòng rồi sau đó ra về là:

$$4 \cdot 2 = 8 \text{ (cách)}.$$

8.3. Để chọn mẫu áo, câu lạc bộ cần thực hiện việc lựa chọn các mục: kiểu áo, chất liệu, hoạ tiết và màu áo. Có 2 cách chọn kiểu áo, 4 cách chọn chất liệu áo, 5 cách chọn hoạ tiết và 7 cách chọn màu áo. Vì thế, theo quy tắc nhân, số cách chọn mẫu áo là:

$$2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 280 \text{ (cách)}.$$

8.4. Mỗi số thuê bao đầu số 081 của nhà mạng đó có dạng $\overline{081abcdefg}$, trong đó mỗi kí hiệu a, b, c, d, e, f, g có thể là bất kì 1 trong các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Như vậy, theo quy tắc nhân thì số các thuê bao có đầu số 081 là:

$$10^7 = 10\,000\,000 \text{ (số)} = 10 \text{ (triệu số)}.$$

Tương tự, số các thuê bao của mỗi đầu số 082, 083, 084, 085, 088, 091 và 094 cũng là 10 triệu.

Như vậy, theo quy tắc cộng thì kho số thuê bao của nhà mạng có tất cả

$$10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 80 \text{ (triệu số)}.$$

Do đó, nếu không có thêm các đầu số mới và không thu hồi các thuê bao đã cấp thì nhà mạng đó còn có thể cấp cho

$$80 - 35 = 45 \text{ (triệu thuê bao)}.$$

BÀI 24. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

8.5. Số cách xếp như vậy chính là số các hoán vị của 6, nghĩa là bằng

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ (cách)}.$$

8.6. Số cách trao giải bằng số cách lấy ra 3 người từ 12 thí sinh và xếp có thứ tự giữa họ, do đó chính là:

$$A_{12}^3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1\,320 \text{ (cách)}.$$

8.7. Số cách chọn ra 3 người từ 6 người bạn là:

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ (cách)}.$$

Vậy, Minh có tất cả 20 cách mời 3 bạn đi xem bóng đá cùng mình.

8.8. a) Để có một cách sơn, ông An cần chọn ra một bộ 4 màu sơn khác nhau, có sắp thứ tự (tương ứng với màu sơn của tầng 1, tầng 2, tầng 3 và tầng 4). Do có 10 màu sơn nên số cách sơn là:

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040 \text{ (cách)}.$$

b) Để có một cách sơn nhà, ông An cần chọn ra 4 màu khác nhau từ 10 màu xanh rồi với mỗi bộ 4 màu đã chọn ra, ông An sắp thứ tự từ đậm nhất đến nhạt nhất để sơn các tầng từ thấp lên cao theo mong muốn. Nói cách khác, với mỗi bộ 4 màu khác nhau, ông An có một cách sơn. Ngược lại, rõ ràng mỗi cách sơn phải dùng 4 màu khác nhau. Như vậy, số cách sơn bằng số cách chọn ra 4 màu sơn từ 10 màu sơn, nghĩa là có:

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ (cách)}.$$

8.9. a) Số cách ngồi của nhóm hành khách chính là số cách chọn ra 5 chiếc ghế có xếp thứ tự từ 10 chiếc ghế trống, nghĩa là:

$$A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240 \text{ (cách)}.$$

b) Việc xếp chỗ cho nhóm khách có thể được thực hiện theo 2 công đoạn:

– Công đoạn 1: xếp chỗ cho những hành khách nữ;

– Công đoạn 2: xếp chỗ cho những hành khách nam.

Với công đoạn 1, ta cần xếp chỗ cho 3 hành khách nữ vào 3 trong 5 chiếc ghế cạnh cửa sổ. Số cách xếp là:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ (cách)}.$$

Đối với công đoạn 2, ta cần xếp chỗ cho 2 hành khác nam vào 2 trong bất kì $10 - 3 = 7$ chiếc ghế còn lại. Số cách xếp là:

$$A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42 \text{ (cách)}.$$

Như vậy, theo quy tắc nhân thì số cách xếp chỗ là:

$$60 \cdot 42 = 2\,520 \text{ (cách)}.$$

8.10. Để chọn trang phục biểu diễn, các anh hề có thể thực hiện 4 công đoạn, gồm:

– Công đoạn 1: chọn mũ;

– Công đoạn 2: chọn tóc giả;

– Công đoạn 3: chọn mũi giả;

– Công đoạn 4: chọn quần áo.

Có 3 anh hề và 10 chiếc mũ nên số cách chọn mũ để đội cho 3 anh hề là:

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ (cách)}.$$

Tương tự, có $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ cách chọn tóc giả, có $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ cách chọn mũi hề và có $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ cách chọn quần áo.

Như vậy, theo quy tắc nhân thì số cách chọn trang phục của 3 anh hề là:

$$720 \cdot 120 \cdot 60 \cdot 336 = 1\,741\,824\,000 \text{ (cách)}.$$

8.11. Các số từ 1 đến 999 999 có thể được viết một cách duy nhất dưới dạng $\overline{abcdef}$, trong đó mỗi kí hiệu *a, b, c, d, e, f* nhận một trong các giá trị 0; 1; 2; ...; 9. Chẳng hạn số $\overline{001234}$ được hiểu là số 1234.

Để tạo thành một số $\overline{abcdef}$ thoả mãn yêu cầu ta có thể tiến hành qua hai công đoạn:

– Công đoạn 1: chọn ra 2 kí hiệu trong số *a, b, c, d, e, f* để thay bằng các chữ số 1; 2;

– Công đoạn 2: thay 4 kí hiệu còn lại, mỗi kí hiệu bằng một chữ số bất kì trong số tám chữ số còn lại 0; 3; 4; …; 9.

Có $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$ cách chọn ra 2 kí hiệu từ 6 kí hiệu để thay chúng tương ứng bằng 1; 2.

Mỗi kí hiệu còn lại có thể được thay bằng 8 cách khác nhau. Do đó có tổng cộng

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4\,096 \text{ (cách)}.$$

Theo quy tắc nhân, số các số từ 1 đến 999 999 cần tìm là:

$$30 \cdot 4\,096 = 122\,880 \text{ (số)}.$$

8.12. a) Từ KHIÊNG có 6 chữ cái khác nhau. Do đó, số cách sắp xếp 6 chữ cái khác nhau theo yêu cầu là:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ (cách)}.$$

b) Từ "KHIÊNG" có 4 phụ âm là K, H, N và G. Việc sắp xếp 6 chữ cái thoả mãn yêu cầu có thể được thực hiện qua hai công đoạn:

– Công đoạn 1: chọn 2 trong số 4 phụ âm để xếp vào hai vị trí đầu tiên;

– Công đoạn 2: xếp $6 - 2 = 4$ chữ cái còn lại vào 4 vị trí tiếp theo.

Số các cách chọn ra 2 trong 4 phụ âm để xếp vào hai vị trí đầu tiên là:

$$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (cách)}.$$

Số các cách xếp 4 chữ cái còn lại vào 4 vị trí tiếp theo là:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ (cách)}.$$

Theo quy tắc nhân, số cách sắp xếp cần tìm là:

$$12 \cdot 24 = 288 \text{ (cách)}.$$

c) Có 4 phụ âm trong từ KHIÊNG và ta yêu cầu chúng phải đứng liên tiếp nhau, do đó có ba phương án cho vị trí của các phụ âm:

– Phương án 1: vị trí các phụ âm (từ trái qua phải) là 1, 2, 3, 4;

– Phương án 2: vị trí các phụ âm (từ trái qua phải) là 2, 3, 4, 5;

– Phương án 3: vị trí các phụ âm (từ trái qua phải) là 3, 4, 5, 6.

Đối với phương án 1, việc xếp các chữ cái được thực hiện qua hai công đoạn:

– Công đoạn 1: xếp 4 phụ âm vào các vị trí 1, 2, 3, 4;

– Công đoạn 2: xếp 2 nguyên âm vào 2 vị trí còn lại.

Số các cách xếp 4 phụ âm vào 4 vị trí là:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ (cách)}.$$

Số các cách xếp 2 nguyên âm vào 2 vị trí còn lại là:

$$2! = 2 \cdot 1 = 2 \text{ (cách)}.$$

Vậy, theo quy tắc nhân thì số cách xếp theo phương án 1 là:

$$24 \cdot 2 = 48 \text{ (cách)}.$$

Tương tự, mỗi phương án 2 và 3 có 48 cách sắp xếp. Vì thế, theo quy tắc cộng thì số cách xếp thoả mãn là:

$$48 + 48 + 48 = 144 \text{ (cách)}.$$

BÀI 25. NHỊ THỨC NEWTON

8.13.

a) $(x-2)^4 = x^4 + 4x^3 \cdot (-2) + 6x^2 \cdot (-2)^2 + 4x \cdot (-2)^3 + (-2)^4$
$= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16.$

b) $(x+2)^5 = x^5 + 5x^4 \cdot 2 + 10x^3 \cdot 2^2 + 10x^2 \cdot 2^3 + 5x \cdot 2^4 + 2^5$
$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32.$

c) $(2x+3y)^4 = (2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 \cdot 3y + 6 \cdot (2x)^2 \cdot (3y)^2 + 4 \cdot 2x \cdot (3y)^3 + (3y)^4$
$= 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4.$

d) $(2x-y)^5 = (2x)^5 + 5 \cdot (2x)^4 \cdot (-y) + 10 \cdot (2x)^3 \cdot (-y)^2 +$
$+ 10 \cdot (2x)^2 \cdot (-y)^3 + 5 \cdot 2x \cdot (-y)^4 + (-y)^5$
$= 32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5.$

8.14. Áp dụng công thức khai triển của $(a+b)^5$ với $a = 5x, b = -2$, ta có

$(5x-2)^5 = (5x)^5 + 5 \cdot (5x)^4 \cdot (-2) + 10 \cdot (5x)^3 \cdot (-2)^2 +$
$+ 10 \cdot (5x)^2 \cdot (-2)^3 + 5 \cdot 5x \cdot (-2)^4 + (-2)^5$
$= -32 + 400x - 2\,000x^2 + 5\,000x^3 - 6\,250x^4 + 3\,125x^5.$

Vậy, số hạng thứ hai trong khai triển theo số mũ tăng dần của x là $400x$.

8.15. Ta có:

$1{,}03^4 = (1+0{,}03)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot 0{,}03 + 6 \cdot 1^2 \cdot (0{,}03)^2 + \ldots$
$= 1 + 0{,}12 + 0{,}0054 + \ldots \approx 1{,}1254.$

Mặt khác, ta tính được giá trị đúng, chẳng hạn bằng máy tính,

$$1{,}03^4 = 1{,}12550881.$$

Như vậy, sai số tuyệt đối của của giá trị gần đúng nhận được so với giá trị đúng là:

$$|1{,}1254 - 1{,}12550881| = 0{,}00010881.$$

8.16. Ta có:

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{2}{x}\right)^4 &= x^4 + 4x^3\cdot\frac{2}{x} + 6x^2\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 4x\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^4\\ &= x^4 + 8x^2 + 24 + \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}.\end{aligned}$$

Vậy, hạng tử không chứa x là 24.

8.17. Trước hết, ta sử dụng công thức khai triển của $(a+b)^4$ với $a = z^2+1$ và $b = \frac{1}{z}$, sau đó, ta sử dụng các công thức khai triển của $(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$ với $a = z^2, b = 1$ để có:

$$\begin{aligned}(z^2+1+\frac{1}{z})^4 &= (z^2+1)^4 + 4(z^2+1)^3\frac{1}{z} + 6(z^2+1)^2\frac{1}{z^2} + 4(z^2+1)\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}\\ &= (z^8+4z^6+6z^4+4z^2+1) + 4(z^6+3z^4+3z^2+1)\frac{1}{z}\\ &\quad + 6(z^4+2z^2+1)\frac{1}{z^2} + 4(z^2+1)\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}\\ &= z^8+4z^6+4z^5+6z^4+12z^3+10z^2+12z+13+\frac{8}{z}+\frac{6}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{1}{z^4}.\end{aligned}$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A – Trắc nghiệm

8.18. Phân tích: Từ Hà Nội tới Hải Phòng, một hành khác có 5 cách chọn nhà xe. Để quay lại Hà Nội bằng một nhà xe khác thì hành khách có $5-1=4$ cách chọn. Như vậy, theo quy tắc nhân thì số cách đi là $5\cdot 4=20$ (cách).

Chọn D.

8.19. Phân tích: Một số có ba chữ số như vậy có dạng $\overline{abc}$, với *a, b, c* khác nhau, được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 và c chỉ nhận một trong các giá trị 2; 4; 6; 8. Ta có thể xây dựng một số như vậy bằng cách trước hết chọn c, sau đó chọn ra hai chữ số có sắp thứ tự a,b từ các chữ số còn lại. Có 4 cách chọn c. Sau đó, có $A_8^2=8\cdot 7=56$ cách chọn a,b. Vì thế, theo quy tắc nhân, số các số có tính chất của bài toán là:

$$4\cdot 56=224 \text{ (số)}.$$

Chọn A.

8.20. Phân tích: Một số tự nhiên nằm trong khoảng từ 3 000 đến 4 000 và chia hết cho 5 và có các chữ số được tạo thành từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 phải có chữ số hàng đơn vị là 5 và chữ số hàng nghìn là 3. Như vậy các số thoả mãn yêu cầu của bài toán có dạng $\overline{3ab5}$, trong đó a,b là 2 chữ số khác nhau chọn trong các chữ số 1; 2; 4; 6. Số các bộ hai số khác nhau, có sắp thứ tự, lấy ra từ 4 số đó là A_4^2.

Chọn B.

8.21. Phân tích: Mỗi tam giác cần đếm có 3 đỉnh là các điểm được đánh dấu. Đảo lại, mỗi bộ ba điểm được đánh dấu xác định một tam giác. Như vậy, số các tam giác với các điểm được đánh dấu bằng C_n^3.

Tương tự, số các tứ giác với các điểm được đánh dấu bằng C_n^4. Suy ra $C_n^3=C_n^4$, nghĩa là $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$. Điều này dẫn đến $n-3=4$, hay $n=7$.

Chọn C.

8.22. Phân tích: Mỗi thành viên của hội đồng có 3 cách bầu khác nhau. Số thành viên của hội đồng là 5. Như vậy, theo quy tắc nhân thì số cách bầu là $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$.

Chọn C.

8.23. Phân tích: Kí hiệu thứ tự các bài báo cáo là 1, 2, 3, 4, 5. Có 4 phương án xếp báo cáo của đại diện của lớp 10B ngay sau báo cáo đại diện của 10A là:

– Phương án 1: 10A báo cáo 1, 10B báo cáo 2;

– Phương án 2: 10A báo cáo 2, 10B báo cáo 3;

– Phương án 3: 10A báo cáo 3, 10B báo cáo 4;

– Phương án 4: 10A báo cáo 4, 10B báo cáo 5.

Đối với mỗi phương án, ban tổ chức có thể xếp đại diện của các lớp 10C, 10D và 10E theo thứ tự bất kì vào vị trí các báo cáo còn lại. Do đó, với mỗi phương án thì số cách xếp là:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ (cách).}$$

Như vậy, theo quy tắc cộng thì số cách xếp chương trình là:

$$6 + 6 + 6 + 6 = 24 \text{ (cách).}$$

Chọn A.

8.24. Phân tích: Do chỉ có 4 đại biểu nữ nên có 2 phương án:

– Phương án 1: uỷ ban gồm 3 nữ và 3 nam;

– Phương án 2: uỷ ban gồm 4 nữ và 2 nam.

Đối với phướng án 1: số cách chọn ra 3 người từ 4 đại biểu nữ là:

$$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \text{ (cách).}$$

Số cách chọn ra 3 người từ 6 đại biểu nam là:

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ (cách).}$$

Như vậy, theo quy tắc nhân thì số cách chọn theo phương án 1 là:

$$4 \cdot 20 = 80 \text{ (cách).}$$

Đối với phương án 2: chỉ có duy nhất 1 cách chọn ra 4 người từ 4 đại biểu nữ (nghĩa là cả 4 đại biểu nữ sẽ nằm trong uỷ ban cần lập). Ngoài ra, số cách chọn ra 2 người từ 6 đại biểu nam là:

$$C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ (cách)}.$$

Do đó, có đúng 15 cách chọn theo phương án 2.

Từ đó, theo quy tắc cộng thì số các cách thành lập uỷ ban là:

$$80 + 15 = 95 \text{ (cách)}.$$

Chọn D.

8.25. Phân tích: Trước hết, xét mỗi cặp vợ chồng như là một khối. Số cách xếp 3 khối vào 3 vị trí là $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Bây giờ, với mỗi cách xếp như vậy, mỗi cặp vợ chồng (của một khối) có thể đổi chỗ cho nhau để có một cách xếp mới. Như vậy, tổng số cách xếp chỗ cho 6 người với yêu cầu của bài toán là:

$$6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48 \text{ (cách)}.$$

Chọn C.

8.26. Phân tích: Công thức khai triển của $(1+x)^4$ là:

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Do đó, tổng các hệ số của các đơn thức bằng

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16.$$

Chọn D.

8.27. Phân tích: Áp dụng công thức khai triển của $(a+b)^5$, lần lượt cho $a = \sqrt{5}$ và $b = 1$, rồi cho $a = \sqrt{5}$ và $b = -1$, ta có

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{5}+1)^5 - (\sqrt{5}-1)^5 \\
&= \left((\sqrt{5})^5 + 5(\sqrt{5})^4 + 10(\sqrt{5})^3 + 10(\sqrt{5})^2 + 5\sqrt{5} + 1\right) \\
&- \left((\sqrt{5})^5 - 5(\sqrt{5})^4 + 10(\sqrt{5})^3 - 10(\sqrt{5})^2 + 5\sqrt{5} - 1\right) \\
&= 10(\sqrt{5})^4 + 20(\sqrt{5})^2 + 2 \\
&= 10 \cdot 25 + 20 \cdot 5 + 2 \\
&= 352.
\end{aligned}$$

Chọn B.

B – Tự luận

8.28. Có tất cả $5+3=8$ bạn học sinh. Việc xếp 8 bạn học sinh thoả mãn yêu cầu bài toán có thể được thực hiện qua hai công đoạn:

– Công đoạn 1: chọn ra 2 bạn trong số 5 bạn nam để xếp vào hai vị trí ngoài cùng bên trái và ngoài cùng bên phải;

– Công đoạn 2: xếp $8-2=6$ bạn còn lại vào các vị trí giữa hai bạn nam đã xếp.

Đối với công đoạn 1, số cách chọn ra hai người và xếp vào hai vị trí là:

$$A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (cách)}.$$

Đối với công đoạn 2, số cách xếp 6 người vào 6 vị trí còn lại là:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ (cách)}.$$

Theo quy tắc nhân, tổng số cách xếp là:

$$20 \cdot 720 = 14\ 400 \text{ (cách)}.$$

8.29. Ta cần phải xếp chỗ cho các thí sinh nam vào 2 hàng và các thí sinh nữ vào 2 hàng, hơn nữa giới tính của các hàng là xen kẽ nhau. Như vậy, nếu đánh số các hàng từ trên xuống là 1, 2, 3 và 4 thì người ta có 2 phương án:

– Phương án 1: xếp các thí sinh nam vào các hàng 1 và 3 còn các học thí sinh nữ vào các hàng 2 và 4;

– Phương án 2: xếp các thí sinh nam vào các hàng 2 và 4 còn các thí sinh nữ vào các hàng 1 và 3.

Đối với phương án 1, người ta có thể tiến hành qua 2 công đoạn:

– Công đoạn 1: xếp 10 thí sinh nam vào 10 chỗ ngồi thuộc các hàng 1 và 3;

– Công đoạn 2: xếp 10 thí sinh nữ vào 10 chỗ ngồi thuộc các hàng 2 và 4.

Với công đoạn 1, người ta có thể xếp 10 thí sinh nam vào 10 chỗ theo một thứ tự bất kì. Số cách xếp là:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdots 1 = 3\ 628\ 800 \text{ (cách)}.$$

Tương tự, với công đoạn 2, người ta có thể xếp 10 thí sinh nữ vào 10 chỗ theo một thứ tự bất kì và số cách xếp là:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdots 1 = 3\ 628\ 800 \text{ (cách)}.$$

Suy ra, theo quy tắc nhân, số cách xếp theo phương án 1 là:

$$P_{10} \cdot P_{10} = 10! \cdot 10! = 3\ 628\ 800 \cdot 3\ 628\ 800 = 13\ 168\ 189\ 440\ 000 \text{ (cách)}.$$

Tương tự, số cách sắp xếp theo phương án 2 cũng là:

$$P_{10} \cdot P_{10} = 10! \cdot 10! = 3\ 628\ 800 \cdot 3\ 628\ 800 = 13\ 168\ 189\ 440\ 000 \text{ (cách)}.$$

Như vậy, theo quy tắc cộng thì số các cách xếp là:

$$2 \cdot P_{10} \cdot P_{10} = 2 \cdot 10! \cdot 10! = 2 \cdot 13\ 168\ 189\ 440\ 000 = 26\ 336\ 378\ 880\ 000 \text{ (cách)}.$$

8.30. Lưu ý rằng 5 con vật lớn nhất phải được nhốt vào các chuồng phù hợp với kích cỡ của chúng. Số chuồng như vậy là $10 - 3 = 7$. Để nhốt các con vật thì vị giám đốc có thể tiến hành qua 2 công đoạn như sau:

– Công đoạn 1: nhốt 5 con vật lớn nhất vào 5 trong 7 cái chuồng phù hợp với chúng;

– Công đoạn 2: nhốt 5 con vật còn lại vào 5 cái chuồng còn lại.

Số cách thực hiện công đoạn 1 bằng số cách lấy ra 5 phần tử có thứ tự từ một tập hợp có 7 phần tử, nghĩa là bằng

$$A_7^5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2\ 520 \text{ (cách)}.$$

Số cách thực hiện công đoạn 2 bằng số các hoán vị của 5 phần tử, nghĩa là bằng

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ (cách)}.$$

Như vậy, theo quy tắc nhân thì số cách nhốt là:

$$2\ 520 \cdot 120 = 302\ 400 \text{ (cách)}.$$

8.31. a) Để tiện hình dung, ta đánh số các chiếc ghế từ trái qua phải 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1	2	3	4	5	6

Để các bạn nam, nữ ngồi xen kẽ thì có hai phương án:

– Phương án 1: các bạn nữ ngồi các ghế 1, 3 và 5, các bạn nam ngồi các ghế 2, 4 và 6;

– Phương án 2: các bạn nữ ngồi các ghế 2, 4 và 6, các bạn nam ngồi các ghế 1, 3 và 5;

Ta hãy đếm số cách ngồi theo từng phương án. Với mỗi phương án, mỗi cách ngồi có được thực hiện qua 2 công đoạn:

– Công đoạn 1: xếp chỗ cho các bạn nữ;

– Công đoạn 2: xếp chỗ cho các bạn nam.

Số cách xếp chỗ cho 3 bạn nữ vào 3 chỗ ngồi chính là số hoán vị của 3, nghĩa là:

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ (cách).}$$

Tương tự, số cách xếp chỗ cho 3 bạn nam vào 3 chỗ ngồi là:

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ (cách).}$$

Vì vậy, theo quy tắc nhân, số cách xếp chỗ ngồi của mỗi phương án là:

$$6 \cdot 6 = 36 \text{ (cách).}$$

Như vậy, theo quy tắc cộng thì tổng số các cách xếp chỗ là:

$$36 + 36 = 72 \text{ (cách).}$$

b) Để xếp các bạn nữ ngồi liên tiếp nhau, ta có 4 phương án:

– Phương án 1: các bạn nữ ngồi các ghế 1, 2 và 3;

– Phương án 2: các bạn nữ ngồi các ghế 2, 3 và 4;

– Phương án 3: các bạn nữ ngồi các ghế 3, 4 và 5;

– Phương án 4: các bạn nữ ngồi các ghế 4, 5 và 6.

Với mỗi phương án, việc xếp chỗ cho nhóm bạn có thể được thực hiện qua hai công đoạn:

– Công đoạn 1: xếp chỗ cho các bạn nữ;

– Công đoạn 2: xếp chỗ cho các bạn nam.

Tương tự như a), số cách xếp chỗ cho 3 bạn nữ vào 3 chỗ ngồi và số cách xếp chỗ cho 3 bạn nam vào 3 chỗ ngồi đều bằng 6. Do đó, số cách xếp chỗ theo mỗi phương án đều là 36. Vì vậy, theo quy tắc cộng, tổng số các cách ngồi là:

$$36 + 36 + 36 + 36 = 144 \text{ (cách).}$$

8.32. Giả sử nhóm bạn gồm n người. Số các cặp song ca chính là số các cách chọn ra 2 người từ n người đó, nghĩa là bằng $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Mỗi cặp song ca hát với nhau trong đúng 2 phút nên tổng thời gian hát, tính theo phút là:

$$2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1).$$

Suy ra $n(n-1) = 30$, hay $(n+5)(n-6) = 0$. Từ đó suy ra $n = 6$.

Vậy, nhóm bạn có 6 người.

8.33. Tổng số chấm điểm trong hình là 18. Mỗi tam giác cần đếm được tạo ra bằng cách lấy ra 3 điểm không thẳng hàng. Để đếm số các tam giác ta lấy số các cách lấy ra 3 điểm từ 18 điểm trừ đi số các cách lấy ra 3 điểm thẳng hàng từ 18 điểm.

Số các cách chọn 3 điểm từ 18 điểm là:

$$C_{18}^{3}=\frac{18!}{3!\,15!}=816 \text{ (cách).}$$

Ba điểm thẳng hàng nếu chúng nằm trên cùng một cạnh. Số điểm của mỗi cạnh là 7. Do đó, số cách lấy ra 3 điểm trên mỗi cạnh là:

$$C_{7}^{3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35 \text{ (cách).}$$

Như vậy, theo quy tắc cộng thì số các cách chọn ra 3 điểm thẳng hàng từ 18 điểm là:

$$35+35+35=105 \text{ (cách).}$$

Suy ra số các tam giác cần tìm là:

$$816-105=711 \text{ (tam giác).}$$

8.34. Trong hình đã cho, mỗi hình chữ nhật được tạo thành từ giao điểm của 2 đường thẳng của họ các đường thẳng nằm ngang và 2 đường thẳng của họ các đường thẳng nằm dọc. Số cách chọn ra 2 đường thẳng từ 6 đường thẳng nằm ngang là:

$$C_{6}^{2}=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15 \text{ (cách).}$$

Tương tự, số cách chọn ra 2 đường thẳng nằm dọc cũng là $C_{6}^{2}=15$ cách. Vì vậy, theo quy tắc nhân thì số hình chữ nhật được tạo ra là:

$$15\cdot 15=225 \text{ (hình).}$$

8.35. a) Từ "NGHI" có 4 chữ cái khác nhau là "N, G, H, I". Số cách sắp xếp chúng theo yêu cầu bằng số các hoán vị của 4 chữ cái, nghĩa là $P_4=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ (từ).

b) Từ "NGHIÊN" có 6 chữ cái, trong đó có 2 chữ cái giống nhau là "N, N". Việc xếp các chữ cái "N, G, H, I, Ê, N" của từ "NGHIÊN" theo yêu cầu giống như việc bỏ các chữ cái "N,G, H, I, Ê, N" vào 6 hộp, mỗi hộp có 1 chữ cái:

Việc bỏ các chữ cái "N, G, H, I, Ê, N" vào 6 chiếc hộp có thể thực hiện qua 2 công đoạn.

– Công đoạn 1: chọn 2 chiếc hộp trong 6 chiếc hộp rồi bỏ 2 chữ cái N, N vào 2 chiếc hộp đó;

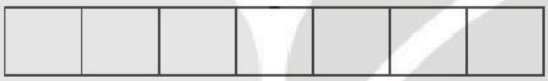
– Công đoạn 2: bỏ các chữ cái G, H, I, Ê vào 4 chiếc hộp còn lại;

Số cách thực hiện công đoạn 1 bằng số các cách chọn 2 hộp từ 6 hộp, do đó bằng C_6^2. Số cách thực hiện công đoạn 2 bằng số các hoán vị của 4 chữ cái, do đó bằng P_4. Như vậy, theo quy tắc nhân thì số dãy kí tự được tạo thành là:

$$C_6^2 \cdot P_4 = 15 \cdot 24 = 360 \text{ (từ)}.$$

c) Tương tự như b). Từ "NGHIÊNG" có 7 chữ cái, "N, G, H, I, Ê, N, G", trong đó có các chữ cái giống nhau là "N, N" và "G, G".

Việc xếp các chữ cái "N, G, H, I, Ê, N, G" của từ "NGHIÊNG" thành một dãy kí tự có 7 chữ cái giống như việc bỏ các chữ cái "N,G, H, I, Ê, N, G" vào 7 hộp (có thứ tự).



Việc bỏ các chữ cái "N, G, H, I, Ê, N, G" vào 7 cái hộp có thể thực hiện qua 2 công đoạn.

– Công đoạn 1: chọn 2 cái hộp trong 7 cái hộp rồi bỏ các chữ cái N, N vào 2 chiếc hộp đó;

– Công đoạn 2: chọn 2 cái hộp trong 5 cái hộp còn lại rồi bỏ các chữ cái G, G vào 2 chiếc hộp đó;

– Công đoạn 3: bỏ các chữ cái G, I, Ê vào 3 chiếc hộp còn lại.

Số cách thực hiện công đoạn 1 bằng số cách chọn 2 hộp từ 7 hộp, nghĩa là bằng C_7^2. Số cách thực hiện công đoạn 2 bằng số cách chọn 2 hộp từ 5 hộp, nghĩa là bằng C_5^2. Số cách thực hiện công đoạn 3 bằng số các hoán vị của 3, nghĩa là bằng P_3. Như vậy, theo quy tắc nhân thì số dãy kí tự được tạo thành là:

$$C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot P_3 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 21 \cdot 10 \cdot 6 = 1\,260 \text{ (từ)}.$$

8.36. Áp dụng công thức khai triển của $(a+b)^5$ lần lượt với $a=\sqrt{3}$ và $b=\sqrt{2}$, rồi $a=\sqrt{3}$ và $b=-\sqrt{2}$, ta có

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^5 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^5$

$$= \left((\sqrt{3})^5 + 5(\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{2} + 10(\sqrt{3})^3 \cdot (\sqrt{2})^2 + 10(\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{2})^3 + 5\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^5\right)$$
$$-\left((\sqrt{3})^5 - 5(\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{2} + 10(\sqrt{3})^3 \cdot (\sqrt{2})^2 - 10(\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{2})^3 + 5\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^5\right)$$
$$= 10(\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{2} + 20(\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{2})^3 + 2(\sqrt{2})^5$$
$$= 10 \cdot 9 \cdot \sqrt{2} + 20 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + 2 \cdot 4\sqrt{2}$$
$$= 218\sqrt{2}.$$

8.37. Áp dụng công thức khai triển của $(a+b)^5$ cho $a = x^2, b = \dfrac{r}{x}$ ta được:

$$\left(x^2 + \frac{r}{x}\right)^5$$
$$= (x^2)^5 + 5(x^2)^4 \cdot \frac{r}{x} + 10(x^2)^3 \cdot \left(\frac{r}{x}\right)^2 + 10(x^2)^2 \cdot \left(\frac{r}{x}\right)^3 + 5x^2 \cdot \left(\frac{r}{x}\right)^4 + \left(\frac{r}{x}\right)^5$$
$$= x^{10} + 5rx^7 + 10r^2x^4 + 10r^3x + \frac{5r^4}{x^2} + \frac{r^5}{x^5}.$$

Do vậy, $10r^3 = 640$, hay $r^3 = 64$, suy ra $r = 4$.

CHƯƠNG IX – TÍNH XÁC SUẤT THEO ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN

BÀI 26. BIẾN CỐ VÀ ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

9.1. a) Không gian mẫu $\Omega = \{(a, b), 1 \leq a, b \leq 6\}$, trong đó a, b tương ứng là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất và thứ hai.

b) A = {(2, 6); (3, 5); (3, 6); (4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)}.

$\overline{A}$ = {(1, 1), (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (5, 1); (5, 2); (6, 1)}.

9.2. a) Ω = {(1, A); (2, A); (3, A); (4, A); (5, A); (6, A); (1, B); (2, B); (3, B); (4, B), (5, B); (6, B); (1, C); (2, C); (3, C); (4, C); (5, C); (6, C); (1, D); (2, D); (3, *D*); (4, *D*); (5, *D*); (6, *D*)}.

b) E = {(6, A); (6, B); (6, C); (6, D)}.

$\overline{E}$ = {(1, A); (2, A); (3, A); (4, A); (5, A); (1, B); (2, B); (3, B); (4, B); (5, B); (1, C); (2, C); (3, C); (4, C); (5, C); (1, D); (2, D); (3, D); (4, D); (5, D)}.

F = {(5, A); (5, B); (5, C); (5, D); (1, A); (2, A); (3, A); (4, A); (6, A)}.

$\overline{F}$ = {(1, B); (2, B); (3, B); (4, B); (6, B); (1, C); (2, C); (3, C); (4, C); (6, C); (1, D); (2, D); (3, D); (4, D); (6, D)}.

9.3. a) Ω = {(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5)}.

b) A = {(1,1); (2, 2); (3, 3); (4, 4)}.

$\overline{A}$ = {(1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 1); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 1); (3, 2); (3, 4); (3, 5); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 5)}.

B = {(1, 3); (3, 1); (2, 4); (4, 2); (3, 5)}.

$\overline{B}$ = {(1, 1); (1, 2); (1, 4); (1, 5); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 5); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 3); (4, 4); (4, 5)}.

C = {(1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 4); (2, 5); (3, 1); (3, 5); (4, 1); (4, 2)}.

$\overline{C}$ = {(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 3); (4, 4); (4, 5)}.

9.4. $\Omega = \{(N, 1); (N, 2); (N, 3); (N, 4); (N, 5); (N, 6); (S, 1); (S, 2); (S, 3); (S, 4); (S, 5); (S, 6)\}$, $n(\Omega) = 12$.

$A = \{(S, 1); (S, 2); (S, 3); (S, 4); (S, 5); (S, 6); (N, 5)\}$, $n(A) = 7$.

Vậy $P(A) = \dfrac{7}{12} \approx 0{,}583$.

9.5. $\Omega = \{(a; b), 1 \le a \le 12, 1 \le b \le 6\}$, $n(\Omega) = 12 \cdot 6 = 72$.

a) $A = \{(5; 5)\}$, $n(A) = 1$, $P(A) = \dfrac{1}{72}$.

b) $B = \{(1, 5); (2, 4); (3, 3); (4, 2); (5, 1)\}$, $n(B) = 5$, $P(B) = \dfrac{5}{72}$.

9.6. $\Omega = \{(a, b, c), 1 \le a \le 5; 1 \le b \le 6; 1 \le c \le 7\}$, $n(\Omega) = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

$A = \{(2, 6, 7); (3, 6, 6); (3, 5, 7); (4, 6, 5); (4, 5, 6); (4, 4, 7); (5, 3, 7); (5, 4, 6); (5, 5, 5); (5, 6, 4)\}$, $n(A) = 10$.

Từ đó $P(A) = \dfrac{10}{210} = \dfrac{1}{21}$.

BÀI 27. THỰC HÀNH TÍNH XÁC SUẤT THEO ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN

9.7. Ta có $2x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - 2x$.

Sau một tiếng, trong quán có $50 - (y - 6) + 2x - 5 = 51 + 2x - y$ người, trong đó có $2x - 5 + y$ là nữ. Vậy ta có

$$\frac{2x - 5 + y}{51 + 2x - y} = \frac{9}{13} \Leftrightarrow 8x + 22y = 524 \Leftrightarrow 4x + 11y = 262.$$

Suy ra $4x + 11(50 - 2x) = 262 \Leftrightarrow 18x = 288 \Leftrightarrow x = 16 \Rightarrow y = 18$.

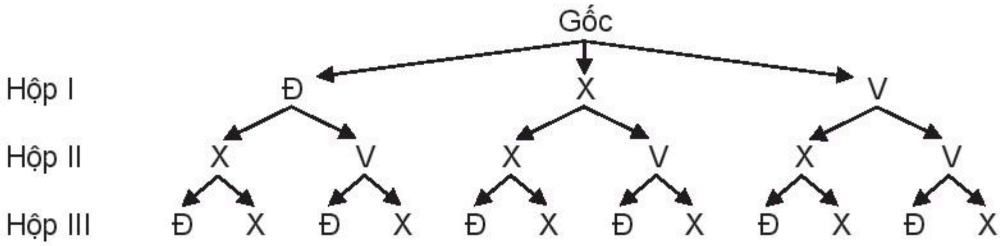
9.8. $n(\Omega) = C_{40}^{2} = 780$. Gọi A là biến cố đang xét.

Lớp có $40 - 16 = 24$ nữ, trong đó có $24 - 2 = 22$ em không thuận tay trái.

Trong lớp có 3 em nam thuận tay trái. Do đó $n(A) = 22 \cdot 3 = 66$.

Vậy $P(A) = \dfrac{66}{780} = \dfrac{11}{130}$.

9.9. a) Kí hiệu Đ, X, V tương ứng là viên bi màu đỏ, xanh, vàng.



Ω = {ĐXĐ; ĐXX; ĐVĐ; ĐVX; XXĐ; XXX; XVĐ; XVX; VXĐ; VXX; VVĐ; VVX}.

$n(\Omega) = 12$.

b) Gọi A là biến cố đang xét. Biến cố đối của A là $\overline{A}$: "Trong ba viên bi không có viên bi màu đỏ".

$\overline{A}$ = {XXX; XVX; VXX; VVX}, $n(\overline{A}) = 4$. Vậy $P(\overline{A}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Do đó $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

9.10. $\Omega = \{(a, b, c)\}$, trong đó $a \in \{1; 2; 3\}$, $b \in \{2; 4; 6; 8\}$, $c \in \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$,

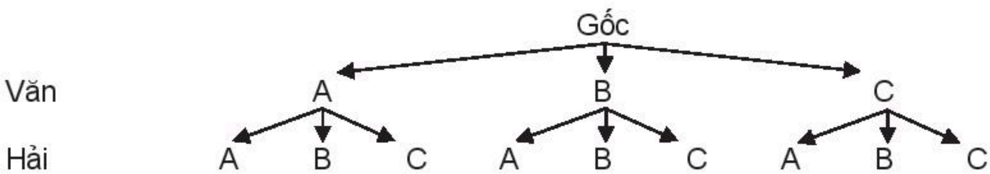
$n(\Omega) = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$.

$A = \{(a, b, c), a + b + c \text{ lẻ}\}$.

Vậy $A = \{(2, b, c)\}$, trong đó $b \in \{2; 4; 6; 8\}$, $c \in \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$, $n(A) = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$.

Vậy $P(A) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$.

9.11. a) Sơ đồ hình cây:

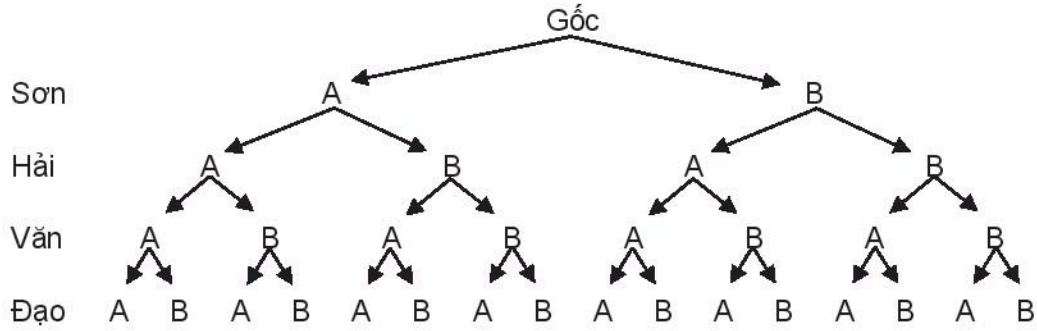


b) Ω = {AA; AB; AC; BA; BB; BC; CA; CB; CC}.

E = {AA; BB; CC}. Vậy $P(E) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

F = {AA; AB; BA; BB}. Vậy $P(F) = \frac{4}{9}$.

9.12.



b) Ω = {AAAA; AAAB; AABA; AABB; ABAA; ABAB; ABBA; ABBB; BAAA; BAAB; BABA; BABB; BBAA; BBAB; BBBA; BBBB}.

$n(\Omega) = 16$.

• E: "Tất cả đều vào một quán". E = {AAAA; BBBB}, $n(E) = 2$, $P(E) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

F: "Mỗi quán có đúng hai bạn vào". F = {AABB; ABAB; ABBA; BAAB; BABA; BBAA}, $n(F) = 6$, $P(F) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

• G: " Quán A có ba bạn vào, quán B có một bạn vào".

G = {AAAB; AABA; ABAA; BAAA}, $n(G) = 4$, $P(G) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

• K: "Một quán có ba bạn vào, quán kia có một bạn vào", $P(K) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A – Trắc nghiệm

9.13a. A	9.13b. B	9.13c. B	9.13d. D	9.14. A
9.15a. C	9.15b. B	9.16. A	9.17a. B	9.17b. D
9.18. D	9.19. A	9.20. C	9.21. D	9.22. A
9.23a. C	9.23b. B	9.23c. D		

B – Tự luận

9.24. $\Omega = \{(a, b, c)\}$ với a, b, c là các số tự nhiên phân biệt và $1 \leq a, b, c \leq 6$, $n(\Omega) = 6^3 = 216$.

Gọi A là biến cố: "Tổng số chấm xuất hiện trên ba con xúc xắc bằng 7".

$A = \{(a, b, c): a + b + c = 7\}$.

(1, 1, 5) có 3 hoán vị; (1, 2, 4) có 6 hoán vị; (1, 3, 3) có 3 hoán vị; (2, 2, 3) có 3 hoán vị.

Vậy $n(A) = 3 + 6 + 3 + 3 = 15$. Do đó $P(A) = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$.

9.25. Kí hiệu A là kem xoài, B là kem sô cô la và C là kem sữa.

Ω = {AAA; BBB; CCC; ABC; ABB; ACC; BCC; BAA; CAA; CBB}, $n(\Omega) = 10$.

Gọi E là biến cố: "Ba cốc kem chọn thuộc hai loại", E = {ABB; ACC; BCC; BAA; CAA; CBB}. $n(E) = 6$. Vậy $P(E) = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

9.26. $n(\Omega) = 6! = 720$. Gọi E là biến cố: "Hai thầy trò ngồi cạnh nhau".

Công đoạn 1: Xếp hai thầy trò ngồi cạnh nhau: (1, 2); (2, 1); (2, 3); (3, 2); (3, 4); (4, 3); (4, 5); (5, 4); (5, 6); (6, 5). Có 10 cách xếp.

Công đoạn 2: Xếp 4 đại biểu còn lại. Có 4! = 24 cách xếp.

Theo quy tắc nhân, ta có $10 \cdot 24 = 240$ cách xếp hai thầy trò ngồi cạnh nhau.

Vậy $n(E) = 240$. Từ đó $P(E) = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}$.

9.27. Mỗi cách xếp chỗ ngồi quanh bàn tròn là một phần tử của không gian mẫu.

Giả sử 6 chiếc ghế quanh bàn tròn được đánh số là 1, 2, ..., 6 và x_i kí hiệu là người ngồi ở ghế mang số i. Khi đó mỗi cách xếp 6 người này $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ cho ta một hoán vị của tập hợp 6 người. Có tất cả 6! cách xếp chỗ ngồi cho họ.

Vì ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn nên 6 cách xếp sau đây được xem là giống nhau. Mặc dù số ghế họ ngồi có thay đổi nhưng vị trí tương đối giữa 6 người đó là không thay đổi.

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$; $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$; $(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)$;

$(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$; $(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)$; $(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Vậy chỉ có $\frac{6!}{6} = 5! = 120$ cách xếp. Do đó $n(\Omega) = 120$.

b) Gọi E là biến cố: "Hai ông bà An ngồi cạnh nhau". Ta hãy tính xem có bao nhiêu cách xếp trong đó hai ông bà An ngồi cạnh nhau. Ta coi hai ông bà An ngồi chung một ghế. Như vậy có $(5 - 1)! = 4! = 24$ cách xếp. Vì hai ông bà An có thể đổi chỗ cho nhau nên có $24 \cdot 2 = 48$ cách xếp để hai ông bà An ngồi cạnh nhau.

Vậy $n(E) = 48$. Từ đó $P(E) = \dfrac{48}{120} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

9.28. $n(\Omega) = C_{12}^{6} = 924$. Gọi E là biến cố: "Chọn được 3 quả trắng, 2 quả đỏ và 1 quả đen.

Chọn 3 quả cầu trắng từ 6 quả cầu trắng, có $C_6^3 = 20$ cách chọn;

Chọn 2 quả cầu đỏ từ 4 quả cầu đỏ, có $C_4^2 = 6$ cách chọn;

Chọn 1 quả cầu đen từ 2 quả cầu đen, có 2 cách chọn.

Vậy $n(E) = 20 \cdot 6 \cdot 2 = 240$. Do đó $P(E) = \dfrac{240}{924} = \dfrac{20}{77}$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. a) + Mệnh đề $P \Rightarrow Q$: Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì nó có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Mệnh đề này đúng.

+ Mệnh đề $Q \Rightarrow P$: Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì nó có hai nghiệm phân biệt. Mệnh đề này đúng.

+ Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$: Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi nó có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Mệnh đề này đúng.

+ Mệnh đề $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$: Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ không có hai nghiệm phân biệt thì nó có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$. Mệnh đề này đúng.

b) + Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt là điều kiện đủ để nó có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

+ Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ là điều kiện cần để nó có hai nghiệm phân biệt.

c) Các phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hệ số a và c trái dấu thì luôn có hai nghiệm trái dấu. Vì thế $Y \subset X$.

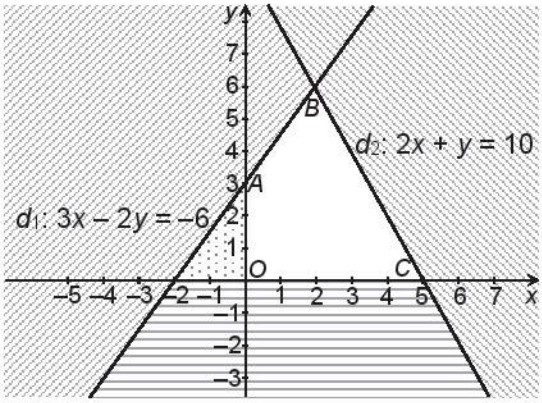
2. a) Bước 1: Trục Oy có phương trình $x = 0$ và điểm (1; 0) thoả mãn 1 > 0. Do đó miền nghiệm của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm (1; 0) (miền không bị gạch).

Bước 2: Trục Ox có phương trình $y = 0$ và điểm (0; 1) thoả mãn 1 > 0. Do đó miền nghiệm của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox chứa điểm (0; 1) (miền không bị gạch).

Bước 3: Vẽ đường thẳng d_1: $3x - 2y = -6$. Lấy điểm $O(0; 0)$ không thuộc d_1 và thay $x = 0$, $y = 0$ vào biểu thức $3x - 2y$ ta được: $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 > -6$. Do đó miền nghiệm của bất phương trình $3x - 2y \geq -6$ là nửa mặt phẳng bờ d_1 chứa điểm $O(0; 0)$ (miền không bị gạch).

Bước 4: Vẽ đường thẳng d_2: $2x + y = 10$ và điểm $O(0; 0)$ thoả mãn $2 \cdot 0 + 0 = 0 < 10$. Do đó miền nghiệm của bất phương trình $2x + y \leq 10$ là nửa mặt phẳng bờ d_2 chứa điểm $O(0; 0)$ (miền không bị gạch).

Vậy miền nghiệm D của hệ là miền tứ giác $OABC$ (miền không bị gạch), trong đó $A(0; 3)$, $B(2; 6)$, $C(5; 0)$, như hình vẽ sau:



b) Ta có $F(0;0)=2\cdot 0+3\cdot 0=0$; $F(0;3)=2\cdot 0+3\cdot 3=9$;

$F(2;6)=2\cdot 2+3\cdot 6=22$; $F(5;0)=2\cdot 5+3\cdot 0=10$.

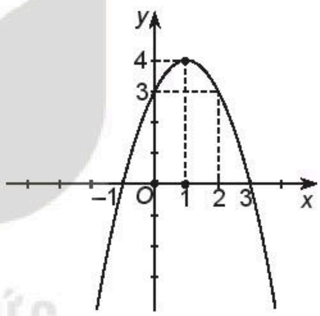
Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x,y)=2x+3y$ trên miền D lần lượt là 22 và 0.

3. a) Parabol có đỉnh là $I(1;\ 4)$ nên có phương trình dạng $y=a(x-1)^2+4$.

Vì điểm A(2; 3) thuộc parabol nên ta có

$3=a(2-1)^2+4=a+4\Rightarrow a=-1.$

Vậy tam thức bậc hai cần tìm là $f(x)=-x^2+2x+3$.
Từ đó $a=-1$; $b=2$; $c=3$.



b) Ta có a = –1 < 0 nên parabol quay bề lõm xuống dưới. Đỉnh I(1; 4). Trục đối xứng x = 1. Giao điểm của parabol với trục Oy là (0; 3). Điểm đối xứng với điểm (0; 3) qua trục đối xứng x = 1 là (2; 3). Giao điểm của parabol với trục Ox là (–1; 0) và (3; 0).

c) Hàm số đồng biến trên khoảng (–∞; 1), hàm số nghịch biến trên khoảng (1 ; +∞).

Tập giá trị của hàm số là $(-\infty;4]$.

d) Xét bất phương trình $\dfrac{f(x)}{x-2}\geq 0$, hay $\dfrac{-x^2+2x+3}{x-2}\geq 0$.

$f(x)=-x^2+2x+3$ có $\Delta'=4>0$ và a = –1 < 0, $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1 = –1 và x_2 = 3. Do đó $f(x)$ > 0 với mọi x ∈ (–1; 3) và $f(x)$ < 0 với mọi $x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	+	|	+	0	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	+	|	+	
$\dfrac{f(x)}{x-2}$		+	0	$-$	||	+	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; -1] \cup (2; 3]$.

4. a) Phương trình chuyển động của quả bóng chày là:

$$y = \frac{-9,8}{2.35^2.\cos^2 45^\circ}x^2 + x\tan 45^\circ + 1 = \frac{-1}{125}x^2 + x + 1.$$

b) Quả bóng chày đạt độ cao lớn nhất tức là hàm số $y = \frac{-1}{125}x^2 + x + 1$ đạt giá trị lớn nhất. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = 62,5$, khi đó $y(62,5) = 32,25$.

Vậy độ cao cực đại của quả bóng chày là 32,25 m.

c) Xét $y = \frac{-1}{125}x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \approx 126$ hoặc $x \approx -1$ (loại). Vậy tầm xa của quả bóng chày là khoảng 126 m.

d) Quả bóng chày không bị bay qua hàng rào khi độ cao của quả bóng chày nhỏ hơn độ cao của hàng rào là 4.

Xét $y < 4 \Leftrightarrow \frac{-1}{125}x^2 + x + 1 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 125x + 375 > 0 \Leftrightarrow x < 3$ hoặc $x > 122$.

Vậy quả bóng chày không bị bay qua hàng rào khi được đánh đi ở vị trí cách hàng rào 125 m.

5. a) Công thức biểu diễn doanh thu R là:

$$R(x) = (21\,000 - 150x)x = -150x^2 + 21\,000x \text{ (nghìn đồng).}$$

Miền xác định của hàm số $R(x)$ là $D = [0; 140]$.

b) $R(x)$ đạt cực đại tại $x = -\frac{b}{2a} = 70$, khi đó $R(70) = 735\,000$.

Vậy công ty bán với giá 70 nghìn đồng mỗi chiếc thì doanh thu đạt cực đại là 735 triệu đồng. Số áo phông bán được trong trường hợp đó là:

$$n = 21\,000 - 150 \cdot 70 = 10\,500 \text{ (chiếc)}.$$

c) Đổi: 675 triệu đồng = 675 000 nghìn đồng.

Xét bất phương trình $-150x^2 + 21\,000x \geq 675\,000$

$$\Leftrightarrow -150x^2 + 21\,000x - 675\,000 \geq 0 \Leftrightarrow 50 \leq x \leq 90.$$

Vậy với giá bán từ 50 nghìn đồng đến 90 nghìn đồng mỗi chiếc thì công ty sẽ đạt được ít nhất 675 triệu đồng doanh thu.

6. a) Giả sử $y = at^2 + bt + c\,(a \neq 0)$ là hàm số mô tả số lượng điện thoại di động bán được qua từng năm, trong đó *t* là số năm tính từ năm 2010. Do giả thiết (0; 19) là đỉnh của đồ thị hàm số nên $b = 0$ và $c = 19$. Điểm (9; 100) thuộc đồ thị hàm số nên ta có $100 = a \cdot 9^2 + 19 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy hàm số cần tìm là: $y = t^2 + 19$.

b) Năm 2024 tương ứng với $t = 14$.

Do đó, số lượng điện thoại di động bán được trong năm 2024 là:

$$y = 14^2 + 19 = 215 \text{ (nghìn chiếc)}.$$

c) Xét bất phương trình $t^2 + 19 > 300$.

Bất phương trình đó tương đương với $t^2 - 281 > 0$.

Nghiệm của phương trình $t^2 - 281 = 0$ là $t \approx -16{,}8$; $t \approx 16{,}8$.

Vậy từ năm 2027 trở đi (đến năm 2030) thì số điện thoại di động bán được vượt 300 nghìn chiếc.

7. Hàm số đã cho có tập xác định là toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 + 2mx - 2m + 3 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $f(x) = x^2 + 2mx - 2m + 3$ có $\Delta' = m^2 - (-2m + 3) = m^2 + 2m - 3$ và $a = 1 > 0$.

Ta có $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$.

Vậy $-3 \leq m \leq 1$.

8. a) $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 - x}$.

Bình phương cả hai vế ta được phương trình: $3x^2 - 4x + 1 = x^2 - x$.

Sau khi thu gọn, ta được $2x^2 - 3x + 1 = 0$, do đó $x = 1$ hoặc $x = \frac{1}{2}$.

Thử lại ta thấy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) $\sqrt{6x^2 - 11x - 3} = 2x - 1$.

Bình phương cả hai vế ta được phương trình: $6x^2 - 11x - 3 = (2x - 1)^2$.

Sau khi thu gọn ta được $2x^2 - 7x - 4 = 0$, do đó $x = 4$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

Thử lại ta thấy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4$.

9. Trường hợp 1: Có đúng 1 học sinh khối lớp 10.

Số cách chọn 1 học sinh khối lớp 10 là: C_5^1 cách.

Số cách chọn 9 học sinh còn lại ở hai khối lớp 11 và 12 là: C_{10}^9 cách.

Trường hợp 2: Có đúng 2 học sinh khối lớp 10.

Số cách chọn 2 học sinh khối lớp 10 là: C_5^2 cách.

Số cách chọn 8 học sinh còn lại ở hai khối lớp 11 và 12 là: C_{10}^8 cách.

Vậy số cách lập đội văn nghệ thoả mãn đề bài là:

$C_5^1 \cdot C_{10}^9 + C_5^2 \cdot C_{10}^8 = 500$ (cách).

10. Ta có $A_n^2 + 2C_n^1 = 30 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} + 2.\frac{n!}{1!(n-1)!} = 30 \Leftrightarrow n(n-1) + 2n - 30 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 30 = 0 \Leftrightarrow n = 5$ (thoả mãn) hoặc $n = -6$ (loại).

Vậy $n = 5$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}(3x-2)^5 &= C_5^0(3x)^5 + C_5^1(3x)^4 \cdot (-2) + C_5^2(3x)^3 \cdot (-2)^2 \\ &\quad + C_5^3(3x)^2 \cdot (-2)^3 + C_5^4(3x)^1 \cdot (-2)^4 + C_5^5 \cdot (-2)^5 \\ &= 243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32.\end{aligned}$$

11. a) Ta có $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+3+2}{2} = \frac{9}{2}$. Suy ra

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$=\sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}-4\right)\cdot\left(\frac{9}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{9}{2}-2\right)}=\frac{3\sqrt{15}}{4}.$

b) Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Ta có

$S=\frac{abc}{4R}\Rightarrow R=\frac{abc}{4S}=\frac{4\cdot3\cdot2}{4\cdot\frac{3\sqrt{15}}{4}}=\frac{8\sqrt{15}}{15}.$

12. a) Ta có $OA=\sqrt{3^2+4^2}=5; OB=\sqrt{8^2+6^2}=10.$

b) Theo tính chất của đường phân giác ta có $\frac{AD}{BD}=\frac{OA}{OB}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$

Suy ra $2AD=BD$. Mặt khác do D thuộc đoạn AB nên hai vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ ngược hướng. Do vậy $\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{AD}$. Từ đó ta được

$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=-2\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}.$

c) Gọi $D(x_0;y_0)$. Từ b) ta suy ra

$$\begin{cases}x_0=\frac{2}{3}x_A+\frac{1}{3}x_B=\frac{14}{3}\\ y_0=\frac{2}{3}y_A+\frac{1}{3}y_B=\frac{14}{3}.\end{cases}$$

Vậy $D\left(\frac{14}{3};\frac{14}{3}\right)$.

13. a) Vì P, N lần lượt là trung điểm của AB, AC nên PN song song với BC. Do đó $\overrightarrow{u_{BC}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PN}=(1;-2)$ là vectơ chỉ phương của BC. Mặt khác, đường thẳng BC đi qua điểm $M(1; 2)$ nên BC có phương trình tham số là $\begin{cases}x=1+t\\ y=2-2t.\end{cases}$

b) Gọi Δ là đường trung trực của đoạn thẳng BC. Ta có Δ đi qua trung điểm M của BC và vuông góc với BC. Do đó $\overrightarrow{n_\Delta}=\overrightarrow{u_{BC}}=(1;-2)$ là vectơ pháp tuyến của Δ. Vậy phương trình tổng quát của Δ là

$$1(x-1)-2(y-2)=0\Leftrightarrow x-2y+3=0.$$

14. a) Bán kính của (C) bằng $R = d(O,\Delta) = \dfrac{|-25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5.$

Vậy phương trình của (C) là: $x^2 + y^2 = 25.$

b) Vì Δ tiếp xúc với (C) tại tiếp điểm H nên ta có $OH \perp \Delta$. Do đó $\overrightarrow{u_{OH}} = \overrightarrow{n_\Delta} = (3;4)$. Suy ra $\overrightarrow{n_{OH}} = (4;-3)$. Phương trình của đường thẳng OH là $4x - 3y = 0$.

Ta có $H = OH \cap \Delta$, do đó toạ độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 4y - 25 = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy $H(3;\ 4)$.

15. a) Vị trí ban đầu của vật thể ứng với t = 0, suy ra vật thể ở vị trí có toạ độ là $A_1(4;0)$.

Vị trí kết thúc của vật thể ứng với t = 180, suy ra vật thể ở vị trí có toạ độ là $A_2(-4;0)$.

b) Từ đẳng thức $(\sin t^\circ)^2 + (\cos t^\circ)^2 = 1$ và toạ độ của vật thể M, ta suy ra

$\left(\dfrac{y_M}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{x_M}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_M^2}{16} + \dfrac{y_M^2}{9} = 1.$

Do đó vật thể chuyển động trên đường elip (E) có phương trình

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Khi t thay đổi trên đoạn [0; 180] thì $\sin t^\circ$ thay đổi trên đoạn [0; 1] và $\cos t^\circ$ thay đổi trên đoạn [–1; 1]. Do đó $4\cos t^\circ \in [-4;\ 4]$ và $3\sin t^\circ \in [0;\ 3]$.

Vậy quỹ đạo của vật thể (hay là tập hợp điểm M) là nửa đường elip (E) nằm trên trục hoành.

16. a) Lượng mưa trung bình cả năm của Đà Nẵng là $\overline{x} \approx 115{,}79$;

Lượng mưa trung bình cả năm của Hà Nội là $\overline{y} \approx 95{,}08$.

Vậy Đà Nẵng có lượng mưa trung bình cả năm cao hơn Hà Nội.

b) Khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu là:

Đà Nẵng: $R_1 = 290,8$; $\Delta_Q = 165,55$; $s_1 \approx 103,93$.

Hà Nội: $R_2 = 214,3$; $\Delta_Q^{'} = 145,3$; $s_2 \approx 76,07$.

Dãy số liệu về lượng mưa trung bình các tháng tại Đà Nẵng phân tán hơn so với tại Hà Nội.

17. Không gian mẫu $\Omega = \{\overline{abcd}$; $a, b, c, d \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}\}$.

Theo quy tắc nhân, ta có $n(\Omega) = 10^4$.

Gọi E là biến cố "An trúng giải nhất". Khi đó $E = \{0347\}$; $n(E)=1$. Vậy $P(E) = \dfrac{1}{10^4}$.

Gọi F là biến cố "An trúng giải nhì".

Khi đó $F = \{\overline{a347};\ \overline{0b47};\ \overline{03c7};\ \overline{034d}\ |\ a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}; b \in \{0; 1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}; c \in \{0; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}; d \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}\}$.

Ta có $n(F) = 9 + 9 + 9 + 9 = 36$. Vậy $P(F) = \dfrac{36}{10^4} = 0,0036$.

18. Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các tập con có 6 phần tử của tập $\{1; 2; ... ; 44; 45\}$.

$n(\Omega) = C_{45}^6 = 8\,145\,060$.

Gọi E là biến cố: "Bạn Bình trúng giải nhì".

E là tập hợp tất cả các tập con gồm sáu phần tử của tập $\{1; 2; 3; \ldots; 45\}$ có tính chất:

- Bốn phần tử của nó thuộc tập $\{4; 12; 20; 31; 32; 33\}$;
- Hai phần tử còn lại không thuộc tập $\{4; 12; 20; 31; 32; 33\}$.

Mỗi phần tử của E được hình thành từ hai công đoạn.

Công đoạn 1: Chọn 4 phần tử trong tập $\{4; 12; 20; 31; 32; 33\}$. Có $C_6^4 = 15$ cách chọn.

Công đoạn 2: Chọn 2 phần tử còn lại trong 39 phần tử của tập

$\{1; 2; ...; 44; 45\} \setminus \{4; 12; 20; 31; 32; 33\}$. Có $C_{39}^2 = 741$ cách chọn.

Theo quy tắc nhân, tập E có $15 \cdot 741 = 11\,115$ phần tử. Vậy $n(E) = 11\,115$. Từ đó

$$P(E) = \frac{11\,115}{8\,145\,060} \approx 0,001365.$$

*Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn
các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.*

Chịu trách nhiệm xuất bản
Chủ tịch Hội đồng thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: ĐẶNG THỊ MINH THU – HOÀNG VIỆT
Thiết kế sách: NGUYỄN NGUYỆT NGA
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Sửa bản in: PHẠM THỊ TÌNH
Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

BÀI TẬP TOÁN 10 – Tập hai

Mã số: G1BHXT002H22

In .... cuốn (QĐ .... SLK), khổ 17 × 24cm.
In tại Công ty cổ phần in ....
Số ĐKXB: 520-2022/CXBIPH/30-280/GD
Số QĐXB: .... / QĐ-GD ngày ... tháng ... năm 2022
In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm 2022.
Mã số ISBN: Tập một 978-604-0-31718-6
Tập hai 978-604-0-31719-3

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH BÀI TẬP LỚP 10 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Bài tập Ngữ văn 10, tập một
2. Bài tập Ngữ văn 10, tập hai
3. Bài tập Toán 10, tập một
4. Bài tập Toán 10, tập hai
5. Bài tập Lịch sử 10
6. Bài tập Địa lí 10
7. Bài tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10
8. Bài tập Vật lí 10
9. Bài tập Hoá học 10
10. Bài tập Sinh học 10
11. Bài tập Tin học 10
12. Bài tập Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10
13. Bài tập Giáo dục quốc phòng và an ninh 10
14. Tiếng Anh 10 – Global Success – Sách bài tập

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
- **Cửu Long:** CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

ISBN 978-604-0-31719-3

9 786040 317193

Giá: 19.000 đ