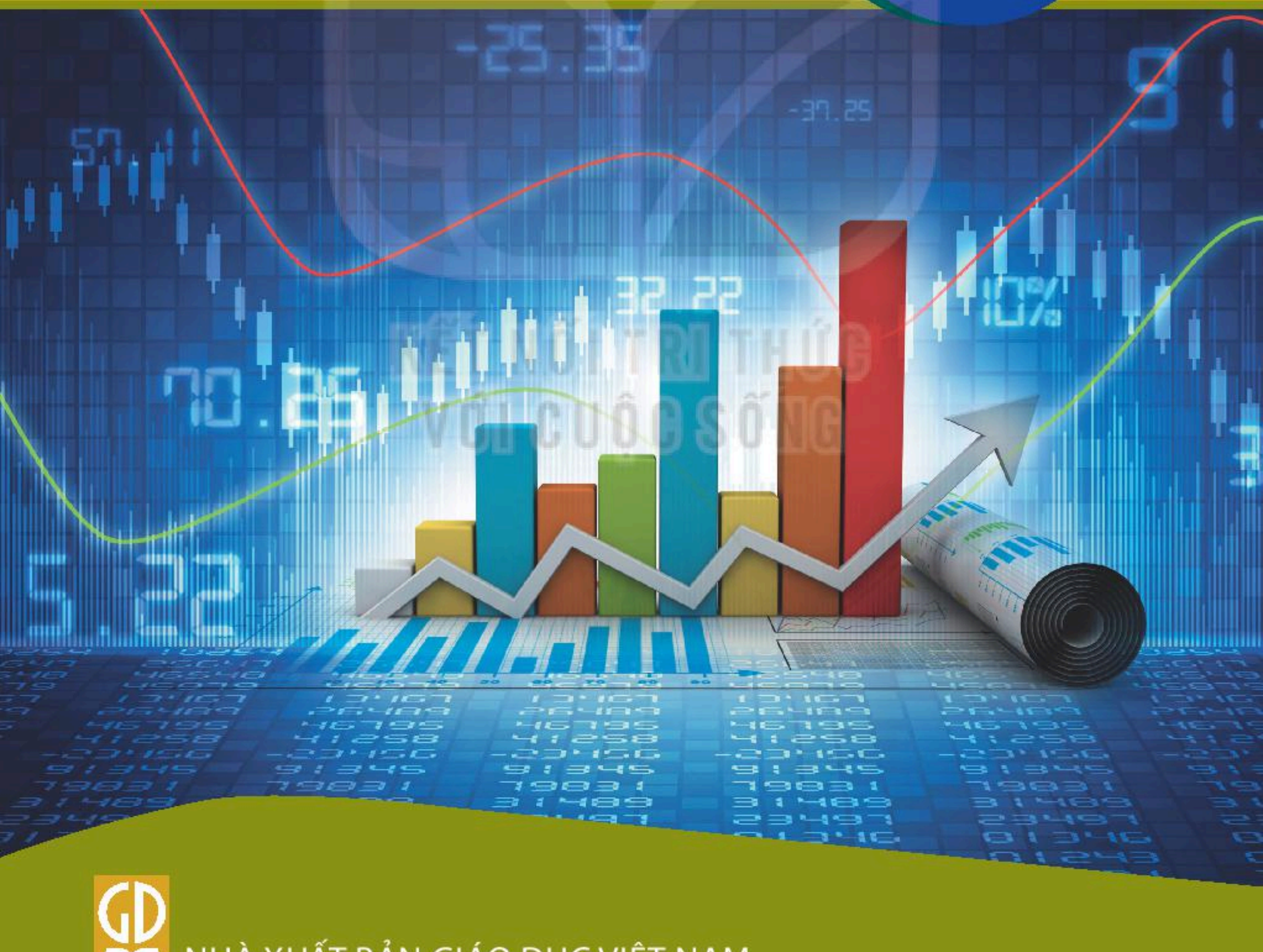
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
HẠ VŨ ANH – TRẦN MẠNH CƯỜNG
NGUYỄN THỊ KIM SƠN – DƯƠNG ANH TUẤN

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bài tập TOÁN 10

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
HẠ VŨ ANH – TRẦN MẠNH CƯỜNG – NGUYỄN THỊ KIM SƠN – DƯƠNG ANH TUẤN

Bài tập TOÁN 10

TẬP MỘT

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh yêu quý!

Sách BÀI TẬP TOÁN 10 (Kết nối tri thức với cuộc sống) gồm hai tập, là tài liệu bổ trợ cho sách giáo khoa TOÁN 10 bộ Kết nối tri thức với cuộc sống và được viết bởi cùng một đội ngũ tác giả.

BÀI TẬP TOÁN 10 được biên soạn theo đúng cấu trúc chương, bài như trong sách giáo khoa nhằm cung cấp cho các em một hệ thống bài tập phong phú, bổ trợ cho sách giáo khoa. Mỗi bài học đều có phần tóm tắt các kiến thức cần nhớ, các kĩ năng giải toán cần thiết thông qua những ví dụ minh hoạ tiêu biểu và phần đề bài tập gồm những bài tập được chọn lọc cẩn thận, theo đúng yêu cầu của Chương trình. Cuối mỗi chương có các bài tập trắc nghiệm và bài tập tự luận tổng hợp, nhằm ôn tập và hệ thống hoá kiến thức, kĩ năng của cả chương. Cuối sách là phần lời giải, hướng dẫn, đáp số cho các bài tập.

BÀI TẬP TOÁN 10 bám sát các yêu cầu cần đạt của Chương trình mới môn Toán, đồng thời bổ sung làm đa dạng thêm các loại bài tập thích hợp với mỗi nội dung trong sách giáo khoa, đặc biệt là những bài tập định hướng ứng dụng, trong thực tiễn hoặc trong các môn học liên quan, nhằm phát triển năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học. BÀI TẬP TOÁN 10 giúp các em củng cố, phát triển và nâng cao các kiến thức, kĩ năng đã học, cũng như hình thành và phát triển năng lực toán học tương ứng.

Với cấu trúc và định hướng như vậy, BÀI TẬP TOÁN 10 sẽ là một tài liệu không thể thiếu cho tất cả các em học sinh sử dụng sách giáo khoa TOÁN 10 thuộc bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống. Chắc chắn BÀI TẬP TOÁN 10 cũng rất hữu ích cho tất cả học sinh lớp 10, dù học theo bất cứ bộ sách giáo khoa nào.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam và tập thể tác giả chân thành cảm ơn giáo viên, học sinh, phụ huynh học sinh đã sử dụng cuốn sách này và mong nhận được những ý kiến góp ý để sách ngày càng hoàn thiện hơn.

Mọi góp ý xin gửi về Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 81 Trần Hưng Đạo, Hoàn Kiếm, Hà Nội.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

MỤC LỤC

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

CHƯƠNG I
MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

BÀI 1

MỆNH ĐỀ

A – Kiến thức cần nhớ

- Mệnh đề là một câu nhận giá trị đúng hoặc sai, nhưng không phải cả hai. Định lí là một mệnh đề đúng và thường có dạng $P \Rightarrow Q$, trong đó P là mệnh đề đúng.
- Mệnh đề "Nếu P thì Q" là mệnh đề kéo theo, kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

  Trong định lí có dạng $P \Rightarrow Q$, ta gọi P là giả thiết, Q là kết luận của định lí. Khi mệnh đề kéo theo đúng, thì người ta gọi P là điều kiện đủ để có Q; Q là điều kiện cần để có P.

  Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" được gọi là một mệnh đề tương đương và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.

  Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ là một mệnh đề đúng.
- Phát biểu "$\forall x \in X, P(x)$" là một mệnh đề đúng nếu với bất kì $x_0 \in X$, $P(x_0)$ đúng và sai nếu có một $x_0 \in X$, $P(x_0)$ sai.

  Phát biểu "$\exists x \in X, P(x)$" là một mệnh đề đúng nếu có ít nhất một $x_0 \in X$ để $P(x_0)$ đúng và sai nếu với $x_0 \in X$ bất kì, $P(x_0)$ sai.
- Phủ định của mệnh đề P là một mệnh đề, kí hiệu là $\overline{P}$, đúng khi P sai và sai khi P đúng.

  Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".

  Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề? Câu nào không là mệnh đề? Xác định tính đúng sai của các mệnh đề.

a) Hình vuông có hai đường chéo vuông góc với nhau.

b) Sông Hương chảy ngang qua thành phố Huế.

c) Năm 2022 không phải là năm nhuận.

d) Hôm nay trời đẹp quá!

e) $3x + 2 = 5$.

g) $4 > 6 \cdot 5$.

Giải

Những câu a, b, c, g là mệnh đề. Các câu a, b, c là những mệnh đề đúng, câu g là mệnh đề sai.

Câu d là câu cảm thán, không phải là mệnh đề. Câu e không xác định được tính đúng sai, không phải là mệnh đề (câu e là mệnh đề chứa biến).

Ví dụ 2. Cho mệnh đề *P*: "$\sqrt{2}$ là số hữu tỉ". Hãy phát biểu mệnh đề phủ định của mệnh đề *P*.

Giải

Mệnh đề *Q*: "$\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ" nhận được từ mệnh đề *P* bằng cách thêm cụm từ "không phải" trước vị ngữ. Mệnh đề *Q* là mệnh đề phủ định của mệnh đề *P*.

Vì với mỗi số thực chỉ xảy ra một trong hai trường hợp: là số hữu tỉ hoặc là số vô tỉ, không có trường hợp khác. Do vậy khi viết "$\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ" sẽ cùng nghĩa với "$\sqrt{2}$ là số vô tỉ". Vì vậy mệnh đề *R*: "$\sqrt{2}$ là số vô tỉ" cũng là mệnh đề phủ định của mệnh đề *P*.

Vậy cả hai mệnh đề *Q* và *R* đều là các mệnh đề phủ định của mệnh đề *P*.

Ví dụ 3. Cho hai mệnh đề sau:

P: "Tứ giác *ABCD* là hình thoi" và *Q*: "Tứ giác *ABCD* có hai đường chéo vuông góc".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Giải

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$: "Nếu tứ giác *ABCD* là hình thoi thì tứ giác *ABCD* có hai đường chéo vuông góc".

C – Bài tập

1.1. Xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Các số nguyên tố đều là số lẻ;

b) Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm nguyên phân biệt;

c) Mọi số nguyên lẻ đều không chia hết cho 2.

1.2. Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) 106 là hợp số;

b) Tổng số đo ba góc trong một tam giác bằng 180°.

1.3. Cho hai mệnh đề sau:

P: "Tứ giác *ABCD* là hình bình hành".

Q: "Tứ giác *ABCD* có *AB* // *CD* và *AB* = *CD*".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của mệnh đề đó.

1.4. Phát biểu dưới dạng "điều kiện cần" đối với các mệnh đề sau:

a) Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

b) Số tự nhiên có tổng các chữ số của nó chia hết cho 3 thì chia hết cho 3.

1.5. Xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo của các mệnh đề sau:

a) Nếu số tự nhiên *n* có tổng các chữ số bằng 6 thì số tự nhiên *n* chia hết cho 3.

b) Nếu $x > y$ thì $x^3 > y^3$.

1.6. Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ và xét tính đúng sai của chúng.

a) *P*: "$x^2 + y^2 = 0$"; *Q*: "$x = 0$ và $y = 0$".

b) *P*: "$x^2 > 0$"; *Q*: "$x > 0$".

1.7. Xác định tính đúng sai của mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của nó.

$$P: \text{"}\exists x \in \mathbb{R}, x^4 < x^2\text{"}.$$

1.8. Phát biểu mệnh đề phủ định của mệnh đề: "Mọi số tự nhiên có chữ số tận cùng bằng 0 đều chia hết cho 10".

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

BÀI 2

TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A – Kiến thức cần nhớ

1. Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học. Chúng ta có thể cho một tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử hoặc chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

- Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng, kí hiệu là $\varnothing$.
- Tập hợp A được gọi là tập hợp con của tập hợp B nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B. Kí hiệu là $A \subset B$.

  Tập rỗng là tập con của mọi tập hợp và tập hợp A là tập hợp con của chính nó.
- Hai tập hợp A và B được gọi là hai tập hợp bằng nhau nếu mỗi phần tử của A cũng là phần tử của B và ngược lại. Kí hiệu là $A = B$.

2. Các tập con thường dùng của $\mathbb{R}$

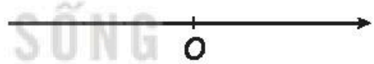
- Khoảng

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$



- Đoạn

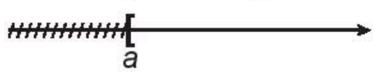
$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

- Nửa khoảng

$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$

$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$

$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$



$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

3. Các phép toán trên tập hợp bao gồm: phép hợp, phép giao và hiệu của hai tập hợp.

- Giao của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A \cap B$, là một tập hợp chứa các phần tử thuộc cả tập hợp A và tập hợp B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

- Hợp của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A \cup B$, là một tập hợp chứa các phần tử hoặc thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

- Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là hiệu của hai tập hợp A và B. Kí hiệu là $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

- Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là phần bù của B trong A, kí hiệu là $C_A B$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $6 \in \mathbb{Z}$; b) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$; c) $0,368 \in \mathbb{R}$; d) $\{3\} \in \mathbb{N}$.

Giải

a) $6 \in \mathbb{Z}$ là mệnh đề đúng.

b) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ là mệnh đề sai.

c) $0,368 \in \mathbb{R}$ là mệnh đề đúng.

d) $\{3\} \in \mathbb{N}$ là mệnh đề sai, vì kí hiệu $\{3\}$ là tập hợp chứa phần tử là 3, đây là tập con của $\mathbb{N}$, chứ không phải là một phần tử của $\mathbb{N}$ (cách viết đúng là $\{3\} \subset \mathbb{N}$).

Ví dụ 2. Cho G là tập hợp các số nguyên dương nhỏ hơn 10 là bội của 3 và H là tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 7x + 10 = 0$.

a) Hãy liệt kê các phần tử của hai tập hợp G và H.

b) Tìm $n(H)$.

c) Biểu diễn hai tập hợp G và H bằng biểu đồ Ven.

Giải

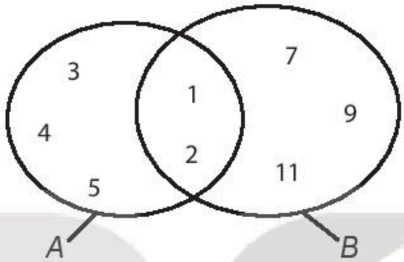
a) Vì G là tập hợp các số nguyên dương là bội của 3 và nhỏ hơn 10 nên $G = \{3; 6; 9\}$.

Phương trình $x^2 - 7x + 10 = 0$ có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = 5$. Vậy $H = \{2; 5\}$.

b) Từ câu a ta thấy tập hợp H có 2 phần tử. Vậy $n(H) = 2$.

c) Vẽ biểu đồ Ven biểu diễn hai tập hợp G và H.

Ví dụ 3. Cho hai tập hợp A, B được mô tả bởi biểu đồ Ven như sau:



a) Hãy chỉ ra các phần tử của tập hợp A.

b) Tính $n(A \cup B)$.

c) Hãy chỉ ra các phần tử thuộc tập hợp A mà không thuộc tập hợp B.

Giải

a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

b) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9; 11\}$. Từ đó suy ra $n(A \cup B) = 8$.

c) Các phần tử thuộc tập hợp A mà không thuộc tập hợp B là: 3; 4; 5.

Ví dụ 4. Biểu diễn các tập hợp sau trên trục số.

a) $A = [3; 9] \setminus [-2; 7)$;

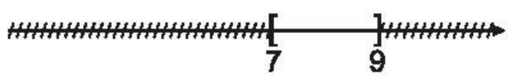
b) $B = [-1; +\infty) \cap (-4; 9]$;

c) $C = [1; 5] \cup [4; +\infty)$;

d) $D = \mathbb{R} \setminus [-1; +\infty)$.

Giải

a) $A = [3; 9] \setminus [-2; 7) = [7; 9]$.



b) $B = [-1; +\infty) \cap (-4; 9] = [-1; 9]$.

c) $C = [1; 5] \cup [4; +\infty) = [1; +\infty)$.

d) $D = \mathbb{R} \setminus [-1; +\infty) = (-\infty; -1)$.

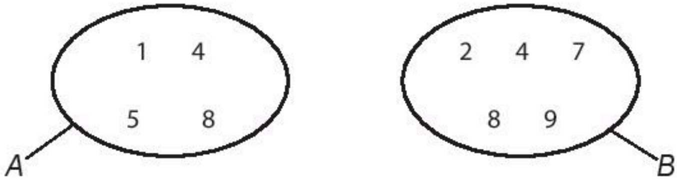
KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

C – Bài tập

1.9. Điền Đ vào ô trống nếu mệnh đề đúng, điền S vào ô trống nếu mệnh đề sai.

a) $\varnothing \subset \mathbb{N}$ $\square$; b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ $\square$; c) $\varnothing = \{0\}$ $\square$; d) $\{\varnothing\} \subset \mathbb{R}$ $\square$.

1.10. Cho hai tập hợp *A*, *B* được mô tả bởi biểu đồ Ven như sau:



a) Hãy chỉ ra các phần tử của tập hợp *A*, tập hợp *B*.

b) Tính $n(A \cup B)$.

c) Hãy chỉ ra các phần tử thuộc tập hợp *A* mà không thuộc tập hợp *B*.

d) Hãy chỉ ra các phần tử thuộc tập hợp *B* mà không thuộc tập hợp *A*.

1.11. Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

$A = \{0; 4; 8; 12; 16\}$; $B = \{-3; 9; -27; 81\}$;

C là đường thẳng trung trực của đoạn thẳng *AB*.

1.12. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x^2 - 3x - 5 = 0\}$.

1.13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng? Mệnh đề nào sai? Giải thích kết luận đưa ra.

a) Tập rỗng là tập con của mọi tập hợp;

b) Nếu $X = \{a; b\}$ thì $a \subset X$;

c) Nếu $X = \{a; b\}$ thì $\{a; b\} \subset X$.

1.14. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $(4; 7) \cap (-1; 3)$; **b)** $(-2; 1] \cap (-\infty; 1)$;

c) $(-2; 6) \setminus (3; 10)$; **d)** $(-3; 5] \setminus [2; 8)$.

1.15. Trong một cuộc phỏng vấn 56 người về những việc họ thường làm vào ngày nghỉ cuối tuần, có 24 người thích tập thể thao, 15 người thích đi câu cá và 20 người không thích cả hai hoạt động trên.

a) Có bao nhiêu người thích chơi thể thao hoặc thích câu cá?

b) Có bao nhiêu người thích cả câu cá và chơi thể thao?

c) Có bao nhiêu người chỉ thích câu cá, không thích chơi thể thao?

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A – Trắc nghiệm

1.16. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

A. $6 + x = 4x^2$.

B. $a < 2$.

C. 123 là số nguyên tố phải không?

D. Bắc Giang là tỉnh thuộc miền Nam Việt Nam.

1.17. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\varnothing = \{0\}$. B. $\varnothing \subset \{0\}$. C. $\{0\} \subset \varnothing$. D. $0 \subset \varnothing$.

1.18. Phủ định của mệnh đề "5 + 8 = 13" là mệnh đề

A. $5 + 8 < 13$. B. $5 + 8 \geq 13$.

C. $5 + 8 > 13$. D. $5 + 8 \neq 13$.

1.19. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu *a* là số tự nhiên thì *a* là số hữu tỉ không âm.

B. Nếu *a* là số hữu tỉ không âm thì *a* là số tự nhiên.

C. Nếu *a* là số hữu tỉ dương thì *a* là số tự nhiên.

D. Nếu *a* không là số tự nhiên thì *a* không phải là số hữu tỉ không âm.

1.20. Cho x là một phần tử của tập hợp X. Xét các mệnh đề sau:

(I) $x \in X$; (II) $\{x\} \in X$; (III) $x \subset X$; (IV) $\{x\} \subset X$.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

A. (I) và (II). B. (I) và (III). C. (I) và (IV). D. (II) và (IV).

1.21. Cho ba tập hợp sau:

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$; $F = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$; $H = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \cdot g(x) = 0\}$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $H = E \cap F$. B. $H = E \cup F$. C. $H = E \setminus F$. D. $H = F \setminus E$.

1.22. Cho hai tập hợp $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội của 2 và 3$\}$, $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội của 6$\}$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $Y \subset X$. B. $X \subset Y$.

C. $\exists n$: $n \in X$ và $n \notin Y$. D. $X = Y$.

1.23. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập rỗng?

A. $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 16 = 0\}$.

B. $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 5 = 0\}$.

C. $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 15 = 0\}$.

D. $Q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 3x - 4 = 0\}$.

1.24. Lớp 10A có 10 học sinh giỏi môn Toán, 15 học sinh giỏi môn Vật lí, 8 học sinh giỏi cả môn Toán và Vật lí. Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán hoặc Vật lí) của lớp 10A là

A. 17. B. 25. C. 18. D. 23.

1.25. Cho hai tập hợp $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$ và $N = \{a; -1\}$. Với giá trị nào của a thì $M = N$?

A. $a = 2$. B. $a = 4$. C. $a = 3$. D. $a = -1$ hoặc $a = 4$.

1.26. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\mathbb{N} \subset [0; +\infty)$.

B. $\{-2; 3\} \subset [-2; 3]$.

C. $[3; 7] = \{3; 4; 5; 6; 7\}$.

D. $\varnothing \subset \mathbb{Q}$.

1.27. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; -1]$ và $B = (-2; 4]$. Tìm mệnh đề **sai**.

A. $A \cap B = (-2; -1]$.

B. $A \setminus B = (-\infty; -2)$.

C. $A \cup B = (-\infty; 4]$.

D. $B \setminus A = (-1; 4]$.

1.28. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân.

B. Tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC có ba góc bằng $60°$.

C. Tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC có ba cạnh bằng nhau.

D. Tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân và có một góc $60°$.

1.29. Mệnh đề phủ định của mệnh đề: "Số 12 chia hết cho 4 và 3" là

A. Số 12 chia hết cho 4 hoặc chia hết cho 3.

B. Số 12 không chia hết cho 4 và không chia hết cho 3.

C. Số 12 không chia hết cho 4 hoặc không chia hết cho 3.

D. Số 12 không chia hết cho 4 và chia hết cho 3.

1.30. Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 15$" được phát biểu là

A. Bình phương của mỗi số thực bằng 15.

B. Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 15.

C. Chỉ có một số thực mà bình phương của nó bằng 15.

D. Nếu x là một số thực thì $x^2 = 15$.

1.31. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Với mọi số thực x, nếu $x < -2$ thì $x^2 > 4$.

B. Với mọi số thực x, nếu $x^2 < 4$ thì $x < -2$.

C. Với mọi số thực x, nếu $x < -2$ thì $x^2 < 4$.

D. Với mọi số thực x, nếu $x^2 > 4$ thì $x > -2$.

1.32. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$x^2 + 3x + 1 > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$" là

A. Tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $x^2 + 3x + 1 > 0$.

B. Tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $x^2 + 3x + 1 \leq 0$.

C. Tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $x^2 + 3x + 1 = 0$.

D. Tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $x^2 + 3x + 1 < 0$.

B – Tự luận

1.33. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Mọi số tự nhiên có tận cùng bằng 0 đều chia hết cho 10;

b) Bình phương của mọi số thực đều lớn hơn 0;

c) Tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

1.34. Cho hai tập hợp sau:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -4 \leq x \leq -1\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tập hợp A là tập rỗng;

b) Tập hợp B là tập con của $\mathbb{R}$.

1.35. Điền Đ vào ô trống nếu mệnh đề đúng, điền S vào ô trống nếu mệnh đề sai.

a) $3,274 \in \mathbb{Q}$ $\square$; b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ $\square$; c) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\square$; d) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Z}$ $\square$.

1.36. Hãy viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (2x + 1)(x^2 + x - 1)(2x^2 - 3x + 1) = 0\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 > 2 \text{ và } x < 4\}.$$

1.37. Cho hai tập hợp sau:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\};\ B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 8\}.$$

a) Viết hai tập hợp trên dưới dạng khoảng, đoạn.

b) Xác định các tập hợp sau: $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

1.38. Cho hai tập hợp $A = [a; 5]$ và $B = [-2; 3]$, với $a < 5$. Số a cần thoả mãn điều kiện gì để $A \cap B = \varnothing$?

1.39. Cho các tập hợp sau:

$A = \{x \mid x$ là số nguyên tố và $20 \leq x \leq 30\}$;

$B = \{x \mid x$ là bội của 18 và $20 \leq x \leq 30\}$;

C là tập hợp các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^3 - 52x^2 + 667x = 0$.

Hãy điền Đ vào ô trống nếu mệnh đề đúng, điền S vào ô trống nếu mệnh đề sai.

a) $25 \in A$ $\square$; b) $A \subset B$ $\square$; c) $A = C$ $\square$.

1.40. Lớp 10A có 40 học sinh, trong đó có 20 học sinh thích môn Ngữ văn, 18 học sinh thích môn Toán, 4 học sinh thích cả hai môn Ngữ văn và Toán. Hỏi có bao nhiêu học sinh không thích môn nào trong hai môn Ngữ văn và Toán?

1.41. Thống kê tại một trung tâm mua sắm gồm 46 cửa hàng, với 26 cửa hàng có bán quần áo, 16 cửa hàng có bán giày và 34 cửa hàng bán ít nhất một trong hai mặt hàng này. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cửa hàng bán cả quần áo và giày?

b) Có bao nhiêu cửa hàng chỉ bán một trong hai loại quần áo hoặc giày?

c) Có bao nhiêu cửa hàng không bán cả hai loại hàng hoá trên?

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

CHƯƠNG II

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

BÀI 3

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A – Kiến thức cần nhớ

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn *x*, *y* có dạng tổng quát là:

$$ax + by \le c \ \ (ax + by \ge c,\ ax + by < c,\ ax + by > c),$$

trong đó *a*, *b*, *c* là những số thực đã cho, *a* và *b* không đồng thời bằng 0, *x* và *y* là các ẩn số.

2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \le c$ như sau:

- Vẽ đường thẳng *d*: $ax + by = c$ trên mặt phẳng toạ độ *Oxy*.
- Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc *d*.
- Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với *c*.
- Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ *d* chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình. Ngược lại nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ *d* không chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình.

Chú ý. Trong quy tắc trên, khi $c \ne 0$ người ta thường chọn M_0 là gốc toạ độ. Khi $c = 0$, ta chọn M_0 khác gốc toạ độ (chẳng hạn điểm (1; 0) hoặc (0; 1)).

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + 2y \le 3$.

a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng toạ độ.

b) Từ đó xác định miền nghiệm của bất phương trình $x + 2y < 3$ và miền nghiệm của bất phương trình $x + 2y > 3$.

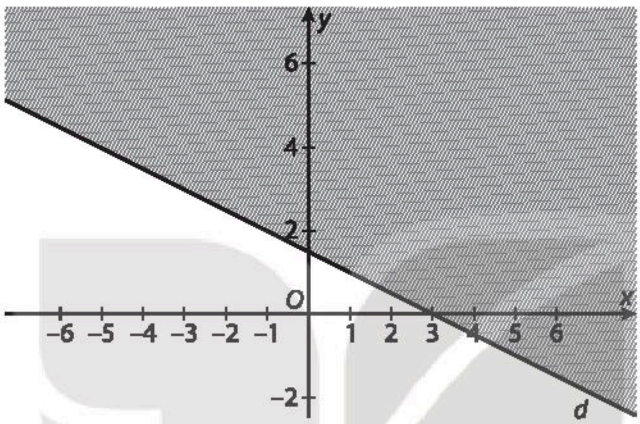
Giải (H.2.1).

a) Ta biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng d: $x + 2y = 3$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Bước 2. Trong bất phương trình này, ta thấy $c = 3 \neq 0$. Ta chọn $O(0; 0)$ là điểm không thuộc d và thay vào biểu thức $x + 2y$, ta có: $0 + 2 \cdot 0 = 0 < 3$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc toạ độ (miền không bị gạch).



Hình 2.1

b) Miền nghiệm của bất phương trình $x + 2y < 3$ chính là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc toạ độ không kể đường thẳng d.

Tương tự, miền nghiệm của bất phương trình $x + 2y > 3$ là nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc toạ độ mà bỏ đi đường thẳng d.

Ví dụ 2. Anh An là nhân viên bán hàng tại siêu thị điện máy. Anh An kiếm được một khoản hoa hồng 600 nghìn đồng cho mỗi máy giặt và 1,3 triệu đồng cho mỗi tủ lạnh mà anh ấy bán được. Hỏi để nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng thì anh An cần bán bao nhiêu máy giặt và tủ lạnh?

Giải (H.2.2).

Gọi x và y lần lượt là số máy giặt và số tủ lạnh anh An bán được. Khi đó số tiền hoa hồng mà anh An nhận được là $0{,}6x + 1{,}3y$ (triệu đồng). Theo đề bài, ta có:

$$0{,}6x + 1{,}3y \geq 10.$$

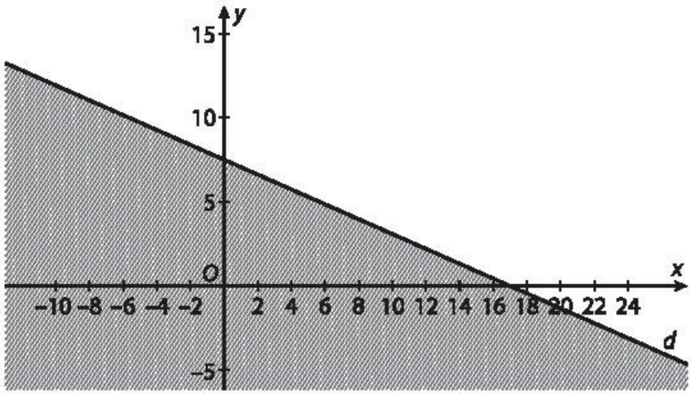
Tiếp theo ta xác định miền nghiệm của bất phương trình $0{,}6x + 1{,}3y \geq 10$ như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng d: $0{,}6x + 1{,}3y = 10$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Bước 2. Lấy điểm $O(0; 0)$ không thuộc d và thay vào biểu thức $0{,}6x + 1{,}3y$ ta được:

$$0{,}6 \cdot 0 + 1{,}3 \cdot 0 = 0 < 10.$$

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc toạ độ (miền không bị gạch).



Hình 2.2

Vậy nếu anh An bán được số máy giặt là x ($x \in \mathbb{N}$) và số tủ lạnh là y ($y \in \mathbb{N}$) sao cho điểm (x; y) nằm trong nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc toạ độ thì anh An nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng.

C – Bài tập

2.1. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $-3x + y < 4$.

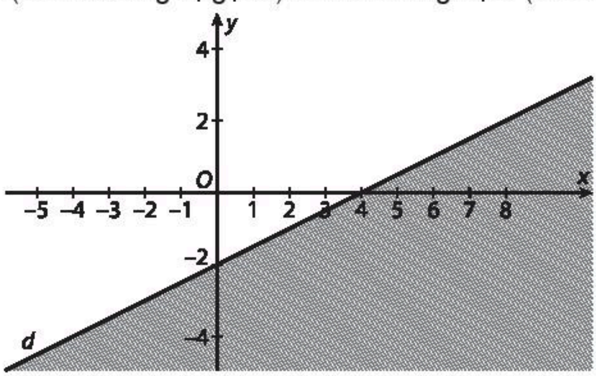
a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng toạ độ.

b) Từ đó suy ra miền nghiệm của bất phương trình $-3x + y \leq 4$ và miền nghiệm của bất phương trình $-3x + y \geq 4$.

2.2. Cho bất phương trình $2x + 3y + 3 \leq 5x + 2y + 3$.

Bằng cách chuyển vế, hãy đưa bất phương trình trên về dạng tổng quát của bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương bậc nhất hai ẩn đó trên mặt phẳng toạ độ.

2.3. Xác định một bất phương trình bậc nhất hai ẩn nhận nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d (miền không bị gạch) làm miền nghiệm (H.2.3).



Hình 2.3

2.4. Cho bất phương trình $x + 2y \geq -4$.

a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng toạ độ.

b) Miền nghiệm có chứa bao nhiêu điểm $(x; y)$ với x, y là các số nguyên âm?

2.5. Một cửa hàng bán lẻ bán hai loại hạt cà phê. Loại thứ nhất giá 140 nghìn đồng/kg và loại thứ hai giá 180 nghìn đồng/kg. Cửa hàng trộn x kg loại thứ nhất và y kg loại thứ hai sao cho hạt cà phê đã trộn có giá không quá 170 nghìn đồng/kg.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y thoả mãn điều kiện đề bài.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a trên mặt phẳng toạ độ.

BÀI 4

HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A – Kiến thức cần nhớ

1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

2. Miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

– Trong mặt phẳng toạ độ, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó. Như vậy miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

– Cách xác định miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

Bước 1. Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, ta xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.

Bước 2. Miền còn lại không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

3. Ứng dụng của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

– Giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức $F(x; y) = ax + by$, với $(x; y)$ là toạ độ các điểm thuộc miền đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$, đạt được tại một trong các đỉnh của đa giác.

– Cách tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = ax + by$ với $(x; y)$ thoả mãn một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

Bước 1. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình hai ẩn và tìm toạ độ các đỉnh.

Bước 2. Giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất (nếu có) của F sẽ đạt được tại một trong các đỉnh tìm được ở Bước 1. Do đó, ta chỉ cần tính giá trị của F tại các đỉnh để xác định giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của F.

Bước 3. So sánh các giá trị thu được của F ở Bước 2 và kết luận giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của F.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng toạ độ:

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ y - x \leq 2 \\ y > -1. \end{cases}$$

Giải (H.2.4).

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên, ta làm như sau:

Bước 1. Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x + y \leq 2$ và gạch bỏ phần còn lại.

- Vẽ đường thẳng d: $x + y = 2$ trên mặt phẳng toạ độ.
- Toạ độ của điểm $O(0; 0)$ thoả mãn $0 + 0 = 0 < 2$ nên miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x + y \leq 2$ là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc toạ độ (miền không bị gạch).

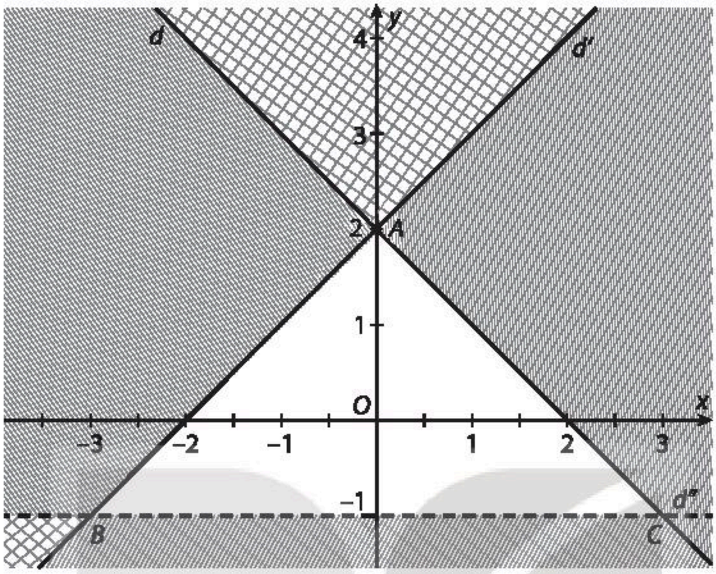
Bước 2. Xác định miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y - x \leq 2$ và gạch bỏ phần còn lại.

- Vẽ đường thẳng d': $y - x = 2$ trên mặt phẳng toạ độ.
- Toạ độ điểm $O(0; 0)$ thoả mãn $0 - 0 = 0 < 2$. Do đó, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y - x \leq 2$ là nửa mặt phẳng bờ d' chứa gốc toạ độ (miền không bị gạch).

Bước 3. Xác định miền nghiệm D_3 của bất phương trình $y > -1$ và gạch bỏ phần còn lại.

- Vẽ đường thẳng d'': $y = -1$ trên mặt phẳng toạ độ.
- Toạ độ điểm $O(0; 0)$ thoả mãn $0 > -1$. Do đó, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $y > -1$ là nửa mặt phẳng bờ d'' chứa gốc toạ độ và không kể đường thẳng d'' (miền không bị gạch).

Khi đó, miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch hay miền tam giác ABC bỏ đi cạnh BC.



Hình 2.4

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

Giải (H.2.5). *Bước 1.* Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

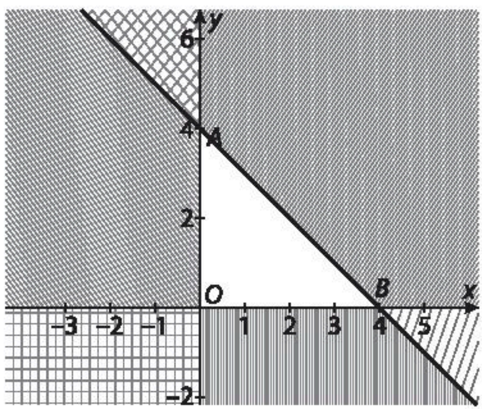
Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tam giác OAB với các đỉnh $O(0; 0)$, $A(0; 4)$, $B(4; 0)$.

Bước 2. Tính giá trị của F tại các đỉnh của tam giác:

$F(0; 0) = 0$, $F(4; 0) = 4$, $F(0; 4) = 8$.

Bước 3. So sánh các giá trị thu được của F ở Bước 2, ta được giá trị nhỏ nhất là 0 và giá trị lớn nhất là 8.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm của F là $F(0; 0) = 0$ và giá trị lớn nhất cần tìm là $F(0; 4) = 8$.



Hình 2.5

Ví dụ 3. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 280 kg chất *A* và 18 kg chất *B*. Với một tấn nguyên liệu loại *I*, người ta có thể chiết xuất được 40 kg chất *A* và 1,2 kg chất *B*. Với một tấn nguyên liệu loại *II*, người ta có thể chiết xuất được 20 kg chất *A* và 3 kg chất *B*. Giá mỗi tấn nguyên liệu loại *I* là 4 triệu đồng và loại *II* là 3 triệu đồng. Hỏi người ta phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất mà vẫn đạt được mục tiêu đề ra? Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp tối đa 10 tấn nguyên liệu loại *I* và 9 tấn nguyên liệu loại *II*.

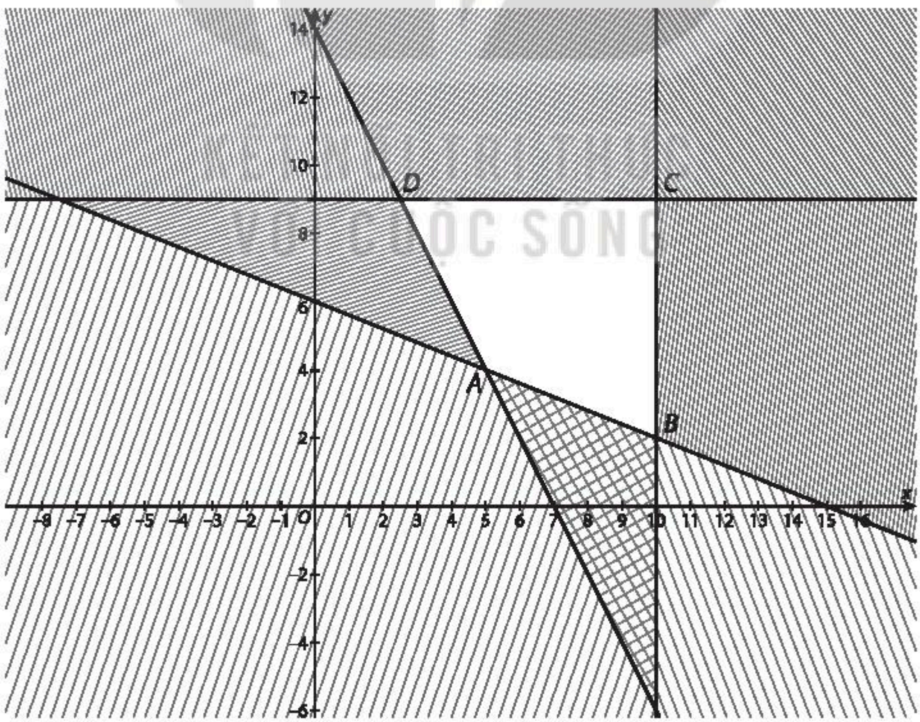
Giải. Gọi x và y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại *I* và loại *II* mà người ta cần dùng. Khi đó khối lượng chất *A* chiết xuất được là $40x + 20y$ (kg). Khối lượng chất *B* chiết xuất được là $1{,}2x + 3y$ (kg). Từ giả thiết ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 40x + 20y \ge 280 \\ 1{,}2x + 3y \ge 18 \\ x \le 10 \\ y \le 9 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2x + y \ge 14 \\ 1{,}2x + 3y \ge 18 \\ x \le 10 \\ y \le 9. \end{cases}$$

Hơn nữa, số tiền người ta phải trả để mua nguyên liệu là $F(x; y) = 4x + 3y$ (triệu đồng). Vậy bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x; y)$ với $(x; y)$ thoả mãn hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn ở trên.

Bước 1. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên.

Miền nghiệm là miền tứ giác *ABCD* với *A*(5; 4), *B*(10; 2), *C*(10; 9), *D*(2,5; 9) (H.2.6).



Hình 2.6

Bước 2. Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Ta có: $F(5; 4) = 32$, $F(10; 2) = 46$, $F(10; 9) = 67$, $F(2,5; 9) = 37$.

So sánh các giá trị này ta thấy $F(5; 4)$ là nhỏ nhất. Do đó, giá trị nhỏ nhất của $F(x; y)$ với $(x; y)$ thoả mãn hệ bất phương trình trên là $F(5; 4) = 32$.

Vậy người ta cần mua 5 tấn nguyên liệu loại *I* và 4 tấn nguyên liệu loại *II* để chi phí là nhỏ nhất.

C – Bài tập

2.6. Biểu diễn miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ:

a) $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y - 4 < 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y \leq 3 \\ x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ y \geq -2. \end{cases}$

2.7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = 2x + 3y$ với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

2.8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = 4x - 3y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \geq -4 \\ x + y \leq 5 \\ x - y \leq 5 \\ x - y \geq -4. \end{cases}$

2.9. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 12 g hương liệu, 9 lít nước và 315 g đường để pha chế hai loại nước *A* và *B*. Để pha chế 1 lít nước *A* cần 45 g đường, 1 lít nước và 0,5 g hương liệu; để pha chế 1 lít nước *B* cần 15 g đường, 1 lít nước và 2 g hương liệu. Mỗi lít nước *A* nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước *B* nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước mỗi loại để đội chơi được số điểm thưởng là lớn nhất?

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A – Trắc nghiệm

2.10. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $2x^2 + 3y > 4$. B. $xy + x < 5$.

C. $3^2x + 4^3y \geq 6$. D. $x + y^3 \leq 3$.

2.11. Trong các hệ bất phương trình sau, hệ bất phương trình nào là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $\begin{cases} 2x + 3y > 4 \\ 2^3x + 3y^2 < 1. \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + y > 4 \\ 2^3x + 3^2y < 1. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x > 3 \\ y < 2 \\ x + y \geq y^2. \end{cases}$ D. $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y < 1 \\ x + y \geq x + xy. \end{cases}$

2.12. Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x + 5y \leq 10$?

A. (5; 2). B. (–1; 4).

C. (2; 1). D. (–5; 6).

2.13. Điểm nào dưới đây **không** thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x - 3y > 13$?

A. (1; –5). B. (2; –4).

C. (3; –3). D. (8; 1).

2.14. Cho bất phương trình $x + 2y \leq 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d: $x + 2y = 3$ chứa gốc toạ độ.

B. Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d: $x + 2y = 3$ không chứa gốc toạ độ.

C. Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d: $x + 2y = -3$ chứa gốc toạ độ.

D. Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d: $x + 2y = -3$ không chứa gốc toạ độ.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

2.15. Cặp số nào dưới đây là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \le 2 \\ x - 2y \ge 4 \\ x > 0 \end{cases}$?

A. $(-1; 2)$.

B. $(-2; -4)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(2; -4)$.

2.16. Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x + y \le 2 \\ x - 2y \ge 1 \\ y \le 0 \end{cases}$?

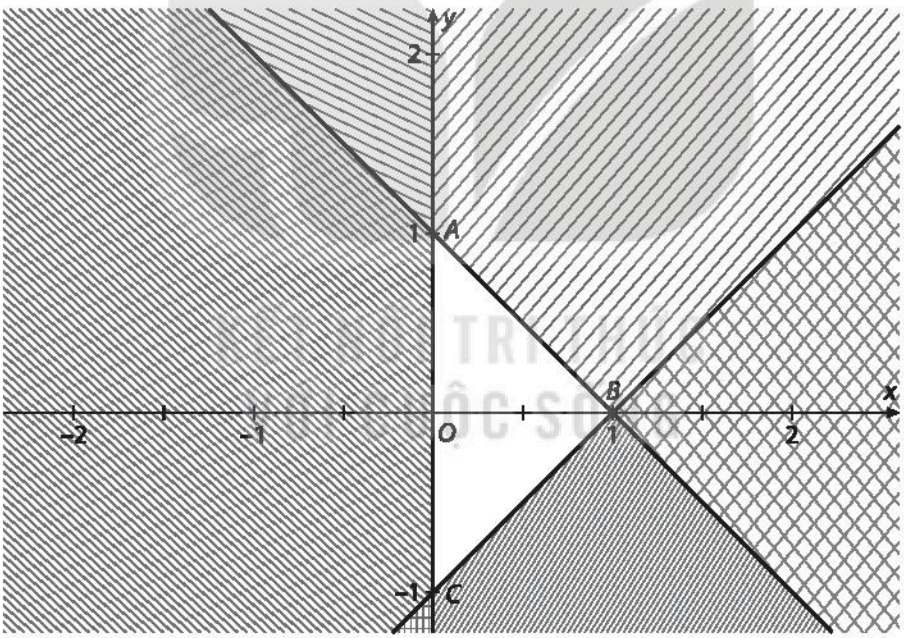
A. $(-3; 2)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(4; -1)$.

D. $(-2; 2)$.

2.17. Miền nghiệm của hệ bất phương trình nào dưới đây là miền tam giác *ABC* (miền không bị gạch)?



A. $\begin{cases} x + y \le 1 \\ x - y \ge 1 \\ x \ge 0. \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y \le 1 \\ x - y \le 1 \\ x \ge 0. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - y \ge -1 \\ x + y \ge -1 \\ x \ge 0. \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - y \ge -1 \\ x + y \ge -1 \\ y \ge 0. \end{cases}$

2.18. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq -1 \\ x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ là

A. Một nửa mặt phẳng.
B. Miền tam giác.
C. Miền tứ giác.
D. Miền ngũ giác.

2.19. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -3 \leq y \leq 3 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$ là

A. Miền lục giác.
B. Miền tam giác.
C. Miền tứ giác.
D. Miền ngũ giác.

2.20. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ -3 \leq y \leq 3 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$ là

A. Miền lục giác.
B. Miền tam giác.
C. Miền tứ giác.
D. Miền ngũ giác.

2.21. Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x; y) = 3x + y$ với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq -1 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ là

A. –3.
B. 6.
C. 5.
D. 8.

2.22. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = -x + 4y$ với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$ là

A. –2.
B. 3.
C. 11.
D. –4.

2.23. Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = x + 5y$ với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ x + y \leq 4 \\ y - x \leq 4 \end{cases}$ là

A. –20.
B. –4.
C. 28.
D. 16.

2.24. Một hợp tác xã chăn nuôi dự định trộn hai loại thức ăn gia súc X và Y để tạo thành thức ăn hỗn hợp cho gia súc. Giá một bao loại X là 250 nghìn đồng, giá một bao loại Y là 200 nghìn đồng. Mỗi bao loại X chứa 2 đơn vị chất dinh dưỡng A, 2 đơn vị chất dinh dưỡng B và 2 đơn vị chất dinh dưỡng C. Mỗi bao loại Y chứa 1 đơn vị chất dinh dưỡng A, 9 đơn vị chất dinh dưỡng B và 3 đơn vị chất dinh dưỡng C. Tìm chi phí nhỏ nhất để mua hai loại thức ăn gia súc X và Y sao cho hỗn hợp thu được chứa tối thiểu 12 đơn vị chất dinh dưỡng A, 36 đơn vị chất dinh dưỡng B và 24 đơn vị chất dinh dưỡng C.

A. 1,95 triệu đồng.

B. 4,5 triệu đồng.

C. 1,85 triệu đồng.

D. 1,7 triệu đồng.

B – Tự luận

2.25. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng toạ độ:

a) $x + y \geq -4$;

b) $2x - y \leq 5$;

c) $x + 2y < 0$;

d) $-x + 2y > 0$.

2.26. Biểu diễn miền nghiệm của các hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng toạ độ:

a) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ y > 0 \\ x - y > 4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ x + y \leq 2 \\ y - x \leq 2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 6y < 0 \\ 2x - 3y \geq 1. \end{cases}$

2.27. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = 2x + 3y$ với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 1 \\ x + y \leq 4 \\ y - x \leq 4. \end{cases}$

2.28. Một phân xưởng có hai máy chuyên dụng M_1 và M_2 để sản xuất hai loại sản phẩm A và B theo đơn đặt hàng. Nếu sản xuất được một tấn sản phẩm loại A thì phân xưởng nhận được số tiền lãi là 2 triệu đồng. Nếu sản xuất được một tấn sản phẩm loại B thì phân xưởng nhận được số tiền lãi là 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại A, người ta phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại B, người ta phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ một ngày

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

và máy M_2 làm việc không quá 4 giờ một ngày. Hỏi số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng này có thể thu được trong một ngày là bao nhiêu?

2.29. Giả sử một người ăn kiêng cần được cung cấp ít nhất 300 calo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C mỗi ngày từ hai loại đồ uống *I* và *II*. Mỗi cốc đồ uống *I* cung cấp 60 calo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C.

Mỗi cốc đồ uống *II* cung cấp 60 calo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C. Biết rằng một cốc đồ uống *I* có giá 12 nghìn đồng và một cốc đồ uống *II* có giá 15 nghìn đồng.

a) Gọi x và y tương ứng là số cốc đồ uống *I* và *II*. Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình và xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x cốc đồ uống *I* và y cốc đồ uống *II*. Hãy biểu diễn F theo x và y.

c) Biết rằng F đạt giá trị nhỏ nhất trên miền nghiệm tìm được ở câu a tại một trong các đỉnh của miền nghiệm, tìm giá trị nhỏ nhất đó. Từ đó suy ra người đó cần uống bao nhiêu cốc loại *I* và loại *II* để chi phí là nhỏ nhất mà vẫn đáp ứng được yêu cầu hằng ngày.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

CHƯƠNG III
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

BÀI 5

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0^o ĐẾN 180^o

A – Kiến thức cần nhớ

1. Điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ (H.3.1).

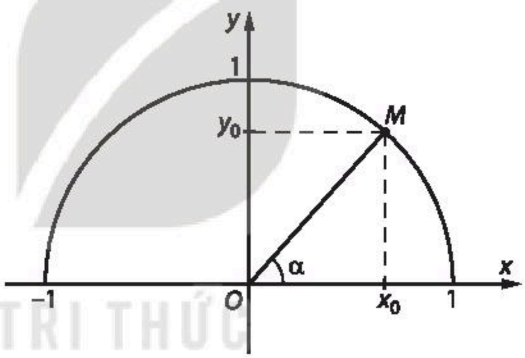
Khi đó:

$\sin\alpha = y_0$, $\cos\alpha = x_0$,

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90^o)$,

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\alpha \neq 0^o, \alpha \neq 180^o)$,

$\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$ $(\alpha \notin \{0^o; 90^o; 180^o\})$.



Hình 3.1

2. Khi $\alpha = 0^o$ thì $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$.

Khi $\alpha = 90^o$ thì $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$.

Khi $0^o < \alpha < 90^o$ thì $0 < \sin\alpha < 1$, $0 < \cos\alpha < 1$, $\tan\alpha > 0$ và $\cot\alpha > 0$.

Khi $90^o < \alpha < 180^o$ thì $0 < \sin\alpha < 1$, $-1 < \cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$ và $\cot\alpha < 0$.

3. Bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt cần nhớ

GTLG \ Góc	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\Vert$

Bảng 3.1. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

4. Tính chất

a) Giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha,\ \cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha.$$

b) Giá trị lượng giác của hai góc bù nhau:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha,\ \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha.$$

c) Hệ thức cơ bản (bài tập 3.3, SGK Toán 10, tập một):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ)$$
$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (0^\circ < \alpha < 180^\circ).$$
$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \quad (0^\circ < \alpha < 180^\circ,\ \alpha \neq 90^\circ).$$

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Không dùng máy tính, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 150^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 120^\circ$;

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

b) $B = \tan 135^\circ + \cot 60^\circ \cdot \cot 30^\circ - \tan 60^\circ \cdot \tan 150^\circ$;

c) $C = 2\sin 60^\circ \cdot \tan 150^\circ - \cos 180^\circ \cdot \cot 45^\circ$.

Giải

a) Từ Bảng 3.1 ta thấy

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos 135^\circ,\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 150^\circ \text{ và } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^\circ.$$

Từ đó suy ra $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1.$

b) Do $\tan 135^\circ = -1$, $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

nên $B = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.$

c) Cũng từ Bảng 3.1, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos 180^\circ = -1$ và $\cot 45^\circ = 1$.

Suy ra

$$C = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - (-1) \cdot 1 = 0.$$

Chú ý. Nếu để ý đến mối liên hệ giữa các góc có trong biểu thức, như các góc bù nhau, các góc phụ nhau, thì ta có thể giải bài toán theo cách sau:

a) Do $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$, $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ nên

$$A = \sin 45^\circ \cdot (-\cos 45^\circ) + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1.$$

b) Do $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ nên

$$B = -1 + 1 - \tan 60^\circ \cdot (-\tan 30^\circ) = 1.$$

c) Do $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ nên

$$C = 2\sin 60^\circ \cdot (-\tan 30^\circ) - \cos 180^\circ \cdot \cot 45^\circ$$
$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - (-1) \cdot 1 = 0.$$

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Ví dụ 2. Cho góc α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ thoả mãn $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

a) Tính $\tan\alpha$.

b) Tính giá trị của biểu thức $P = \tan\alpha + 2\cot\alpha$.

Giải

a) Do $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3} < 0$ nên α là góc tù và $\tan\alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = -2\sqrt{2}$.

b) Do $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ và $\tan\alpha = -2\sqrt{2}$ nên $\cot\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ và bởi vậy

$$P = -2\sqrt{2} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Nhận xét. Khi tính $\tan\alpha$ từ $\cos\alpha$ nhờ đẳng thức $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ sai lầm thường gặp của học sinh là mặc định coi $\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$ mà quên mất $\tan\alpha < 0$ khi α là góc tù.

C – Bài tập

3.1. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = \sin 45^\circ + 2\sin 60^\circ + \tan 120^\circ + \cos 135^\circ$;

b) $B = \tan 45^\circ \cdot \cot 135^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 120^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ$;

c) $C = \cos^2 5^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 85^\circ$;

d) $D = \dfrac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4\tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ + 12\sin^2 107^\circ$
$-2\tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$;

e) $E = 4\tan 32^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cot 148^\circ + \dfrac{5\cot^2 108^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5\sin^2 72^\circ$.

3.2. Cho góc α, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ thoả mãn $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức

$$F = \frac{\tan\alpha + 2\cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha}.$$

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

3.3. Cho góc α thoả mãn $0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$, $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $G = 2\sin\alpha + \cos\alpha$;

b) $H = \dfrac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

3.4*. Cho góc α thoả mãn $0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$, $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$K = \frac{\sin^3\alpha + \sin\alpha\cdot\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha - 4\cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}.$$

3.5. Chứng minh rằng:

a) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

b) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

c*) $\sqrt{\sin^4\alpha + 6\cos^2\alpha + 3} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha} = 4$.

3.6. Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa (khoảng 12 giờ), em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất, đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước và độ dài của bóng thước. Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc vào thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

$$\alpha = 90^{\circ} - \phi - \left|\cos\left(\left(\frac{2(N+10)}{365} - m\right)180^{\circ}\right)\right|\cdot 23,5^{\circ}$$

trong đó $m = 0$ nếu $1 \le N \le 172$, $m = 1$ nếu $173 \le N \le 355$, $m = 2$ nếu $356 \le N \le 365$.

a) Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ $\phi = 20^{\circ}$.

b) Hãy xác định vĩ độ tại nơi em sinh sống và tính góc nghiêng của Mặt Trời tại đó theo hai cách đã được đề cập trong bài toán (đo trực tiếp và tính theo công thức) và so sánh hai kết quả thu được.

Chú ý. Công thức tính toán nói trên chính xác tới $\pm 0,5^{\circ}$.

Góc nghiêng của Mặt Trời có ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất, chẳng hạn, vào mùa hè, góc nghiêng lớn nên nhiệt độ cao.

BÀI 6

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A – Kiến thức cần nhớ

Quy ước, kí hiệu. Với tam giác *ABC*, ta thường sử dụng các kí hiệu sau:

a, b, c	:	Độ dài các cạnh *BC, CA, AB*
h_a, h_b, h_c	:	Độ dài đường cao kẻ từ *A, B, C*
$p = \dfrac{a+b+c}{2}$	:	Nửa chu vi của tam giác
S	:	Diện tích của tam giác
R, r	:	Bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp
m_a, m_b, m_c	:	Độ dài đường trung tuyến kẻ từ *A, B, C.*

Định lí côsin. Trong tam giác *ABC*, ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Định lí sin. Trong tam giác *ABC*, ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Các công thức tính diện tích:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác *ABC* có $a = 8$, $b = 9$, $c = 6$.

a) Tính số đo các góc của tam giác.

b) Tính diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, độ dài các đường cao của tam giác.

Giải

a) Áp dụng định lí côsin, ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{81 + 36 - 64}{2 \cdot 9 \cdot 6} = \frac{53}{108}.$$

Suy ra $\widehat{A} \approx 60^\circ 36'39''$.

Hoàn toàn tương tự, tính được $\widehat{B} \approx 78^\circ 35'5''$, $\widehat{C} \approx 40^\circ 48'16''$.

b) Do $a = 8$, $b = 9$, $c = 6$ nên tam giác ABC có nửa chu vi $p = \dfrac{8+9+6}{2} = \dfrac{23}{2}$.

Suy ra $p - a = \dfrac{7}{2}$, $p - b = \dfrac{5}{2}$ và $p - c = \dfrac{11}{2}$. Từ đó, theo công thức Heron ta được diện tích của tam giác là $S = \sqrt{\dfrac{23}{2} \cdot \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{11}{2}} = \dfrac{\sqrt{8855}}{4}$.

Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\sqrt{8855}}{46}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{432}{\sqrt{8855}}$.

Nhận xét

– Định lí côsin giúp ta giải tam giác trong trường hợp biết ba cạnh của tam giác hoặc biết hai cạnh và góc xen giữa hai cạnh đó (bài tập 3.8 và 3.9).

– Từ $\cos A = \dfrac{53}{108}$, sử dụng hệ thức cơ bản (bài tập 3.3, SGK Toán 10, tập một), tính được $\sin A = \dfrac{\sqrt{8855}}{108}$. Từ đó, sử dụng công thức $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ ta cũng thu được $S = \dfrac{\sqrt{8855}}{4}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 15^\circ$, $c = 6$ và $\widehat{B} = 120^\circ$.

a) Tính độ dài các cạnh a, b.

b) Tính độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và diện tích của tam giác.

c) Tính độ dài đường cao h_a.

Giải

a) Do $\widehat{A} = 15^\circ$, $\widehat{B} = 120^\circ$ nên $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 45^\circ$.

Áp dụng định lí sin ta được:

$$a = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{6}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 15^\circ = 3\left(\sqrt{3} - 1\right),$$

$$b = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin B = \frac{6}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 120^\circ = 3\sqrt{6}.$$

b) Theo định lí sin, bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác là

$$R = \frac{c}{2\sin C} = \frac{6}{2\sin 45^\circ} = 3\sqrt{2}.$$

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Do $a = 3(\sqrt{3} - 1)$, $b = 3\sqrt{6}$, $c = 6$ và $R = 3\sqrt{2}$ nên

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{3(\sqrt{3}-1)\cdot 3\sqrt{6}\cdot 6}{4\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}.$$

c) Từ kết quả của phần b), suy ra $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{9\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3(\sqrt{3}-1)} = 3\sqrt{3}.$

Nhận xét

– Định lí sin giúp ta giải tam giác trong trường hợp biết hai góc và một cạnh của tam giác.

– Ở phần b) cũng có thể sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ để tính diện tích của tam giác.

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng:

a) $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$;

b) $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

Giải

a) Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Khi đó $m_a = AM$. Có hai trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1. $b = c$. Trong trường hợp này *AM* cũng chính là đường cao kẻ từ *A* của tam giác. Do đó $m_a^2 = AC^2 - CM^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

Trường hợp 2. $b \neq c$. Không mất tính tổng quát, xét trường hợp $b < c$ (H.3.2), trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Gọi *D* là chân đường cao kẻ từ *A*. Do $b < c$ nên *D* thuộc tia *MC*.

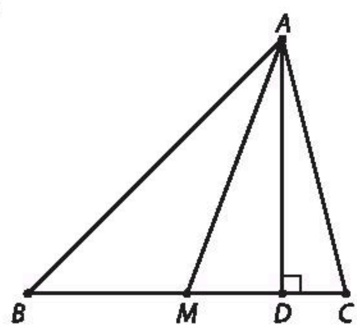
Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác *ADB*, ta có

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 = (BM + MD)^2 + AD^2$$
$$= BM^2 + 2\cdot BM\cdot MD + MD^2 + AD^2.$$

Suy ra $AB^2 = BM^2 + 2\cdot BM\cdot MD + AM^2$. (1)

Một cách tương tự, áp dụng định lí Pythagore cho tam giác *ADC*, cũng được

$$AC^2 = AD^2 + (MC - MD)^2$$
$$= MC^2 - 2\cdot MC\cdot MD + AM^2. \quad (2)$$



Hình 3.2

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned}AB^2 + AC^2 &= \left(BM^2 + CM^2\right) + 2(BM \cdot MD - CM \cdot MD) + 2AM^2 \\ &= \left(BM^2 + CM^2\right) + 2AM^2\end{aligned}$$

hay $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

b) Từ công thức tính diện tích tam giác suy ra

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{S} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Nhận xét

– Công thức $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ cho phép ta tính được độ dài đường trung tuyến của một tam giác, khi biết ba cạnh của nó. Có thể thu được công thức này bằng cách làm như trong bài 3.16 (Toán 10, tập một).

– Nếu gọi E là điểm đối xứng với A qua M, thì tứ giác $ABEC$ là một hình bình hành với hai đường chéo BC, AE. Khi đó công thức tính độ dài đường trung tuyến ở phần a) trở thành $BC^2 + AE^2 = AB^2 + BE^2 + EC^2 + CA^2$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn $\sin C = 2 \cdot \sin B \cdot \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC là một tam giác cân.

Giải

Áp dụng các định lí sin và côsin, ta có

$$\begin{aligned}\sin C = 2\sin B \cos A &\Leftrightarrow c = 2b\cos A \Leftrightarrow c = 2b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &\Leftrightarrow c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b.\end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

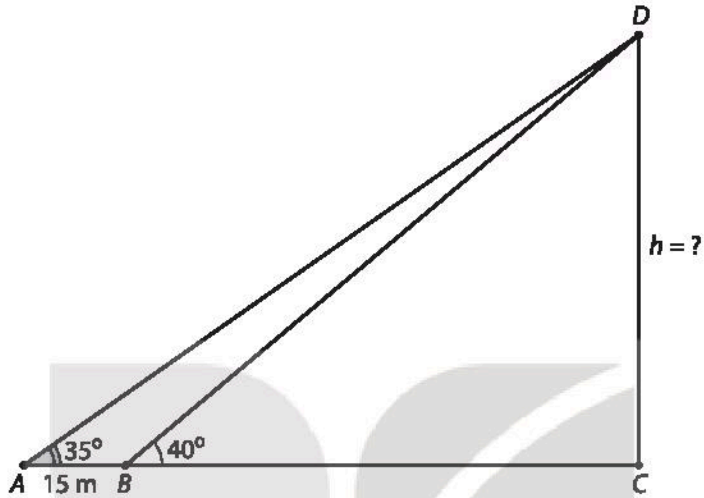
Ví dụ 5. Để đo chiều cao của một tòa nhà, người ta chọn hai điểm A và B thẳng hàng với chân C của tòa nhà, cách nhau 15 m. Sử dụng giác kế, từ A và B tương ứng nhìn thấy đỉnh D của tòa nhà dưới các góc 35° và 40° so với phương nằm ngang. Hỏi chiều cao của tòa nhà đo được là bao nhiêu mét?

Giải

Do $\widehat{CBD} = 40^\circ$, $\widehat{BAD} = 35^\circ$ nên $\widehat{ADB} = 40^\circ - 35^\circ = 5^\circ$ (H.3.3). Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD ta được $BD = \dfrac{AB}{\sin D} \cdot \sin A = \dfrac{15}{\sin 5^\circ} \cdot \sin 35^\circ$.

Từ đó suy ra chiều cao của tòa nhà bằng

$$h = CD = BD \cdot \sin\widehat{CBD} = \frac{15}{\sin 5^\circ} \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 40^\circ$$
$$\approx 63,45 \text{ (m)}.$$



Hình 3.3

Nhận xét. Việc sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác giúp ta có thể giải được những bài toán về đo đạc trong thực tế, như đo chiều cao của một vật thể, đo khoảng cách giữa hai điểm mà không thể đo trực tiếp được (xem bài tập 3.10, 3.11, 3.12).

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

C – Bài tập

3.7. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$ và $c = 12$.

a) Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác.

b) Tính độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác.

c) Tính diện tích của tam giác.

d) Tính độ dài các đường cao của tam giác.

3.8. Tam giác ABC có $a = 19$, $b = 6$ và $c = 15$.

a) Tính $\cos A$.

b) Tính diện tích tam giác.

c) Tính độ dài đường cao h_c.

d) Tính độ dài bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

3.9. Cho tam giác ABC có $a = 4, \widehat{C} = 60^\circ, b = 5$.

a) Tính các góc và cạnh còn lại của tam giác.

b) Tính diện tích của tam giác.

c) Tính độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác.

3.10. Một tàu cá xuất phát từ đảo A, chạy 50 km theo hướng $N24^\circ E$ đến đảo B để lấy thêm ngư cụ, rồi chuyển hướng $N36^\circ W$ chạy tiếp 130 km đến ngư trường C.

a) Tính khoảng cách từ vị trí xuất phát A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị đo kilômét).

b) Tìm hướng từ A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).

3.11. Một tàu du lịch xuất phát từ bãi biển Đồ Sơn (Hải Phòng), chạy theo hướng $N80^\circ E$ với vận tốc 20 km/h. Sau khi đi được 30 phút, tàu chuyển sang hướng $E20^\circ S$ giữ nguyên vận tốc và chạy tiếp 36 phút nữa đến đảo Cát Bà. Hỏi khi đó tàu du lịch cách vị trí xuất phát bao nhiêu kilômet?

3.12. Một cây cổ thụ mọc thẳng đứng bên lề một con dốc có độ dốc 10° so với phương nằm ngang. Từ một điểm dưới chân dốc, cách gốc cây 31 m người ta nhìn đỉnh ngọn cây dưới một góc 40° so với phương nằm ngang. Hãy tính chiều cao của cây.

3.13. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$;

b) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

3.14. Cho tam giác ABC có hai trung tuyến kẻ từ A và B vuông góc.

Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 = 5c^2$;

b) $\cot C = 2(\cot A + \cot B)$.

3.15. Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn $\dfrac{\sin A}{1} = \dfrac{\sin B}{2} = \dfrac{\sin C}{\sqrt{3}}$. Tính số đo các góc của tam giác.

3.16. Cho tam giác ABC có $S = 2R^2 \sin A \sin B$. Chứng minh rằng tam giác ABC là một tam giác vuông.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A – Trắc nghiệm

3.17. Tam giác *ABC* có $\widehat{A} = 15^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Giá trị của $\tan C$ bằng

A. $-\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. D. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3.18. Trên mặt phẳng toạ độ *Oxy*, lấy điểm *M* thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Tích hoành độ và tung độ của điểm *M* bằng

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. B. $\dfrac{1}{2}$. C. $-\dfrac{1}{2}$. D. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

3.19. Trên mặt phẳng toạ độ *Oxy*, lấy điểm *M* thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 150^\circ$. *N* là điểm đối xứng với *M* qua trục tung. Giá trị của $\tan \widehat{xON}$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. B. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.

3.20. Cho góc nhọn α có $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. Giá trị của tích $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. B. $\dfrac{12}{25}$. C. $\dfrac{25}{12}$. D. $\dfrac{3}{4}$.

3.21. Cho góc α $\left(0^\circ < \alpha < 180^\circ\right)$ thoả mãn $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$. Giá trị của $\cot\alpha$ là

A. 0. B. 1. C. –1. D. Không tồn tại.

3.22. Cho góc α thoả mãn $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$. Giá trị của $\tan\alpha + \cot\alpha$ là

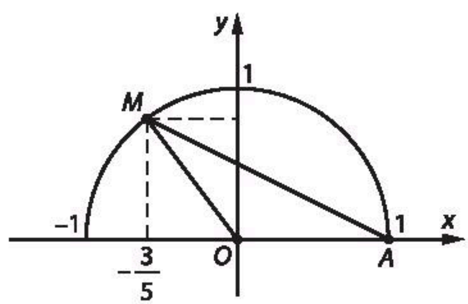
A. 1. B. –2. C. 0. D. 2.

3.23. Trên mặt phẳng toạ độ *Oxy* lấy điểm *M* thuộc nửa đường tròn đơn vị, sao cho $\cos\widehat{xOM} = -\dfrac{3}{5}$ (H.3.4).

Diện tích của tam giác *AOM* bằng

A. $\dfrac{4}{5}$. B. $\dfrac{2}{5}$.

C. $\dfrac{3}{5}$. D. $\dfrac{3}{10}$.

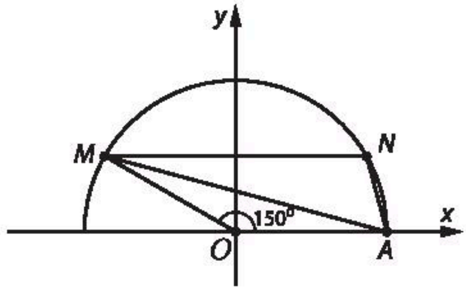


Hình 3.4

3.24. Trên mặt phẳng toạ độ *Oxy* lấy điểm *M* thuộc nửa đường tròn đơn vị, sao cho $\widehat{xOM} = 150^\circ$ (H.3.5). Lấy *N* đối xứng với *M* qua trục tung. Diện tích của tam giác *MAN* bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.



Hình 3.5

3.25. Cho $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. Giá trị của $P = \dfrac{\tan\alpha + 2\cot\alpha}{2\tan\alpha + 3\cot\alpha}$ là

A. $-\dfrac{17}{33}$. B. $\dfrac{17}{33}$.

C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{16}{33}$.

3.26. Tam giác *ABC* có $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác *ABC* là

A. $R = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$. B. $R = \dfrac{7}{\sqrt{15}}$.

C. $R = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$. D. $R = \dfrac{8}{\sqrt{15}}$.

3.27. Tam giác *ABC* có $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. Độ dài đường cao h_b bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$. B. $\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$.

C. $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$. D. $\dfrac{3}{4\sqrt{7}}$.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

3.28. Cho tam giác *ABC* có $a = 20$, $b = 16$ và $m_a = 10$. Diện tích của tam giác bằng

A. 92. B. 100.

C. 96. D. 88.

3.29. Tam giác *ABC* có $a = 14$, $b = 9$ và $m_a = 8$. Độ dài đường cao h_a bằng

A. $\dfrac{24\sqrt{5}}{7}$. B. $\dfrac{12\sqrt{5}}{7}$.

C. $12\sqrt{5}$. D. $24\sqrt{5}$.

3.30. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 45^{\circ}$, $c = 6$, $\widehat{B} = 75^{\circ}$.

Độ dài đường cao h_b bằng

A. $3\sqrt{2}$.

B. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

C. $6\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{3}$.

3.31. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 45^{\circ}$, $c = 6$, $\widehat{B} = 75^{\circ}$.

Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác bằng

A. $8\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $6\sqrt{3}$.

D. $4\sqrt{3}$.

3.32. Tam giác ABC có diện tích $S = 2R^2 \cdot \sin B \sin C$, với R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Số đo góc A bằng

A. 60°.

B. 90°.

C. 30°.

D. 75°.

3.33. Tam giác ABC có $AB = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{2}$ và $\widehat{C} = 45^{\circ}$.

Độ dài cạnh BC bằng

A. 3.

B. 2.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{2}$.

3.34. Tam giác ABC có $\widehat{C} = 60^{\circ}$, $AC = 2$ và $AB = \sqrt{7}$.

Diện tích của tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $3\sqrt{3}$.

C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

3.35. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^{\circ}$, $AB = 3$ và $BC = 3\sqrt{3}$.

Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC là

A. $\dfrac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$.

B. $\dfrac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$.

C. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

D. $\sqrt{3}-1$.

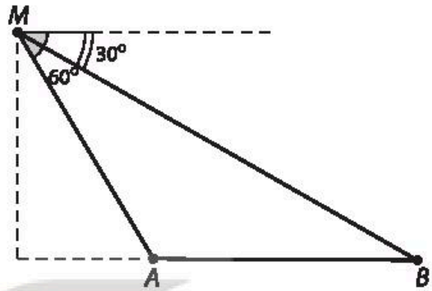
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

3.36. Một ca nô xuất phát từ cảng A, chạy theo hướng đông với vận tốc 60 km/h. Cùng lúc đó, một tàu cá, xuất phát từ A, chạy theo hướng $N30^\circ E$ với vận tốc 50 km/h. Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu kilômét?

A. 110 km. B. 112 km.

C. 111,4 km. D. 110,5 km.

3.37. Một người đứng trên đài quan sát đặt ở cuối một đường đua thẳng. Ở độ cao 6 m so với mặt đường đua, tại một thời điểm người đó nhìn hai vận động viên A và B dưới các góc tương ứng là 60° và 30°, so với phương nằm ngang (H.3.6). Khoảng cách giữa hai vận động viên A và B (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị mét) tại thời điểm đó là



Hình 3.6

A. 8 m. B. 7 m.

C. 6 m. D. 9 m.

B – Tự luận

3.38. Cho góc tù α có $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

a) Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

b) Tính giá trị của các biểu thức :

$$A = \sin\alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \cot(90^\circ - \alpha);$$

$$B = \frac{3(\sin\alpha + \sqrt{2} \cdot \cos\alpha) - 2}{\sin\alpha - \sqrt{2} \cdot \cos\alpha}.$$

3.39. Cho $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

a) Tính $\sin 75^\circ$, $\cos 105^\circ$, $\tan 165^\circ$.

b) Tính giá trị của biểu thức

$$A = \sin 75^\circ \cdot \cos 165^\circ + \cos 105^\circ \cdot \sin 165^\circ.$$

3.40. Cho tam giác ABC có $AB = 1$, $BC = 2$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh và số đo các góc còn lại của tam giác.

3.41. Cho tam giác ABC có $c = 1$, $a = 2$ và $\widehat{B} = 120^{\circ}$.

a) Tính b, $\widehat{A}$, $\widehat{C}$.

b) Tính diện tích của tam giác.

c) Tính độ dài đường cao kẻ từ B của tam giác.

3.42. Cho tam giác ABC có $a = 3$, $b = 5$ và $c = 7$.

a) Tính các góc của tam giác, làm tròn đến độ.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp của tam giác.

3.43. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^{\circ}, \widehat{C} = 15^{\circ}$ và $b = \sqrt{2}$. Tính a, h_a.

3.44. Cho tam giác ABC, có $c = 5$, $a = 8$ và $\widehat{B} = 60^{\circ}$.

a) Tính b và số đo các góc A, C (số đo các góc làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).

b) Tính độ dài đường cao kẻ từ B.

c) Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A.

3.45. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 15^{\circ}$, $\widehat{C} = 30^{\circ}$ và $c = 2$.

a) Tính số đo góc A và độ dài các cạnh a, b.

b) Tính diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác.

c) Lấy điểm D thuộc cạnh AB sao cho $\widehat{BCD} = \widehat{DCA}$ (tức CD là phân giác của góc $\widehat{BCA}$). Tính độ dài CD.

3.46. Trên biển, một tàu cá xuất phát từ cảng A, chạy về phương đông 15 km tới B, rồi chuyển sang hướng $E30^{\circ}S$ chạy tiếp 20 km nữa tới đảo C.

a) Tính khoảng cách từ A tới C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị kilômét).

b) Xác định hướng từ A tới C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).

3.47. Trên sườn đồi, với độ dốc 12% (độ dốc của sườn đồi được tính bằng tang của góc nhọn tạo bởi sườn đồi với phương nằm ngang) có một cây cao mọc thẳng đứng. Ở phía chân đồi, cách gốc cây 30 m, người ta nhìn ngọn cây dưới một góc 45° so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của cây đó (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị mét).

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

CHƯƠNG IV
VECTƠ

BÀI 7
CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

A – Kiến thức cần nhớ

1. Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai đầu mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.

Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.

2. Một vectơ hoàn toàn được xác định khi biết hướng và độ dài của nó.

3. Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

Đối với hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

4. Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

5. Vectơ - không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

Vectơ $\vec{0}$ có độ dài bằng 0, cùng phương với mọi vectơ, cùng hướng với mọi vectơ.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình thoi *ABCD*. Gọi *O* là giao điểm của hai đường chéo *AC*, *BD*. Xét các cặp vectơ: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{BO}$ và $\overrightarrow{DO}$.

a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương, hướng và độ dài của các vectơ trong mỗi cặp trên.

b) Trong các cặp trên, có bao nhiêu cặp gồm hai vectơ bằng nhau?

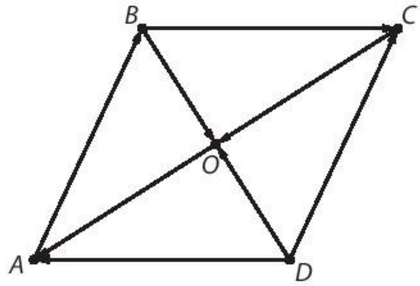
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Giải (H.4.1)

a) Do tứ giác $ABCD$ là hình thoi, nên các cặp cạnh đối diện song song và bằng nhau, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Từ đó

– Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng và cùng độ dài;

– Hai vectơ $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng và cùng độ dài;



Hình 4.1

– Hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CD}$ không cùng phương, nhưng có độ dài bằng nhau;

– Hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{CO}$ cùng hướng và cùng độ dài;

– Hai vectơ $\overrightarrow{BO}$ và $\overrightarrow{DO}$ cùng độ dài, nhưng ngược hướng.

b) Theo kết quả của câu a,

– Do hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng và cùng độ dài, nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;

– Do hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{CO}$ cùng hướng và cùng độ dài, nên $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$;

– Do hai vectơ $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{BC}$ có cùng độ dài, nhưng ngược hướng nên $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau. Tương tự, $\overrightarrow{BO}$ và $\overrightarrow{DO}$ không bằng nhau;

– Do hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CD}$ không cùng phương, vì vậy $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CD}$ không bằng nhau.

Vậy, trong những cặp vectơ được xét, có 2 cặp gồm hai vectơ bằng nhau, đó là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{CO}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Vẽ các đường trung tuyến AD, BE, CF của tam giác ($D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$). Xét các vectơ có đầu mút được lấy từ các điểm A, B, C, D, E, F.

Hãy chỉ ra các bộ ba vectơ khác $\vec{0}$ và đôi một bằng nhau.

Giải (H.4.2)

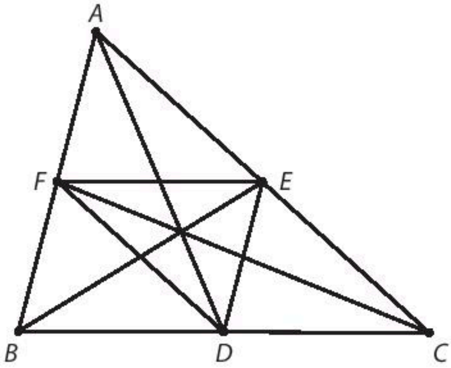
Từ giả thiết suy ra D là trung điểm BC, E là trung điểm CA và F là trung điểm AB. Từ đó DE, EF, FD là các đường trung bình của tam giác. Do đó, hai đoạn thẳng DE, BF song song và bằng nhau, hai đoạn thẳng DE, FA song song và bằng nhau. Suy ra các tứ giác $AEDF$, $FEDB$ là hình bình hành. Do đó các vectơ

$\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FA}$ cùng hướng và cùng độ dài; các vectơ $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{ED}$ cùng hướng và cùng độ dài. Bởi vậy $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DE}$ và $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{ED}$.

Bằng lập luận tương tự, cũng được

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ và $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EF}$;

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DF}$ và $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{FD}$.



Hình 4.2

C – Bài tập

4.1. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và G là trọng tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là một khẳng định đúng?

a) Hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GM}$ cùng phương;

b) Hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GM}$ cùng hướng;

c) Hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GM}$ ngược hướng;

d) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AM}$ bằng ba lần độ dài của vectơ $\overrightarrow{MG}$.

4.2. Cho trước hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hỏi có hay không một vectơ cùng phương với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$?

4.3. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng phương và cùng khác vectơ $\vec{0}$. Chứng minh rằng có ít nhất hai vectơ trong chúng có cùng hướng.

4.4. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Xét các vectơ có hai điểm mút lấy từ các điểm O, A, B, C, D, E, F.

a) Hãy chỉ ra các vectơ khác vectơ - không và cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OA}$.

b) Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.

4.5. Cho tam giác ABC không vuông, với trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AA' của đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$.

b) Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tìm mối quan hệ về phương, hướng và độ dài của hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{OM}$.

4.6. Trên biển Đông, một tàu chuyển động đều từ vị trí A theo hướng $N20^\circ E$ với vận tốc 20 km/h. Sau 2 giờ, tàu đến được vị trí B. Hỏi A cách B bao nhiêu kilômét và về hướng nào so với B?

BÀI 8

TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

A – Kiến thức cần nhớ

1. Vectơ đối

Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu $-\vec{a}$, là vectơ ngược hướng và cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$.

2. Quy tắc cộng, trừ hai vectơ

– *Quy tắc ba điểm* (*hay còn được gọi là quy tắc tam giác*):

Với ba điểm bất kì A, B, C, ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}.$$

– *Quy tắc hình bình hành*: Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

3. Tính chất

– Tính chất giao hoán của phép cộng: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $\forall \vec{a}, \vec{b}$.

– Tính chất kết hợp của phép cộng: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

– Tính chất của vectơ $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, $\forall \vec{a}$.

– Tính chất của vectơ đối: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, $\forall \vec{a}$.

4. Dấu hiệu nhận biết trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

– M là trung điểm đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

– G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

B – Ví dụ

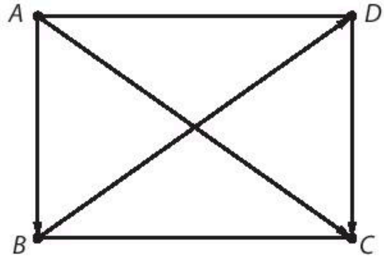
Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$.

a) Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$.

b) Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$.

Giải

a) Do hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ nên độ dài hai đường chéo AC, BD bằng $\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$. (H.4.3a)



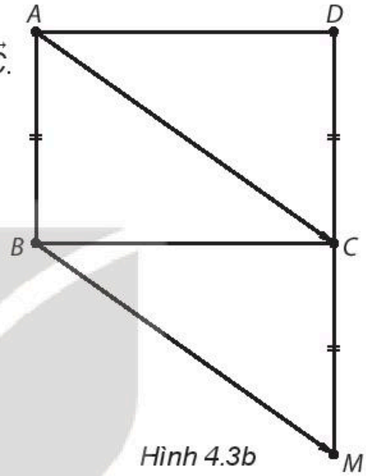
Hình 4.3a

Theo tính chất giao hoán và kết hợp phép cộng vectơ, ta có

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$$
$$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

Do đó $\left|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{3}$.

b) Do $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$ (H.4.3b). Theo kết quả bài tập 4.3, SGK Toán 10 tập 1, đẳng thức $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$ tương đương với tứ giác $ABMC$ là một hình bình hành. Từ đó $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Vậy điểm M cần tìm là điểm đối xứng với D qua C.



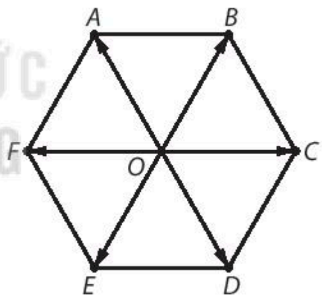
Hình 4.3b

Ví dụ 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O, độ dài các cạnh bằng 1.

a) Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

b) Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$.



Hình 4.4a

Giải

a) Do O là tâm của lục giác đều $ABCDEF$ nên O là trung điểm của các đường chéo AD, BE, CF (H.4.4a).

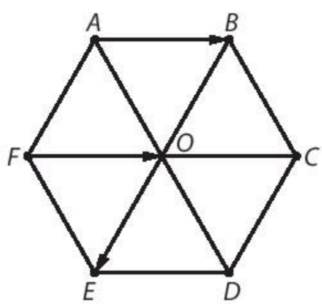
Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

b) Theo kết quả của bài tập 4.4, ta được

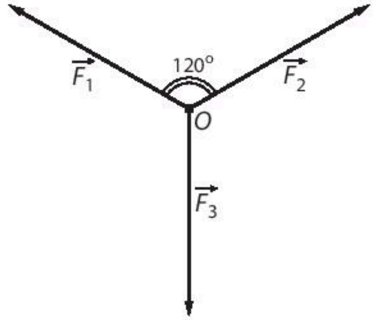
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FE} \text{ (H.4.4b).}$$

Từ đó, do độ dài các cạnh của lục giác $ABCDEF$ bằng 1 nên $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}\right| = \left|\overrightarrow{EF}\right| = 1$.



Hình 4.4b

Ví dụ 3. Trên Hình 4.5 biểu diễn ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng O. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng 100 N và góc tạo bởi $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ bằng 120°. Tính cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$.



Hình 4.5

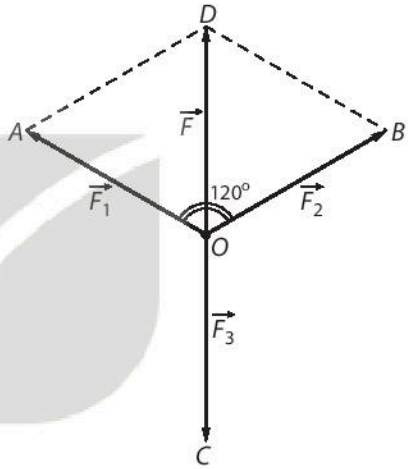
Giải

Ta sử dụng các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OD}$ lần lượt biểu diễn cho các lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ và hợp lực $\overrightarrow{F}$ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ (H.4.6).

Khi đó, do $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = 100$, nên tứ giác $AOBD$ là hình thoi. Từ đó, do $\widehat{AOB} = 120^\circ$, suy ra $\widehat{OAD} = 60^\circ$, do đó tam giác AOD đều. Bởi vậy $\left|\overrightarrow{F}\right| = OD = OA = 100$.

Do vật ở vị trí cân bằng nên hai lực $\overrightarrow{F}$ và $\overrightarrow{F_3}$ ngược hướng và có cường độ bằng nhau, tức là hai vectơ $\overrightarrow{OD}$ và $\overrightarrow{OC}$ là hai vectơ đối nhau. Suy ra cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$ bằng

$$\left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F}\right| = 100 \text{ (N)}.$$



Hình 4.6

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

C – Bài tập

4.7. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Chứng minh rằng

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

4.8. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm tuỳ ý thuộc cạnh BC, khác B và C. MO cắt cạnh AD tại N.

a) Chứng minh rằng O là trung điểm MN.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tam giác MNC.

4.9. Cho tứ giác $ABCD$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

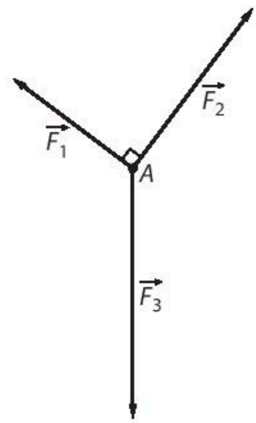
4.10. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Xác định vectơ $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$.

b) Xác định điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MA}$.

c) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

4.11. Trên Hình 4.7 biểu diễn ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng A. Cho biết $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = 30\text{N}$, $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = 40\text{N}$. Tính cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$.



Hình 4.7

4.12. Trên mặt phẳng, chất điểm A chịu tác dụng của ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ và ở trạng thái cân bằng. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ bằng $60°$. Tính độ lớn của $\overrightarrow{F_3}$, biết $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_1}\right| = 2\sqrt{3}\ N$.

BÀI 9

TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

A – Kiến thức cần nhớ

1. Tích của vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với số thực k, kí hiệu $k\vec{a}$, là một vectơ:

– có độ dài bằng $|k| \cdot \left|\vec{a}\right|$;

– cùng hướng với $\vec{a}$ khi $k \geq 0$ và ngược hướng với $\vec{a}$ khi $k < 0$;

2. Tính chất. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và cho hai số thực k, t. Khi đó

– $k\left(t\vec{a}\right) = (kt)\vec{a}$;

– $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = k\vec{a} - k\vec{b}$;

– $(k + t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;

– $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$;

– $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

3. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

4. Cho trước vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Khi đó với mọi vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$, tồn tại duy nhất số thực x sao cho $\vec{b} = x\vec{a}$.

5. Cho trước hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó với mọi vectơ $\vec{c}$ tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ sao cho $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

6. M là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$, $\forall O$.

   G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, $\forall O$.

B. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Gọi G, G_1, G_2 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ABC, ABM, ACM. Chứng minh rằng G là trung điểm của G_1G_2.

Giải

Do M là trung điểm của BC; G, G_1, G_2 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ABC, ABM, ACM nên với mọi điểm O, ta có

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG},$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OG_1},\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OG_2}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} 3\left(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2}\right) &= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = 6\overrightarrow{OG}. \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} = 2\overrightarrow{OG}$. Do đó G là trung điểm của G_1G_2.

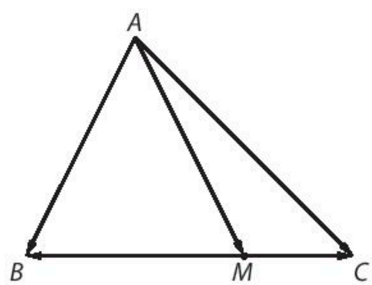
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 2MC$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$.

Giải (H.4.8)

a) Do M thuộc cạnh BC và $BM = 2MC$ nên hai vectơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ ngược hướng và $\left|\overrightarrow{MB}\right| = 2\left|\overrightarrow{MC}\right|$. Suy ra $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$ và do đó $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.



Hình 4.8

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

b) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$.

Từ đó $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) + 2\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}\right) = 3\overrightarrow{AM} + \left(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right) = 3\overrightarrow{AM}$.

Nhận xét

– Điểm M trong ví dụ này được gọi là điểm chia đoạn thẳng BC theo tỉ số -2.

– Bằng lập luận tương tự ta chứng minh được điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$) khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} = (1-k)\overrightarrow{OM}$, $\forall O$.

Ví dụ 3. Gọi G và G' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Giải

Do G là trọng tâm tam giác ABC, G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ nên ta có:

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0} \qquad (1)$$

và $$\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}. \qquad (2)$$

Theo quy tắc ba điểm, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}\right) + \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}\right) + \left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}\right) + 3\overrightarrow{GG'} + \left(\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}\right).\end{aligned}$$

Từ đó và (1), (2) suy ra $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Tìm tập hợp các điểm N thoả mãn $\left|\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC}\right| = 4\left|\overrightarrow{NB}\right|$.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Giải

a) Giả sử tìm được điểm M thoả mãn (H.4.9a). Khi đó, với I là trung điểm AC, ta có

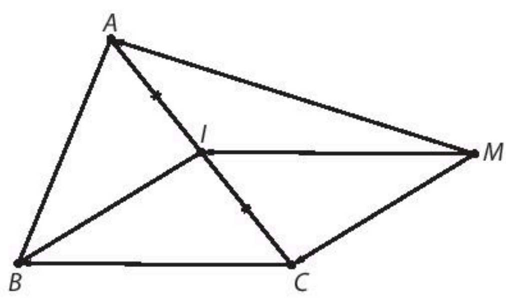
$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{CB} = 2\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{CB}\right).$$

Khi đó $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{CB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{CB}$.

Do B, C, I không cùng thuộc một đường thẳng, nên điều này tương đương với tứ giác $BCMI$ là một hình bình hành.

Vậy điểm M cần tìm là đỉnh thứ tư của hình bình hành dựng trên hai cạnh BC, BI, tức là M đối xứng với B qua trung điểm của IC.



Hình 4.9a

b) Gọi J là trung điểm của IC (H.4.9b).

Khi đó $JA = 3JC$ và do đó $\overrightarrow{JA} = -3\overrightarrow{JC}$.

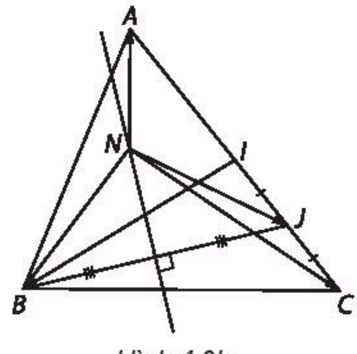
Từ đó suy ra

$\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \left(\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JA}\right) + 3\left(\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JC}\right) = 4\overrightarrow{NJ}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC}\right| = 4\left|\overrightarrow{NB}\right| \Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{NJ}\right| = 4\left|\overrightarrow{NB}\right|$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{NJ}\right| = \left|\overrightarrow{NB}\right|$,

tức là N thuộc trung trực của đoạn JB.



Hình 4.9b

Vậy tập hợp các điểm N cần tìm là đường trung trực của đoạn JB.

C – Bài tập

4.13. Cho tam giác ABC. Gọi D, E tương ứng là trung điểm của BC, CA. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BE}$.

4.14. Cho tam giác OAB vuông cân, với $OA = OB = a$. Hãy xác định độ dài của các vectơ sau $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$, $2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$.

4.15. Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O.

a) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

c) Chứng minh rằng ba điểm G, H, O cùng thuộc một đường thẳng.

4.16. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, CD và gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng với điểm O bất kì đều có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}.$$

4.17. Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

4.18. Cho tam giác ABC đều với trọng tâm O. M là một điểm tuỳ ý nằm trong tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

4.19. Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Xác định điểm N thoả mãn $4\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

4.20. Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm K thoả mãn $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

b) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$.

4.21. Một vật đồng chất được thả vào một cốc chất lỏng. Ở trạng thái cân bằng, vật chìm một nửa thể tích trong chất lỏng. Tìm mối liên hệ giữa trọng lực $\vec{P}$ của vật và lực đẩy Archimedes $\vec{F}$ mà chất lỏng tác động lên vật. Tính tỉ số giữa trọng lượng riêng của vật và của chất lỏng.

BÀI 10

VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

A – Kiến thức cần nhớ

1. Trục toạ độ, toạ độ đối với trục

Trục toạ độ (còn gọi là *trục* hay *trục số*) là một đường thẳng, mà trên đó đã xác định một điểm O và một vectơ $\vec{e}$ có độ dài bằng 1. Điểm O gọi là *gốc toạ độ*, vectơ $\vec{e}$ gọi là *vectơ đơn vị* của trục.

Điểm M trên trục biểu diễn số x_0 nếu $\overrightarrow{OM} = x_0\vec{e}$ (H.4.10).

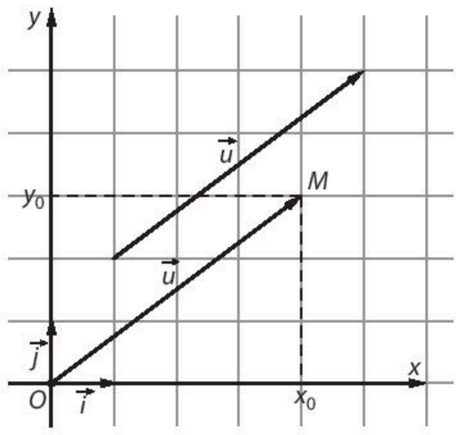
Hình 4.10

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

2. Hệ trục toạ độ, toạ độ đối với hệ trục toạ độ

Hệ trục toạ độ là một hệ gồm hai trục Ox (với vectơ đơn vị $\vec{i}$) và trục Oy (với vectơ đơn vị $\vec{j}$) vuông góc với nhau tại gốc chung O. Trục Ox được gọi là *trục hoành*, trục Oy được gọi là *trục tung* (H.4.11).

Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trên mặt phẳng Oxy, có duy nhất cặp số thực $(x_0; y_0)$ sao cho $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$.



Hình 4.11

Cặp số $(x_0; y_0)$ ở đây được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{u}$ đối với hệ trục. Ta viết $\vec{u} = (x_0; y_0)$ hay $\vec{u}(x_0; y_0)$ để chỉ rằng vectơ $\vec{u}$ có toạ độ là $(x_0; y_0)$ đối với hệ trục toạ độ. Các số x_0, y_0 tương ứng gọi là *hoành độ*, *tung độ* của vectơ $\vec{u}$.

Nếu điểm *M* có toạ độ $(x_0; y_0)$ thì vectơ $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(x_0; y_0)$ và $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

Với hai điểm $M(x; y)$ và $N(x'; y')$ thì $\overrightarrow{MN} = (x' - x; y' - y)$ và khoảng cách giữa hai điểm *M*, *N* bằng $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.

3. Tính chất

Cho hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (x'; y')$ và cho số thực *k*. Khi đó

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y'); \vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y'); k\vec{u} = (kx; ky);$$

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}; \quad \vec{u} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y'. \end{cases}$$

4. Dấu hiệu cùng phương của hai vectơ: Vectơ $\vec{v}(x; y)$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(x'; y') \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số *k* sao cho $x = kx'$ và $y = ky'$.

5. Cho hai điểm $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$. Khi đó trung điểm *M* của đoạn thẳng *AB* có toạ độ $\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}; \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

6. Cho tam giác *ABC* với $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$. Khi đó trọng tâm *G* của tam giác *ABC* có toạ độ $\left(\dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \dfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho hai điểm *A*(1; 2) và *B*(3; –4).

a) Tìm toạ độ trung điểm *M* của đoạn *AB*.

b) Tìm toạ độ điểm *N* sao cho $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NB}$.

Giải

a) Gọi *M*(*x*; *y*) là trung điểm của *AB*. Khi đó $\begin{cases} x = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ y = \dfrac{2+(-4)}{2} = -1 \end{cases}$. Suy ra *M*(2; –1).

b) Do $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NB}$ nên $\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} = (1-2)\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{ON}$, suy ra $\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Từ đó, do $\overrightarrow{OA} = (1; 2)$, $\overrightarrow{OB} = (3; -4)$ nên $\overrightarrow{ON} = (5; -10)$. Vậy $N(5; -10)$.

Nhận xét

Một cách khái quát, với hai điểm $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ thì điểm P thoả mãn $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$ $(k \neq 1)$ có toạ độ $\left(\dfrac{a_1 - kb_1}{1-k}; \dfrac{a_2 - kb_2}{1-k}\right)$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(2; -1)$, $B(1; 4)$ và $C(-2; 3)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

a) Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{AB} = (-1; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; 4)$. Do $\dfrac{-1}{-4} \neq \dfrac{5}{4}$ nên các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Suy ra A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi $G(x; y)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó $\begin{cases} x = \dfrac{2+1+(-2)}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{(-1)+4+3}{3} = 2. \end{cases}$

Suy ra $G\left(\dfrac{1}{3}; 2\right)$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm A, B thoả mãn $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

a) Chứng minh rằng O, A, B không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ của điểm C sao cho tứ giác $ABCO$ là hình bình hành.

c) Tìm toạ độ của điểm D thuộc trục hoành sao cho $DA = DB$.

Giải

a) Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{OA} = (2; -3)$ và $\overrightarrow{OB} = (3; 2)$. Vì $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{-3}{2}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ không cùng phương, hay O, A, B không thẳng hàng.

b) Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{AB} = (1; 5)$. Giả sử tìm được điểm C sao cho tứ giác $ABCO$ là hình bình hành. Khi đó do $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{OC} = (1; 5)$. Suy ra $C(1; 5)$.

c) Xét điểm $D(d; 0) \in Ox$. Khi đó $DA = \sqrt{(2-d)^2 + 9}$, $DB = \sqrt{(3-d)^2 + 4}$.

Suy ra $DA = DB \Leftrightarrow DA^2 = DB^2 \Leftrightarrow (2-d)^2 + 9 = (3-d)^2 + 4 \Leftrightarrow d = 0$.

Vậy điểm D cần tìm trùng với gốc toạ độ $O(0; 0)$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(3; -4)$. Tìm toạ độ của điểm C thuộc trục tung sao cho vectơ $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ có độ dài ngắn nhất.

Giải

Xét điểm $C(0; c) \in Oy$. Khi đó $\overrightarrow{CA} = (1; 2-c)$ và $\overrightarrow{CB} = (3; -4-c)$.

Do đó $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (4; -2-2c)$, suy ra $\left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{16 + 4(1+c)^2}$.

Do $(1+c)^2 \geq 0 \ \forall c$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = -1$, nên $\left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right| \geq 4$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = -1$. Vậy với điểm $C(0; -1) \in Oy$ thì vectơ $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ có độ dài ngắn nhất.

Nhận xét

– Với mỗi điểm C đều có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$, với I là trung điểm AB. Suy ra vectơ $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{CI}$ có độ dài ngắn nhất. Từ đó, do C thuộc trục tung, nên C là hình chiếu vuông góc của I trên trục tung.

– Khái quát, ta có bài toán tìm được điểm C thuộc đường thẳng Δ sao cho vectơ $\alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ có độ dài ngắn nhất, với α, β là hai hằng số cho trước.

C – Bài tập

4.22. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $M(4; 0)$, $N(5; 2)$ và $P(2; 3)$. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC, biết M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

4.23. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(2; -1)$, $B(1; 4)$ và $C(7, 0)$.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC và CA. Từ đó suy ra tam giác ABC là một tam giác vuông cân.

b) Tìm toạ độ của điểm D sao cho tứ giác $ABDC$ là một hình vuông.

4.24. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $M(-2; 1)$ và $N(4; 5)$.

a) Tìm toạ độ của điểm P thuộc Ox sao cho $PM = PN$.

b) Tìm toạ độ của điểm Q sao cho $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{PN}$.

c) Tìm toạ độ của điểm R thoả mãn $\overrightarrow{RM} + 2\overrightarrow{RN} = \vec{0}$. Từ đó suy ra P, Q, R thẳng hàng.

4.25. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $M(-3; 2)$ và $N(2; 7)$.

a) Tìm toạ độ của điểm P thuộc trục tung sao cho M, N, P thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ của điểm Q đối xứng với N qua Oy.

c) Tìm toạ độ của điểm R đối xứng với M qua trục hoành.

4.26. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $C(1; 6)$ và $D(11; 2)$.

a) Tìm toạ độ của điểm E thuộc trục tung sao cho vectơ $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}$ có độ dài ngắn nhất.

b) Tìm toạ độ của điểm F thuộc trục hoành sao cho $\left|2\overrightarrow{FC} + 3\overrightarrow{FD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = CD$.

4.27. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(1; 2)$, $B(3; 4)$ và $C(2; -1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác đó.

b) Tìm toạ độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp và trực tâm H của tam giác ABC.

4.28. Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật $ABCD$ với độ dài $AB = 200$ m, $AD = 180$ m, người ta dự định làm 4 cột điện liên tiếp cách đều, cột thứ nhất nằm trên bờ AB và cách đỉnh A khoảng cách 20 m, cột thứ tư nằm trên bờ CD và cách đỉnh C khoảng cách 30 m. Tính các khoảng cách từ vị trí các cột thứ hai, thứ ba đến các bờ AB, AD.

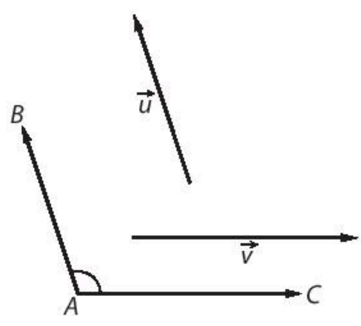
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

BÀI 11

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A – Kiến thức cần nhớ

1. Góc giữa hai vectơ: Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm A nào đó, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ (H.4.12). Khi đó số đo của góc $\widehat{BAC}$ được gọi là số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ hay đơn giản là góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$, kí hiệu $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.



Hình 4.12

2. Tích vô hướng của hai vectơ khác vectơ-không $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Chú ý

- Hai vectơ khác vectơ-không $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có phương vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó:

$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2.$$

3. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng: Trong mặt phẳng toạ độ cho hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$. Khi đó tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ được tính theo công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Nhận xét. Với vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$, ta có:

- Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx' + yy' = 0$.
- Bình phương vô hướng của vectơ $\vec{u}$ là $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$.
- Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

4. Tính chất

Với ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bất kì và mọi số thực k, ta có:

– Tính chất giao hoán: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

– Tính chất phân phối đối với phép cộng vectơ: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

– Tính chất kết hợp đối với phép nhân với số: $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.

Nhận xét. Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ bất kì, ta có:

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2;$$
$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2;$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$$

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC tâm O, có độ dài các cạnh bằng 1.

a) Xác định góc giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{CB}$.

b) Tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

$$\overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{OA} \text{ và } \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OA} \text{ và } \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{OB} \text{ và } \overrightarrow{CB}.$$

Giải

a) Do tam giác ABC đều, nên $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$.

Suy ra $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{CAB} = 60^\circ$.

Gọi D là điểm đối xứng với B qua CA (H.4.13). Khi đó tứ giác $ABCD$ là một hình thoi, do đó $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ và $\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 120^\circ$.

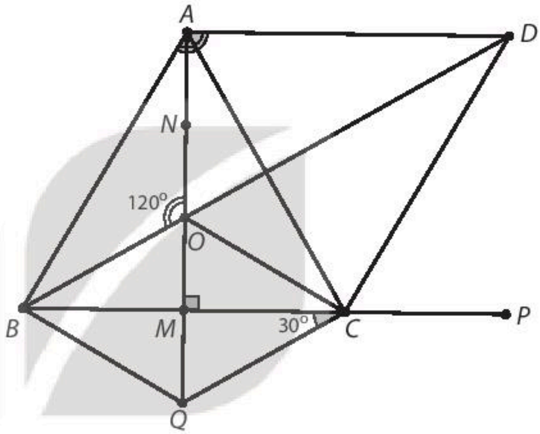
Suy ra $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = \widehat{BAD} = 120^\circ$.

Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm của OA, P là điểm đối xứng với M qua C. Khi đó, do O là tâm của tam giác đều ABC, nên A, N, O, M thẳng hàng, $AM \perp BC$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.

Suy ra $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}\right) = 90^\circ$.

Lấy điểm Q đối xứng với O qua M. Khi đó tứ giác $BOCQ$ là một hình thoi, có $\widehat{OCQ} = 60^\circ$.

Suy ra $\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{CQ}; \overrightarrow{CB}\right) = \widehat{BCQ} = 30^\circ$.



Hình 4.13

b) Do $AM \perp BC$ nên $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Do O là tâm của tam giác đều ABC, nên $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = OA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$;

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{6};$$

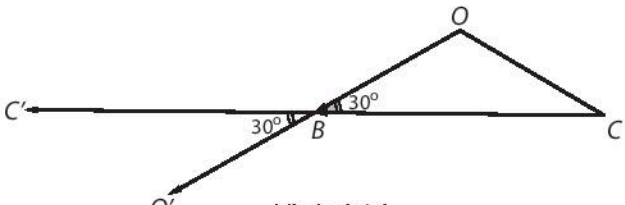
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Nhận xét. Ta có thể xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CB}$ như sau: Lấy O' đối xứng với O qua B và C' đối xứng với C qua B (H.4.14).

Khi đó, do $\overrightarrow{BO'} = \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB}$, nên $\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{BO'}; \overrightarrow{BC'}\right) = \widehat{O'BC'} = \widehat{OBC} = 30^{\circ}$.



Hình 4.14

Ví dụ 2. Cho nửa đường tròn với đường kính $AB = 2R$. Gọi M và N là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại một điểm I.

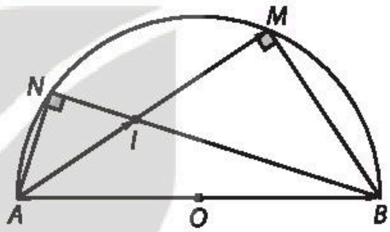
a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) Tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$ theo R.

Giải

a) Do M thuộc nửa đường tròn với đường kính AB nên $\widehat{AMB} = 90^{\circ}$ (H.4.15a).

Suy ra $AM = AB \cdot \cos\widehat{BAM}$. Từ đó, để ý rằng $\widehat{BAM} = \left(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB}\right)$, ta có



Hình 4.15a

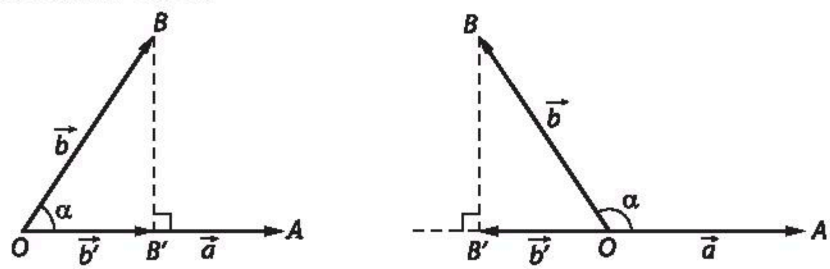
$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \left|\overrightarrow{AI}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AM}\right) = AI \cdot AM = AI \cdot AB \cdot \cos\widehat{BAM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

b) Tương tự như phần a), ta cũng được $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}\right)$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2.$$

Nhận xét. Một cách khái quát, ta chứng minh được $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b'}$, trong đó $\vec{b'}$ là hình chiếu vuông góc của vectơ $\vec{b}$ trên giá của vectơ $\vec{a}$ (H.4.15b). Kết quả này được gọi là *định lí chiếu*.



Hình 4.15b

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = 3$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

b) Tính độ dài cạnh BC.

c) Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Tính $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Giải

a) Do tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = 3$, nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 3 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{9}{2}.$$

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ và do đó:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3^2 - \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{27}{2};$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}^2 = \left(-\frac{9}{2}\right) - 3^2 = -\frac{27}{2}.$$

b) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Từ đó

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = 27.$$

Suy ra $BC = 3\sqrt{3}$.

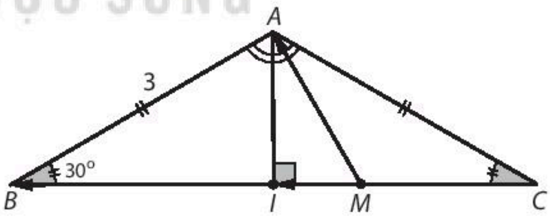
c) Gọi I là trung điểm của BC (H.4.16). Do M thuộc cạnh BC và $MB = 2MC$, I là trung điểm của BC, nên theo kết quả của Ví dụ 2, Bài 9, ta có $\overrightarrow{MB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Suy ra

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{IB}$$
$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}.$$

Từ đó, theo định lí chiếu, ta được

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CB}^2 = 3.$$



Hình 4.16

Nhận xét

– Để tính độ dài của một đoạn thẳng XY, trước hết ta biểu thị vectơ $\overrightarrow{XY}$ theo hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ đã biết, rồi tính bình phương vô hướng của vectơ $\overrightarrow{XY}$.

– Nhờ vào kết quả của Ví dụ 2, Bài 9, ta chứng minh được $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{2}{9}\left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\right)$. Bởi vậy cũng có thể tính tích vô hướng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ nhờ vào việc tính các tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho hai điểm $A(1; 3)$ và $B(7; 1)$.

a) Tính chu vi của tam giác *OAB*.

b) Chứng minh rằng *OA* vuông góc với *AB*. Tính diện tích của tam giác *OAB*.

c) Gọi *M* là trung điểm của *AB*. Tính số đo góc $\widehat{BOM}$.

Giải

a) Do $A(1; 3)$ và $B(7; 1)$ suy ra

$$OA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}; OB = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}; AB = \sqrt{(7-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{40}.$$

Suy ra chu vi của tam giác *OAB* bằng

$$OA + AB + OB = \sqrt{10} + \sqrt{50} + \sqrt{40} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{10}.$$

b) Theo kết quả của phần a), ta có $OA^2 + AB^2 = 10 + 40 = 50 = OB^2$. Từ đó, theo định lí Pythagore tam giác *OAB* vuông tại *A*, hay $OA \perp AB$.

Suy ra diện tích tam giác *OAB* bằng $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = 10$ (đ.v.d.t).

c) Do *M* là trung điểm của *AB* nên $M(4; 2)$. Suy ra $OM = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ và do đó

$$\cos\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM}\right|} = \frac{7 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{20}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Suy ra $0^\circ < \left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}\right) < 90^\circ$ và do đó $\widehat{BOM} = \left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}\right) \approx 18^\circ 26' 6''$.

Nhận xét. Ta có thể chứng minh được *OA* vuông góc với *AB* nhờ vào tích vô hướng, mà không cần phải tính độ dài của các đoạn thẳng như sau:

Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{OA} = (1; 3)$, $\overrightarrow{AB} = (6; -2)$.

Suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) = 0$.

Từ đó, do các vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ đều khác $\vec{0}$, suy ra $OA \perp AB$.

Một cách khái quát, để chứng minh hai đường thẳng *MN* và *PQ* vuông góc với nhau, ta chứng minh $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$.

C – Bài tập

4.29. Cho tam giác đều ABC có độ dài các cạnh bằng 1.

a) Gọi M là trung điểm của BC. Tính tích vô hướng của các cặp vectơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi N là điểm đối xứng với B qua C. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$.

c) Lấy điểm P thuộc đoạn AN sao cho $AP = 3PN$. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{MP}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Tính độ dài đoạn MP.

4.30. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AD.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AC và BM vuông góc với nhau.

b) Gọi H là giao điểm của AC, BM. Gọi N là trung điểm của AH và P là trung điểm của CD. Chứng minh rằng tam giác NBP là một tam giác vuông.

4.31. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$. Dựng ra phía ngoài tam giác hai tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm BC, BD, CE. Chứng minh rằng:

a) AM vuông góc với DE;

b) BE vuông góc với CD;

c) Tam giác MNP là một tam giác vuông cân.

4.32. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 8$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$.

a) Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

b) Tính số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

4.33. Cho tam giác ABC không cân. Gọi D, E, F theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C; gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

4.34. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(2; 1)$ và $B(4; 3)$.

a) Tìm toạ độ của điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ của điểm D sao cho tam giác ABD vuông cân tại A.

4.35. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(1; 4)$ và $C(9; 2)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm toạ độ các đỉnh B, D, biết rằng tung độ của B là một số âm.

4.36. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(1; 1)$ và $B(7; 5)$.

a) Tìm toạ độ của điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều A và B.

b) Tìm toạ độ của điểm D thuộc trục tung sao cho vectơ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất.

4.37. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(-3; 2)$, $B(1; 5)$ và $C(3; -1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ấy.

b) Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm toạ độ của I.

4.38. Cho ba điểm M, N, P. Nếu một lực $\vec{F}$ không đổi tác động lên một chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, thì các công sinh bởi lực $\vec{F}$ trong hai trường hợp sau có mối quan hệ gì với nhau?

a) Chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ M đến N rồi tiếp tục từ N đến P.

b) Chất điểm chuyển động thẳng từ M đến P.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A – Trắc nghiệm

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

4.39. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Xét các vectơ có hai điểm mút lấy từ các điểm A, B, C, D và O. Số các vectơ khác vectơ - không và cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ là

A. 6. B. 3.

C. 4. D. 2.

4.40. Cho đoạn thẳng AC và B là một điểm nằm giữa A, C. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là một khẳng định đúng?

A. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng hướng.

B. Hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

C. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

D. Hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng.

4.41. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi K, L, M, N tương ứng là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Trong các vectơ có đầu mút lấy từ các điểm A, B, C, D, K, L, M, O, có bao nhiêu vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AK}$?

A. 2.	B. 6.

C. 4.	D. 8.

4.42. Cho hình thoi $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 1 và $\widehat{DAB} = 120^{\circ}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.	B. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

C. $\left|\overrightarrow{BD}\right| = 1$.	D. $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 1$.

4.43. Cho tam giác ABC đều, trọng tâm G, có độ dài các cạnh bằng 3. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

A. $\sqrt{3}$.	B. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.	D. $2\sqrt{3}$.

4.44. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 3$, $AC = 4$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ bằng

A. $\sqrt{13}$.	B. $2\sqrt{13}$.

C. 4.	D. 2.

4.45. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $BC = 4$ và $\widehat{ABC} = 60^{\circ}$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$ bằng

A. 2.	B. $\sqrt{19}$.

C. 4.	D. $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

4.46. Cho tam giác ABC và điểm I sao cho $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khẳng định nào sau đây là một khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.	B. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AI} = \dfrac{\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}}{-3}$.	D. $\overrightarrow{AI} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}$.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

4.47. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm cạnh BC. Khẳng định nào sau đây là một khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$.
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.
C. $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MG}$.
D. $3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{AM}$.

4.48. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(-3; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 6)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ là

A. $(1; 2)$.
B. $(2; 1)$.
C. $(1; -2)$.
D. $(-2; 1)$.

4.49. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(-3; 3)$, $B(5; -2)$ và $G(2; 2)$. Toạ độ của điểm C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC là

A. $(5; 4)$.
B. $(4; 5)$.
C. $(4; 3)$.
D. $(3; 5)$.

4.50. Cho hình vuông $ABCD$ với độ dài cạnh bằng a. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

A. $a^2\sqrt{2}$.
B. $\dfrac{a^2}{\sqrt{2}}$.
C. a^2.
D. $\dfrac{a^2}{2}$.

4.51. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng khác $\vec{0}$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ tương đương với

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
D. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

4.52. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng khác $\vec{0}$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ tương đương với

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
D. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

4.53. Cho tam giác ABC có $AB = 1$, $BC = 2$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ bằng

A. $\sqrt{3}$.
B. $-\sqrt{3}$.
C. 3.
D. -3.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

4.54. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(2; -1)$, $B(-1; 5)$ và $C(3m; 2m-1)$. Tất cả các giá trị của tham số m sao cho $AB \perp OC$ là

A. $m = -2$.
B. $m = 2$.
C. $m = \pm 2$.
D. $m = 3$.

4.55. Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB = 1$, $AC = 2$. Lấy M, N, P tương ứng thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $2BM = MC$, $CN = 2NA$, $AP = 2PB$. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$.
B. $-\dfrac{1}{2}$.
C. 0.
D. 1.

4.56. Cho tam giác ABC đều các cạnh có độ dài bằng 1. Lấy M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC$, $CN = 2NA$ và $AM \perp NP$. Tỉ số của $\dfrac{AP}{AB}$ bằng

A. $\dfrac{5}{12}$.
B. $\dfrac{7}{12}$.
C. $\dfrac{5}{7}$.
D. $\dfrac{7}{5}$.

4.57. Cho tam giác ABC đều có độ dài các cạnh bằng $3a$. Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MC}$ bằng

A. $\dfrac{a^2}{2}$.
B. $-\dfrac{a^2}{2}$.
C. a^2.
D. $-a^2$.

4.58. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AC}\right|$ là

A. đường tròn tâm A bán kính BC.
B. đường thẳng đi qua A và song song với BC.
C. đường tròn đường kính BC.
D. đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

B – Tự luận

4.59. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AD. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của BD với AM, CN. Xét các vectơ khác $\vec{0}$, có đầu mút lấy từ các điểm $A, B, C, D, M, N, I, J, O$.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

a) Hãy chỉ ra những vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$; những vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh rằng $BI = IJ = JD$.

4.60. Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy các điểm M, N, không trùng với B và C sao cho $BM = MN = NC$.

a) Chứng minh rằng hai tam giác ABC và AMN có cùng trọng tâm.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{GB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{GC} = \vec{v}$. Hãy biểu thị các vectơ sau qua hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$: $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{GN}$.

4.61. Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\widehat{CAB} = 60^\circ$.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b) Lấy các điểm M, N thoả mãn $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NB} + x\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ ($x \neq -1$). Xác định x sao cho AN vuông góc với BM.

4.62. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, CD. Lấy P thuộc đoạn DM và Q thuộc đoạn BN sao cho $DP = 2PM$, $BQ = xQN$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$ qua hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

b) Tìm x để A, P, Q thẳng hàng.

4.63. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Lấy điểm A', B' sao cho $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{CA}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C$. Chứng minh rằng GG' song song với AB.

4.64. Cho tứ giác lồi $ABCD$, không có hai cạnh nào song song. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm AB, CD. Gọi K, L, M, N lần lượt là trung điểm của AF, CE, BF, DE.

a) Chứng minh rằng tứ giác $KLMN$ là một hình bình hành.

b) Gọi I là giao điểm của KM, LN. Chứng minh rằng E, I, F thẳng hàng.

4.65. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = 90^\circ$, $BC = 1$, $AB = 2$ và $AD = 3$. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Gọi N là trung điểm CD, G là trọng tâm tam giác MCD, và I là điểm thuộc cạnh CD sao cho $9IC = 5ID$. Chứng minh rằng A, G, I thẳng hàng.

c) Tính độ dài các đoạn thẳng AI và BI.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

4.66. Cho bốn điểm *A*, *B*, *C*, *D* trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

4.67. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; -4)$, $\vec{c} = (-5; 3)$.

a) Tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$.

b) Tìm góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b} + \vec{c}$.

4.68. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho ba điểm $A(-2; 1)$, $B(1; 4)$ và $C(5; -2)$.

a) Chứng minh rằng *A*, *B*, *C* là ba đỉnh của một tam giác. Tìm toạ độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

b) Tìm toạ độ trực tâm *H* và tâm đường tròn ngoại tiếp *I* của tam giác *ABC*.

4.69. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho ba điểm $A(2; -1)$, $B(5; 3)$ và $C(-2; 9)$.

a) Tìm điểm *D* thuộc trục hoành sao cho *B*, *C*, *D* thẳng hàng.

b) Tìm điểm *E* thuộc trục hoành sao cho $EA + EB$ nhỏ nhất.

c) Tìm điểm *F* thuộc trục tung sao cho vectơ $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}$ có độ dài ngắn nhất.

4.70. Một ô tô có khối lượng 2,5 tấn chạy từ chân lên đỉnh một con dốc thẳng. Tính công của trọng lực tác động lên xe, biết dốc dài 50 m và nghiêng 15° so với phương nằm ngang (trong tính toán, lấy gia tốc trọng trường bằng 10 m/s^2).

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

CHƯƠNG V

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

BÀI 12

SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

A – Kiến thức cần nhớ

- Trong nhiều trường hợp, ta không biết hoặc khó biết số đúng (kí hiệu là $\overline{a}$) mà chỉ tìm được giá trị khác xấp xỉ nó. Giá trị này được gọi là *số gần đúng*, kí hiệu là a.
- Giá trị $\Delta_a = |a - \overline{a}|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng $\overline{a}$ và số gần đúng a, được gọi là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng a.
- Nếu $\Delta_a \le d$ thì $a - d \le \overline{a} \le a + d$, khi đó ta viết $\overline{a} = a \pm d$ và hiểu là số đúng $\overline{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$. Do d càng nhỏ thì a càng gần $\overline{a}$ nên d được gọi là *độ chính xác của số gần đúng*.
- *Sai số tương đối* của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a, là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, tức là $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.
- Số thu được sau khi thực hiện quy tắc làm tròn số được gọi là *số quy tròn*. Số quy tròn là một số gần đúng của số ban đầu.
- Cho số gần đúng a với độ chính xác d. Khi được yêu cầu làm tròn số a mà không nói rõ làm tròn đến hàng nào thì ta làm tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn 1 đơn vị của hàng đó.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Bình thực hiện thí nghiệm và xác định được khối lượng riêng của nước tinh khiết ở 4 °C là 999,985 kg/m^3.

a) Đây là số đúng hay số gần đúng?

b) Giả sử số đúng cho khối lượng riêng của nước tinh khiết ở 4 °C là 1 000 kg/m^3. Hãy tính sai số tuyệt đối.

c) Làm tròn 999,985 kg/m^3 đến hàng phần trăm, từ đó xác định số quy tròn.

Giải

a) Giá trị 999,985 kg/m^3 là số gần đúng cho khối lượng riêng của nước tinh khiết ở 4 °C.

b) Số đúng là $\overline{a} = 1000$ kg/m^3, số gần đúng là $a = 999{,}985$ kg/m^3. Do đó sai số tuyệt đối là $|a - \overline{a}| = 1\,000 - 999{,}985 = 0{,}015$.

c) Chữ số ở hàng phần nghìn là 5 nên ta tăng chữ số ở hàng phần trăm lên 1 đơn vị, từ đó suy ra số quy tròn là 999,99 kg/m^3.

Ví dụ 2. Cho kết quả hai phép đo như sau:

(1) Đo vận tốc trung bình của một chiếc xe ô tô chạy trên đường cao tốc cho kết quả là 100 ± 5 km/h.

(2) Đo vận tốc trung bình của một người đi bộ cho kết quả là $5 \pm 0{,}5$ km/h.

a) Đánh giá sai số tương đối của mỗi phép đo.

b) Dựa vào sai số tương đối, phép đo nào chính xác hơn?

Giải

a) Đối với phép đo (1), ta có $a = 100$, $d = 5$ nên sai số tương đối là $\delta_1 \le \dfrac{5}{100} = 5\%$.

Đối với phép đo (2), ta có $a = 5$, $d = 0{,}5$ nên sai số tương đối là $\delta_2 \le \dfrac{0{,}5}{5} = 10\%$.

b) Dựa vào đánh giá sai số tương đối ở câu a, có thể kết luận phép đo (1) chính xác hơn phép đo (2).

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

C – Bài tập

5.1. Hãy xác định số đúng, số gần đúng trong các trường hợp sau:

a) Kết quả 2 lần đo chiều cao đỉnh Phan-Xi-Păng như sau:

– Kết quả đo của người Pháp năm 1909 là 3 143 m;

– Kết quả đo của Cục Đo đạc, Bản đồ và Thông tin địa lí Việt Nam ngày 26-6-2019 là 3 147,3 m.

(Theo *Thông tấn xã Việt Nam*)

b) Hai giá trị thể hiện chu vi của hình tròn trung tâm sân bóng đá 11 người với bán kính 9,15 m là: $18{,}3\pi$ m và 57,462 m.

5.2. Dùng thước đo có độ chia nhỏ nhất 1 cm để đo chiều cao của một học sinh được giá trị là 163 cm. Đánh giá sai số tuyệt đối và sai số tương đối của phép đo này.

5.3. Biết e là một số vô tỉ và $2,7182 < e < 2,7183$. Lấy $e \approx 2,71828$.

a) Xác định số đúng, số gần đúng.

b) Đánh giá sai số tuyệt đối và sai số tương đối của phép xấp xỉ này.

5.4. Sử dụng máy tính cầm tay tìm số gần đúng (làm tròn đến hàng phần nghìn) cho các số sau:

a) $1 + 2\sqrt{3}$; b) $4\pi - 1$.

5.5. Thực hiện làm tròn số:

a) 23 167 đến hàng trăm;

b) 18,062 đến hàng phần trăm.

5.6. Thực hiện làm tròn các số gần đúng sau:

a) Phép đo hiệu điện thế với kết quả là $120 \pm 7,5$ V;

b) Phép đo gia tốc trọng trường với kết quả là $9,78 \pm 0,20$ m/s^2.

BÀI 13

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

A – Kiến thức cần nhớ

– Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm là các số cho ta biết thông tin về vị trí trung tâm của mẫu số liệu.

– *Số trung bình* của mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kí hiệu là $\overline{x}$ được tính bằng công thức: $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

+ Trong trường hợp mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số thì số trung bình được tính theo công thức:

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k}{n},$$

trong đó m_k là tần số của giá trị x_k và $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

+ Ý nghĩa: Số trung bình là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

– *Trung vị* (kí hiệu là Me) là giá trị chia đôi mẫu số liệu, nghĩa là trong dãy số liệu được sắp xếp theo thứ tự tăng dần thì trung vị ở vị trí chính giữa.

+ Để tìm trung vị của một mẫu số liệu, ta thực hiện như sau:

  • Sắp xếp các giá trị trong mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.

  • Nếu số giá trị của mẫu số liệu là số lẻ thì giá trị chính giữa của dãy là trung vị, còn nếu là số chẵn thì trung vị là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa của dãy.

+ Ý nghĩa: Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường.

– Các điểm Q_1, Q_2, Q_3 chia dãy dữ liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị được gọi là các *tứ phân vị*.

– Để tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu có n giá trị, ta làm như sau:

+ Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.

+ Tìm trung vị. Giá trị này là Q_2.

+ Tìm trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_1.

+ Tìm trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_3.

Q_1 được gọi là *tứ phân vị thứ nhất* hay tứ phân vị dưới, Q_3 được gọi là *tứ phân vị thứ ba* hay tứ phân vị trên, Q_2 chính là trung vị.

– *Mốt* của mẫu số liệu là giá trị hoặc những giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất. Người ta thường dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau. Mốt có thể không là duy nhất.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Theo báo cáo của WTTC (World Travel and Tourism Council), mức tăng đóng góp của ngành du lịch cho GDP năm 2021 so với năm 2020 tại một số khu vực (đơn vị: %) như sau:

$$-42 \quad -58 \quad -41 \quad -52 \quad -50 \quad -56 \quad -37 \quad -53 \quad -45 \quad -54.$$

a) Tính số trung bình, trung vị của dãy số liệu trên.

b) Giải thích ý nghĩa các giá trị thu được.

Giải

a) Cỡ mẫu $n = 10$. Số trung bình là: $\overline{x} = \dfrac{-42 + (-58) + \ldots + (-54)}{10} = -48,8.$

Sắp xếp các giá trị trên theo thứ tự không giảm:

$$-58 \quad -56 \quad -54 \quad -53 \quad -52 \quad -50 \quad -45 \quad -42 \quad -41 \quad -37.$$

Vì $n = 10$ là số chẵn nên trung vị là trung bình cộng của hai giá trị ở các vị trí thứ 5 và thứ 6:

$$\text{Me} = \frac{-52 + (-50)}{2} = -51.$$

b) Về trung bình, mức đóng góp của ngành du lịch cho GDP năm 2021 giảm khoảng 48,8% so với mức đóng góp của ngành du lịch cho GDP năm 2020.

Trung vị Me = –51% tức là có 50% số khu vực (5 khu vực) có mức giảm dưới 51% và có 50% số khu vực (5 khu vực) có mức giảm trên 51%.

Ví dụ 2. Tính các tứ phân vị cho dữ liệu về diện tích đất (đơn vị: km^2) của 266 quốc gia và vùng lãnh thổ cho số liệu như sau:

$$Q_1 = 20\ 574{,}1; \quad Q_2 = 194\ 690; \quad Q_3 = 1\ 249\ 825.$$

(Theo *World Bank*)

a) Có bao nhiêu quốc gia, vùng lãnh thổ có diện tích đất lớn hơn 194 690 km^2?

b) Diện tích đất của Việt Nam khoảng 310 070 km^2 có thuộc nhóm 25% quốc gia và vùng lãnh thổ có diện tích đất lớn nhất không?

Giải

a) Vì $Q_2 = 194\ 690$ nên có 133 số quốc gia, vùng lãnh thổ (50%) có diện tích đất lớn hơn 194 690 km^2.

b) Do diện tích đất của Việt Nam nhỏ hơn $Q_3 = 1\ 249\ 825$ nên Việt Nam không thuộc nhóm 25% quốc gia và vùng lãnh thổ có diện tích đất lớn nhất.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

C – Bài tập

5.7. Để ước lượng xem trung bình cần thực hiện bao nhiêu lần gieo xúc xắc để xuất hiện mặt 6 chấm, một nhóm học sinh đã gieo xúc xắc và đếm số lần thực hiện cho đến khi xuất hiện mặt 6 chấm cho kết quả như sau:

8 5 7 10 4 6 7 5 7 6 4 5 5 7 6 5 4 2.

Tính số lần gieo trung bình để xuất hiện mặt 6 chấm.

5.8. Tại một lớp học chứng chỉ Tin học, nếu mức độ hoàn thành trung bình 5 bài kiểm tra của học viên lớn hơn hoặc bằng 85% thì học viên sẽ được giảm 30% học phí. An đã làm 4 bài kiểm tra với kết quả là 94%, 82%, 78%, 80%. Hỏi bài cuối cùng An cần đạt được ít nhất bao nhiêu phần trăm để được giảm 30% học phí?

5.9. Tổng số ca mắc Covid-19 tính đến ngày 26-8-2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh và một số tỉnh lân cận được thống kê như sau:

190 174 81 182 19 728 19 048 8 155 6 103 5 807
4 544 3 760 3 297 2 541 2 000 1 934 1 602 1 195.

(Theo *Bộ Y tế*)

a) Tính số trung bình và trung vị cho dãy số liệu trên.

b) Giải thích tại sao số trung bình và trung vị lại khác nhau nhiều?

5.10. Lan thống kê số anh, chị, em ruột của các bạn trong lớp thu được bảng số liệu sau:

Số anh, chị, em ruột	0	1	2	3
Số bạn	4	25	5	1

Xác định mốt cho mẫu số liệu trên và giải thích ý nghĩa.

5.11. Thống kê GDP năm 2020 (đơn vị: tỉ đô la Mỹ) của 10 nước tại khu vực Đông Nam Á được kết quả như sau:

Brunei	Campuchia	Indonesia	Lào	Malaysia
12,02	25,95	1 059,64	19,08	338,28
Myanmar	Philippines	Singapore	Thái Lan	Việt Nam
81,26	362,24	339,98	501,89	340,82

(Theo *statista.com*)

a) Tìm các tứ phân vị cho dãy số liệu trên.

b) Giải thích ý nghĩa của các tứ phân vị này. Việt Nam có thuộc nhóm 25% quốc gia có GDP năm 2020 cao nhất trong khu vực Đông Nam Á không?

5.12. Diện tích của các tỉnh đồng bằng sông Cửu Long năm 2022 (đơn vị: nghìn km^2) là:

1,44 3,54 2,67 2,39 4,49 5,29 3,31
1,62 2,36 3,38 1,53 6,35 2,51.

a) Tính số trung bình, trung vị cho dãy số liệu trên.

b) Giải thích ý nghĩa của mỗi số thu được ở câu a.

BÀI 14

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN

A – Kiến thức cần nhớ

– Các số đặc trưng đo độ phân tán là các số cho ta biết thông tin về sự biến động mẫu số liệu. Các số này càng lớn thì số liệu biến động càng nhiều hay càng phân tán.

– *Khoảng biến thiên*, kí hiệu là R, là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

– *Khoảng tứ phân vị*, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu số tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất tức là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$. Khoảng tứ phân vị đo độ phân tán của 50% số liệu ở giữa của dãy số liệu đã được sắp xếp.

– Với dãy số liệu $x_1, x_2, ..., x_n$, nếu gọi số trung bình là $\overline{x}$ thì *phương sai* là giá trị $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$.

– Căn bậc hai của phương sai, $s = \sqrt{s^2}$, được gọi là *độ lệch chuẩn*.

– Trong mẫu số liệu có khi gặp những giá trị quá lớn hoặc quá nhỏ so với đa số các giá trị khác, chúng được gọi là các giá trị bất thường. Để xác định giá trị bất thường ta sử dụng quy tắc sau: các giá trị lớn hơn $Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q$ hoặc bé hơn $Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q$, trong đó Δ_Q là khoảng tứ phân vị, được xem là *giá trị bất thường*.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Nhiệt độ trung bình (đơn vị: °C) các tháng trong năm tại Hà Nội và Thành phố Hồ Chí Minh được cho trong bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hà Nội	16,4	17,0	20,2	23,7	27,3	28,8	28,9	28,2	27,2	24,6	21,4	18,2
Thành phố Hồ Chí Minh	25,8	26,7	27,9	28,9	28,3	27,5	27,1	27,1	26,8	26,7	26,4	25,7

(Theo *weatherspark.com*)

a) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn cho mỗi dãy số liệu trên.

b) Có nhận xét gì về sự biến động của nhiệt độ trung bình các tháng trong năm tại hai thành phố này?

Giải

a) Với dãy số liệu về nhiệt độ trung bình các tháng tại Hà Nội:

Giá trị nhỏ nhất là 16,4.

Giá trị lớn nhất là 28,9.

Khoảng biến thiên là: $R = 28,9 - 16,4 = 12,5$.

Dãy số liệu sắp xếp theo thứ tự không giảm:

16,4 17,0 18,2 20,2 21,4 23,7 24,6 27,2 27,3 28,2 28,8 28,9.

Trung vị là $Q_2 = (23,7 + 24,6) : 2 = 24,15$.

Nửa dữ liệu bên trái Q_2 là:

16,4 17,0 18,2 20,2 21,4 23,7.

Do đó, $Q_1 = (18,2 + 20,2) : 2 = 19,2$.

Nửa dữ liệu bên phải Q_2 là:

24,6 27,2 27,3 28,2 28,8 28,9.

Do đó, $Q_3 = (27,3 + 28,2) : 2 = 27,75$.

Khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 27,75 - 19,2 = 8,55$.

Số trung bình của mẫu số liệu là: $\overline{x} = \dfrac{16,4 + 17,0 + ... + 18,2}{12} \approx 23,49$.

Độ lệch chuẩn:

$$s_1 = \sqrt{\frac{(16,4 - 23,49)^2 + ... + (18,2 - 23,49)^2}{12}} \approx 4,52.$$

Làm tương tự với dãy số liệu về nhiệt độ trung bình cho các tháng tại Thành phố Hồ Chí Minh ta có:

Khoảng biến thiên: $R = 3,2$.

Khoảng tứ phân vị là: $\Delta_Q = 27,7 - 26,55 = 1,15$.

Độ lệch chuẩn $s_2 = 0,91$.

b) Khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn của dãy số liệu về nhiệt độ trung bình các tháng tại Thành phố Hồ Chí Minh đều nhỏ hơn các số đặc trưng này tại Hà Nội nên ta khẳng định rằng nhiệt độ trung bình các tháng ở Thành phố Hồ Chí Minh ít biến động hơn.

Ví dụ 2. Điểm thi môn Toán của các bạn trong lớp được cho trong bảng sau:

Điểm	0	5	6	7	10
Tần số	1	10	20	10	1

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên. Có nên dùng đại lượng này để đo độ phân tán của mẫu số liệu trên không?

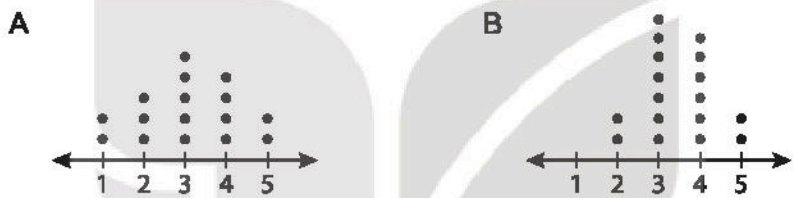
Giải

Điểm thi thấp nhất là 0, cao nhất là 10. Do đó, khoảng biến thiên là $10 - 0 = 10$.

Hầu hết các bạn trong lớp có điểm 5, 6, 7 vì vậy dùng khoảng biến thiên để đo độ phân tán của dãy số liệu này sẽ không hợp lí.

C – Bài tập

5.13. Cho hai biểu đồ chấm điểm biểu diễn hai mẫu số liệu A, B như sau:



trong đó, mỗi chấm biểu diễn một giá trị trong mẫu số liệu.

Không tính, hãy cho biết:

a) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu nào lớn hơn.

b) Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu có như nhau không.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

5.14. Cho hai dãy số liệu sau:

A: 4 5 7 9 10;

B: 9 10 12 14 15.

Không tính, hãy cho biết:

a) Khoảng biến thiên của hai dãy có như nhau không.

b) Độ lệch chuẩn của hai dãy có như nhau không.

5.15. Điểm số của hai vận động viên bắn cung trong 10 lần bắn thử để chuẩn bị cho Olympic Tokyo 2020 được ghi lại như sau:

Vận động viên A: 10 9 8 10 9 9 9 10 9 8;

Vận động viên B: 5 10 10 10 10 7 9 10 10 10.

a) Tìm khoảng biến thiên và độ lệch chuẩn của mỗi dãy số liệu trên.

b) Vận động viên nào có thành tích bắn thử ổn định hơn?

5.16. Trong các dãy số liệu sau, dãy nào có độ lệch chuẩn lớn nhất?

(a)	98	99	100	101	102.
(b)	2	4	6	8	10.
(c)	2	10.			

5.17. Mẫu số liệu sau là chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn trong tổ của Lan:

165 168 157 162 165 165 179 148 170 167.

a) Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Khoảng tứ phân vị có bị ảnh hưởng bởi chiều cao của bạn cao nhất, bạn thấp nhất không?

5.18. Bình dùng đồng hồ đo thời gian để một vật rơi tự do (đơn vị: giây) từ vị trí A đến vị trí B trong 10 lần cho kết quả như sau:

0,398 0,399 0,408 0,410 0,406 0,405 0,402 0,401 0,290 0,402.

Bình nghĩ là giá trị 0,290 ở lần đo thứ 9 không chính xác. Hãy kiểm tra nghi ngờ của Bình.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A – Trắc nghiệm

5.19. Số quy tròn của số gần đúng $167,23 \pm 0,07$ là

A. 167,23. B. 167,2. C. 167,3. D. 167.

5.20. Biết độ ẩm không khí tại Hà Nội là $51\% \pm 2\%$. Khi đó

A. Sai số tuyệt đối $\delta = 2\%$.

B. Sai số tuyệt đối $\delta = 1\%$.

C. Độ chính xác $d = 2\%$.

D. Độ chính xác $d = 1\%$.

5.21. Một học sinh thực hành đo chiều cao của một toà tháp cho kết quả là 200 m. Biết chiều cao thực của toà tháp là 201 m, sai số tương đối là

A. 0,5%. B. 1%. C. 2%. D. 4%.

5.22. Điểm thi học kì môn Toán của một nhóm bạn như sau:

8 9 7 10 7 5 7 8.

Mốt của mẫu số liệu trên là

A. 5. B. 7. C. 8. D. 9.

5.23. Trung vị của mẫu số liệu trong Bài 5.22 là

A. 6. B. 7.

C. 7,5. D. 8.

5.24. Bổ sung thêm số 9 vào mẫu số liệu trong Bài 5.22 thì trung vị của mẫu số liệu mới là

A. 6. B. 7.

C. 7,5. D. 8.

5.25. Cho mẫu số liệu sau:

156 158 160 162 164.

Nếu bổ sung hai giá trị 154, 167 vào mẫu số liệu này thì so với mẫu số liệu ban đầu:

A. Trung vị và số trung bình đều không thay đổi.

B. Trung vị thay đổi, số trung bình không thay đổi.

C. Trung vị không thay đổi, số trung bình thay đổi.

D. Trung vị và số trung bình đều thay đổi.

5.26. Cho mẫu số liệu sau:

156 158 160 162 164.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên là

A. 156. B. 157.

C. 158. D. 159.

5.27. Mẫu số liệu trong Bài 5.26 có khoảng biến thiên là

A. 2. B. 4.

C. 6. D. 8.

5.28. Mẫu số liệu mà tất cả các số trong mẫu này bằng nhau có phương sai là

A. –1. B. 0.

C. 1. D. 2.

5.29. Số giá trị trong mẫu số liệu nhỏ hơn tứ phân vị dưới Q_1 chiếm khoảng

A. 25% số giá trị của dãy.

B. 50% số giá trị của dãy.

C. 75% số giá trị của dãy.

D. 100% số giá trị của dãy.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

5.30. Khoảng tứ phân vị Δ_Q là

A. $Q_2 - Q_1$. B. $Q_3 - Q_1$.

C. $Q_3 - Q_2$. D. $(Q_1 + Q_3) : 2$.

B – Tự luận

5.31. Một nhân viên kiểm tra định kì một cột đo xăng dầu, kết quả đo (trong một thời gian nhất định) là 50 lít. Đồng hồ của cột đo xăng dầu báo là 50,3 lít. Theo quy định, sai số lớn nhất đối với kiểm tra định kì là 0,5% (Theo *Văn bản kĩ thuật đo lường Việt Nam, ĐLVN 10 : 2017*). Giá trị trên đồng hồ của cột đo xăng dầu có nằm trong giới hạn cho phép không?

5.32. Điểm tổng kết học kì các môn học của An được cho như sau:

Toán	Vật lí	Hoá học	Ngữ văn	Lịch sử	Địa lí	Tin học	Tiếng Anh
7,6	8,5	7,4	7,2	8,6	8,3	8,0	9,2

a) Biết rằng điểm môn Toán và môn Ngữ văn tính hệ số 2, các môn khác tính hệ số 1. Điểm trung bình học kì của An là bao nhiêu?

b) Thực hiện làm tròn điểm trung bình tính được ở câu a đến hàng phần mười.

5.33. Z-score là chỉ số được tổ chức y tế thế giới WHO sử dụng để đánh giá tình trạng dinh dưỡng của người thông qua các thông số chiều cao, cân nặng và độ tuổi.

$$Z = \frac{H - \overline{h}}{s},$$

trong đó $\overline{h}$ là chiều cao trung bình của lứa tuổi, s là độ lệch chuẩn, H là chiều cao người đang xét. Nếu $Z < -3$ thì người đó suy dinh dưỡng thể thấp còi, mức độ nặng; Nếu $-3 \le Z < -2$ thì người đó suy dinh dưỡng thể thấp còi, mức độ vừa.

Hỏi một người 17 tuổi, cao 155 cm có bị suy dinh dưỡng thể thấp còi không? Nếu bị thì ở mức độ nào? Biết rằng chiều cao trung bình của nam 17 tuổi là 175,16 cm và độ lệch chuẩn là 7,64 cm (Theo *WHO*).

5.34. Thời gian chờ của 10 bệnh nhân (đơn vị: phút) tại một phòng khám được ghi lại như sau:

5 17 22 9 8 11 2 16 55 5.

a) Tính số trung bình, trung vị và mốt của dãy số liệu trên.

b) Nên dùng đại lượng nào để biểu diễn thời gian chờ của bệnh nhân tại phòng khám này?

5.35. Một học sinh dùng một dụng cụ đo đường kính *d* của một viên bi (đơn vị: mm) thu được kết quả sau:

Lần đo	1	2	3	4	5	6	7	8
d	6,50	6,51	6,50	6,52	6,49	6,50	6,78	6,49

a) Bạn Minh cho rằng kết quả đo ở lần 7 không chính xác. Hãy kiểm tra khẳng định này của Minh.

b) Tìm giá trị xấp xỉ cho đường kính của viên bi.

5.36. Thu nhập theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của các công nhân trong một công ty nhỏ được cho như sau:

5,5	6,0	8,0	7,0	7,5	8,0	7,0	9,5
12,0	10,0	4,5	11,0	13,0	9,5	8,5	4,0.

a) Tính thu nhập trung bình theo tháng của công nhân công ty này.

b) Trong đại dịch Covid-19 công ty có chính sách hỗ trợ 25% công nhân có thu nhập thấp nhất. Số nào trong các tứ phân vị giúp xác định các công nhân trong diện được hỗ trợ? Tính giá trị tứ phân vị đó.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

CHƯƠNG I – MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

Bài 1 MỆNH ĐỀ

1.1. a) Sai. b) Sai. c) Đúng.

1.2. a) 106 không phải là hợp số.

b) Tổng số đo ba góc trong một tam giác không bằng 180°.

1.3. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$: "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tứ giác $ABCD$ có AB // CD và $AB = CD$".

Mệnh đề đảo $Q \Rightarrow P$: "Nếu tứ giác $ABCD$ có AB // CD và $AB = CD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành".

1.4. a) Hai góc bằng nhau là điều kiện cần để hai góc đó đối đỉnh.

b) Số tự nhiên chia hết cho 3 là điều kiện cần để tổng các chữ số của nó chia hết cho 3.

1.5. a) Sai. b) Đúng.

1.6. a) Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$: "$x^2 + y^2 = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$ và $y = 0$".

Giả sử ta có $x^2 + y^2 = 0$. Vì $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$ nên $x^2 + y^2 \geq 0$ với mọi số thực x, y. Do vậy từ $x^2 + y^2 = 0$ ta suy ra $x^2 = 0$, $y^2 = 0$. Do đó $x = 0$ và $y = 0$.

Vậy mệnh đề $P \Rightarrow Q$ đúng. Ngược lại, nếu có $x = 0$ và $y = 0$, hiển nhiên ta suy ra $x^2 + y^2 = 0$. Vậy mệnh đề $Q \Rightarrow P$ đúng.

Vậy mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng.

b) Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$: "$x^2 > 0$ khi và chỉ khi $x > 0$".

Giả sử $x^2 > 0$. Vì $x^2 \geq 0$ với mọi số thực x, nên từ $x^2 > 0$ ta suy ra $x^2 \neq 0$ hay $x \neq 0$. Điều này không suy ra $x > 0$. Do đó, mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai.

Vậy mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ sai.

1.7. Mệnh đề có thể phát biểu dưới dạng: "Có một số thực x thoả mãn $x^4 < x^2$".

Mệnh đề này đúng vì tồn tại $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ thoả mãn $\frac{1}{16} = x^4 < x^2 = \frac{1}{4}$.

Mệnh đề phủ định của P là: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^4 \geq x^2$".

1.8. Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là:
"Có một số tự nhiên có chữ số tận cùng bằng 0 không chia hết cho 10".

Bài 2 TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1.9. a) Đ; b) Đ; c) S; d) S.

1.10. a) $A = \{1; 4; 5; 8\}$; $B = \{2; 4; 7; 8; 9\}$.

b) $A \cup B = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 9\}$. Từ đó suy ra $n(A \cup B) = 7$.

c) $A \setminus B = \{1; 5\}$.

d) $B \setminus A = \{2; 7; 9\}$.

1.11. $A = \{4n \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 4\}$; $B = \{(-3)^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 4\}$; $C = \{M \mid MA = MB\}$.

1.12. $B = \varnothing$.

1.13. a) Đúng; b) Sai; c) Đúng.

1.14. a) $\varnothing$

b) $(-2; 1)$ 

c) $(-2; 3]$ 

d) $(-3; 2)$ 

1.15. a) Có 36 người hoặc thích chơi thể thao, hoặc thích câu cá.

b) Có 3 người thích cả câu cá và chơi thể thao.

c) Có 12 người chỉ thích câu cá, không thích chơi thể thao.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A – Trắc nghiệm

1.16. D	**1.19.** A	**1.22.** C	**1.25.** B	**1.28.** A	**1.31.** A
1.17. B	**1.20.** C	**1.23.** B	**1.26.** C	**1.29.** C	**1.32.** B
1.18. D	**1.21.** B	**1.24.** A	**1.27.** B	**1.30.** B	

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

B – Tự luận

1.33. a) Có thể viết mệnh đề dưới dạng: "$\forall n \in \mathbb{N}$, nếu n có tận cùng là 0 thì n chia hết cho 10". Mệnh đề này là mệnh đề đúng vì với bất cứ số tự nhiên nào có tận cùng bằng 0, số đó đều chia hết cho 10.

b) Có thể viết mệnh đề dưới dạng: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$". Mệnh đề này sai vì với $x = 0$ thì $x^2 = 0$.

c) Mệnh đề đúng.

1.34. a) Mệnh đề đúng; b) Mệnh đề đúng.

1.35. a) Đ; b) Đ; c) Đ; d) S.

1.36. $A = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right\}$; $B = \{2; 3\}$.

1.37. a) $A = [-4; 4]$; $B = (-3; 8]$;

b) $A \cap B = (-3; 4]$; $A \setminus B = [-4; -3]$; $B \setminus A = (4; 8]$.

1.38. $3 < a < 5$.

1.39. a) S; b) S; c) Đ.

1.40. Ta có: 20 + 18 – 4 = 34 học sinh hoặc thích môn Toán hoặc thích môn Ngữ văn. Do đó có 40 – 34 = 6 học sinh không thích môn nào trong hai môn Toán và Ngữ văn.

1.41. Sử dụng biểu đồ Ven để biểu diễn các tập hợp.

a) Gọi x là số cửa hàng bán cả quần áo và giày.

Ta có: $(26 - x) + x + (16 - x) = 34 \Rightarrow x = 8$.

Vậy số cửa hàng bán cả quần áo và giày là 8 cửa hàng.

b) Số cửa hàng chỉ bán một trong hai loại quần áo hoặc giày là

18 + 8 = 26 (cửa hàng).

c) Số cửa hàng không bán cả hai loại hàng hoá trên là

46 – 8 – 26 = 12 (cửa hàng).

CHƯƠNG II – BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài 3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

2.1. a) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ d: $-3x + y = 4$ chứa gốc toạ độ và bỏ đi đường thẳng d.

b) Miền nghiệm của bất phương trình $-3x + y \leq 4$ là nửa mặt phẳng bờ

d: $-3x + y = 4$ chứa gốc toạ độ.

Miền nghiệm của bất phương trình $-3x + y \geq 4$ là nửa mặt phẳng bờ

d: $-3x + y = 4$ không chứa gốc toạ độ.

2.2. Xét bất phương trình $2x + 3y + 3 \leq 5x + 2y + 3$.

Chuyển vế ta được $3x - y \geq 0$. Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d: $3x - y = 0$ chứa điểm $(1; 0)$.

2.3. Đường thẳng d đi qua hai điểm $(0; -2)$ và $(4; 0)$ có phương trình $x - 2y = 4$. Vì miền nghiệm chứa gốc toạ độ nên bất phương trình cần tìm là $x - 2y \leq 4$.

2.4. a) Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d: $x + 2y = -4$ chứa gốc toạ độ.

b) Các điểm $(x; y)$ cần tìm là $(-1; -1)$, $(-2; -1)$.

2.5. a) Theo đề bài, ta có:

$140x + 180y \leq 170(x + y)$.

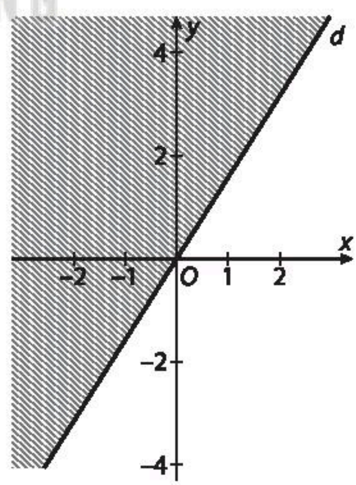
Bằng cách chuyển vế ta được bất phương trình bậc nhất hai ẩn $30x - 10y \geq 0$ hay $3x - y \geq 0$.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x - y \geq 0$.

Bước 1. Vẽ đường thẳng d: $3x - y = 0$ trên mặt phẳng toạ độ.

Bước 2. Lấy điểm $M(1; 0)$ không thuộc d và điểm M thoả mãn $3 \cdot 1 - 0 = 3 > 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm $M(1; 0)$.

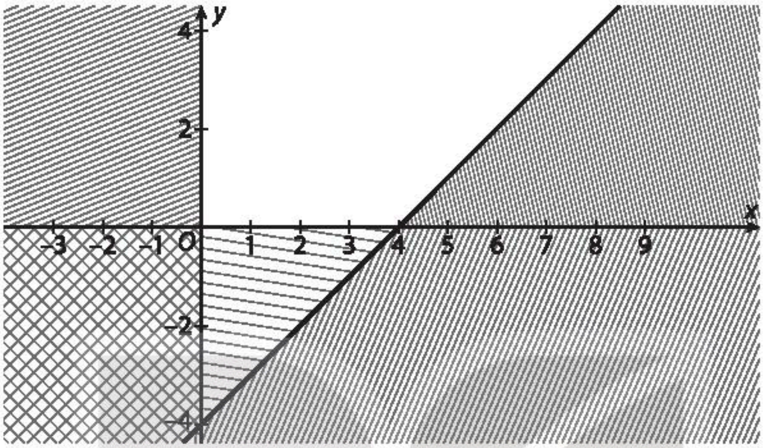


KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bài 4 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

2.6. a) Miền nghiệm là miền tam giác ABC với $A(-1; 5)$, $B(-1; 0)$ và $C(4; 0)$.

b) Miền nghiệm là miền không bị gạch như hình dưới đây.

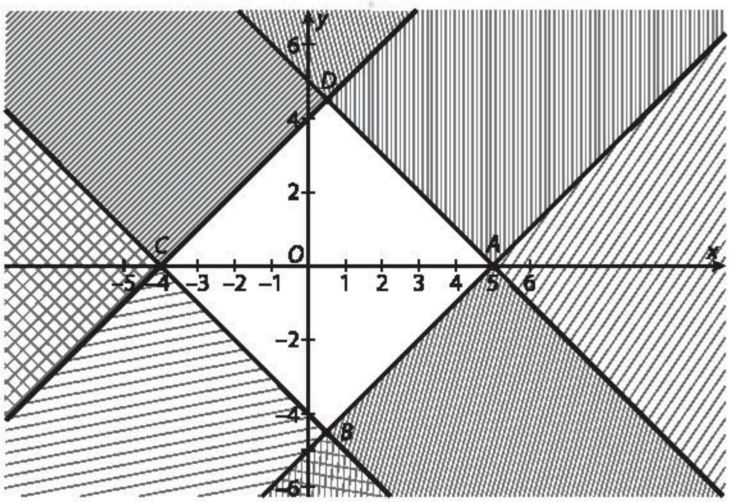


c) Miền nghiệm là miền hình chữ nhật $ABCD$ với $A(3; 3)$, $B(3; -2)$, $C(-1; -2)$ và $D(-1; 3)$.

2.7. Miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là miền tam giác AOB với $A(6; 0)$, $B(0; 6)$ và $O(0; 0)$.

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tam giác: $F(0; 0) = 0$, $F(6; 0) = 12$ và $F(0; 6) = 18$. So sánh các giá trị đó ta được giá trị lớn nhất cần tìm là $F(0; 6) = 18$ và giá trị nhỏ nhất cần tìm là $F(0; 0) = 0$.

2.8. Miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hình vuông $ABCD$ với $A(5; 0)$, $B(0,5; -4,5)$, $C(-4; 0)$ và $D(0,5; 4,5)$.



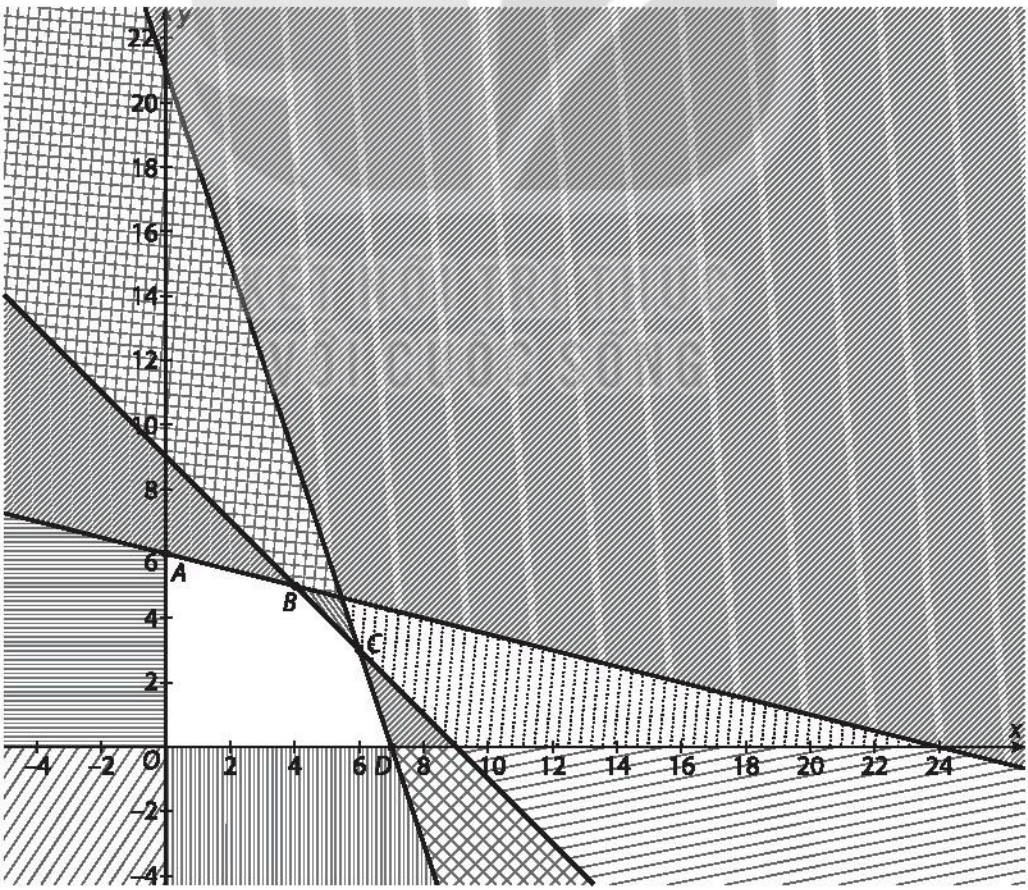
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác: $F(5; 0) = 20$, $F(0,5; -4,5) = \frac{31}{2}$, $F(-4; 0) = -16$ và $F(0,5; 4,5) = -\frac{23}{2}$. So sánh các giá trị đó ta được giá trị lớn nhất cần tìm là $F(5; 0) = 20$ và giá trị nhỏ nhất cần tìm là $F(-4; 0) = -16$.

2.9. Gọi x và y lần lượt là số lít nước loại A và B cần pha chế. Khi đó, theo đề bài ta có hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 9 \\ 45x + 15y \leq 315 \\ 0,5x + 2y \leq 12. \end{cases}$$

Số điểm thưởng đội chơi nhận được là $F(x; y) = 60x + 80y$ (điểm). Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ với $(x; y)$ thoả mãn hệ trên.

Miền nghiệm của hệ là miền ngũ giác $OABCD$ với $A(0; 6)$, $B(4; 5)$, $C(6; 3)$, $D(7; 0)$ và $O(0; 0)$.



Tính giá trị của F tại các đỉnh của ngũ giác: $F(0; 6) = 480$, $F(4; 5) = 640$, $F(6; 3) = 600$, $F(7; 0) = 420$ và $F(0; 0) = 0$. So sánh các giá trị đó ta được giá trị lớn nhất cần tìm là $F(4; 5) = 640$. Vậy cần pha chế 4 lít nước loại A và 5 lít nước loại B để số điểm thưởng nhận được là lớn nhất.

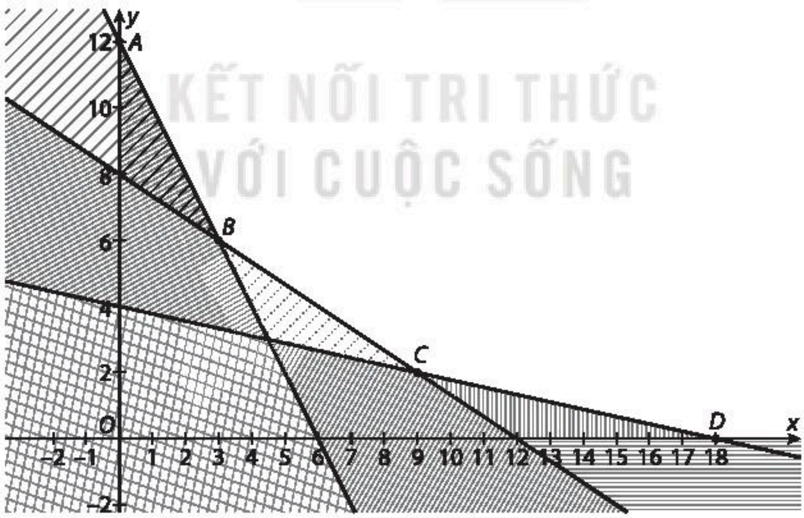
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A – Trắc nghiệm

2.10. C	**2.13.** D	**2.16.** C	**2.19.** D	**2.22.** A
2.11. B	**2.14.** A	**2.17.** B	**2.20.** C	**2.23.** B
2.12. C	**2.15.** D	**2.18.** B	**2.21.** B	**2.24.** A

2.24. Gọi x và y tương ứng là số bao loại X và loại Y. Khi đó, theo đề bài ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 12 \\ 2x + 9y \geq 36 \\ 2x + 3y \geq 24. \end{cases}$

Miền nghiệm của hệ là miền có các đỉnh là $A(0; 12)$, $B(3; 6)$, $C(9; 2)$, $D(18; 0)$ (miền không bị gạch).



Chi phí để mua hai loại thức ăn là $F(x; y) = 250x + 200y$ (nghìn đồng).

Thay giá trị tại các đỉnh ta có $F(0; 12) = 2\,400$, $F(3; 6) = 1\,950$, $F(9; 2) = 2\,650$, $F(18; 0) = 4\,500$. Do đó, giá trị nhỏ nhất là $F(3; 6) = 1\,950$. Vậy chi phí nhỏ nhất để mua hai loại thức ăn là 1,95 triệu đồng.

B – Tự luận

2.25. a) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ d: $x + y = -4$ chứa gốc toạ độ.

b) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ d: $2x - y = 5$ chứa gốc toạ độ.

c) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ d: $x + 2y = 0$ chứa điểm $A(-1; 0)$, không kể đường thẳng d.

d) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ d: $-x + 2y = 0$ chứa điểm $A(-1; 0)$, không kể đường thẳng d.

2.26. a) Miền nghiệm là miền tam giác ABC bỏ đi hai cạnh AB, AC, với $A(4; 0)$ và $B(10; 6)$ và $C(10; 0)$.

b) Miền nghiệm là miền hình thang $ABCD$ với $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$, $C(1; 1)$ và $D(-1; 1)$.

c) Hệ vô nghiệm.

2.27. Miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là hình thang $ABCD$ với $A(-5; -1)$, $B(5; -1)$, $C(3; 1)$ và $D(-3; 1)$. Tính giá trị của F tại các đỉnh ta được:

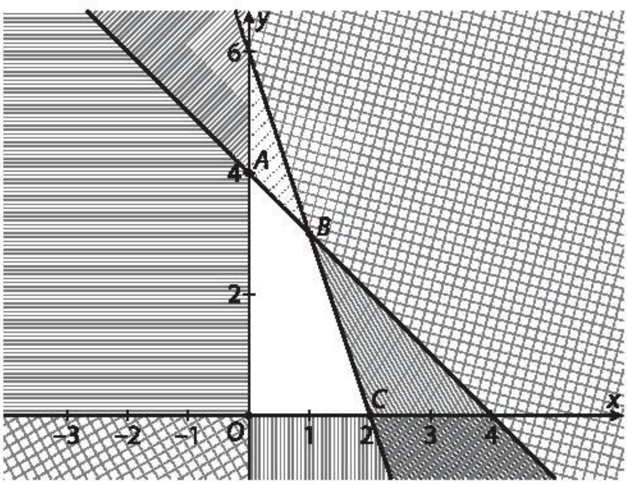
$$F(-5; -1) = -13,\ F(5; -1) = 7,\ F(3; 1) = 9,\ F(-3; 1) = -3.$$

Vậy giá trị lớn nhất là $F(3; 1) = 9$ và giá trị nhỏ nhất là $F(-5; -1) = -13$.

2.28. Gọi x và y lần lượt là số tấn sản phẩm loại A và loại B mà phân xưởng sản xuất được. Khi đó, theo đề bài ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4. \end{cases}$

Số tiền lãi phân xưởng thu được là $F(x; y) = 2x + 1{,}6y$ (triệu đồng). Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ với $(x; y)$ thoả mãn hệ trên.

Miền nghiệm của hệ là miền tứ giác $OABC$ với $O(0; 0)$, $A(0; 4)$, $B(1; 3)$ và $C(2; 0)$.



Tính giá trị của F tại các đỉnh ta được $F(0; 4) = \dfrac{32}{5}$, $F(1; 3) = \dfrac{34}{5}$, $F(2; 0) = 4$, $F(0; 0) = 0$. Khi đó giá trị lớn nhất cần tìm là $F(1; 3) = \dfrac{34}{5}$. Vậy số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng có thể thu được là 6,8 triệu đồng.

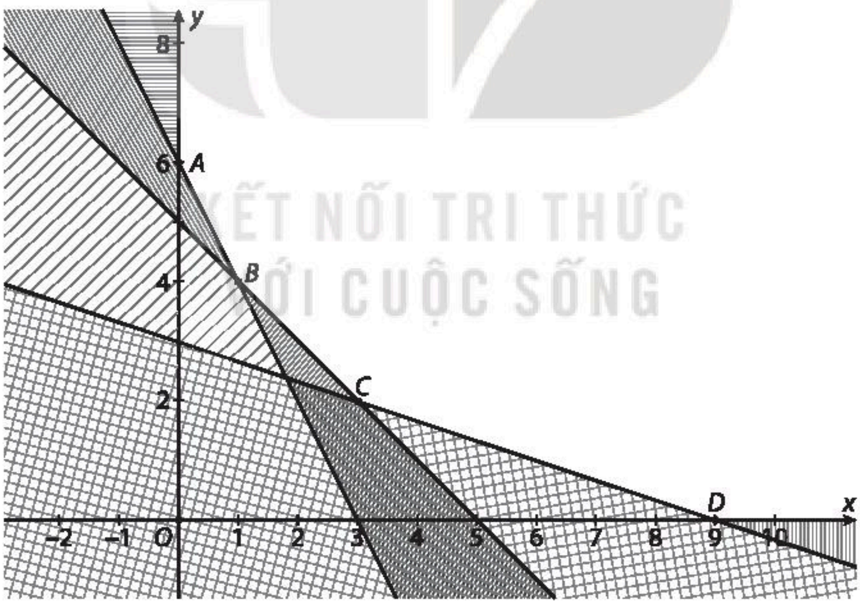
2.29. a) Gọi x và y lần lượt là số cốc đồ uống *I* và *II* thoả mãn điều kiện đề bài.

Khi đó ta có $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Hơn nữa, để người ăn kiêng được cung cấp đủ lượng calo và vitamin thì $60x + 60y \geq 300$, $12x + 6y \geq 36$ và $10x + 30y \geq 90$.

Từ đó, ta có hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 60x + 60y \geq 300 \\ 12x + 6y \geq 36 \\ 10x + 30y \geq 90 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 5 \\ 2x + y \geq 6 \\ x + 3y \geq 9. \end{cases}$$

Miền nghiệm là miền không bị gạch với các đỉnh $A(0; 6)$, $B(1; 4)$, $C(3; 2)$, $D(9; 0)$ như hình dưới đây.



b) Chi phí cho hai loại đồ uống là $F(x; y) = 12x + 15y$ (nghìn đồng).

c) Ta tính giá trị của F tại các đỉnh: $F(0; 6) = 90$, $F(1; 4) = 72$, $F(3; 2) = 66$, $F(9; 0) = 108$. Do đó F nhỏ nhất tại $(x; y) = (3; 2)$.

Vậy người đó cần uống 3 cốc đồ uống *I* và 2 cốc đồ uống *II* để đạt được các mục tiêu đề ra.

CHƯƠNG III – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Bài 5 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

3.1. Đáp số:

a) $A = 0$.

b) $B = 0$.

c) Do $5^\circ = 90^\circ - 85^\circ$, $25^\circ = 90^\circ - 65^\circ$, nên theo Tính chất 4-a), ta có

$\cos 5^\circ = \sin 85^\circ$, $\cos 25^\circ = \sin 65^\circ$.

Từ đó, theo tính chất 4-c), ta được

$$C = \left(\sin^2 85^\circ + \cos^2 85^\circ\right) + \left(\sin^2 65^\circ + \cos^2 65^\circ\right) + \cos^2 45^\circ = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

d) Do $73^\circ + 107^\circ = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$ nên theo hệ thức cơ bản, ta có:

$$\frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} + 12\sin^2 107^\circ = 12\left(\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ\right) = 12. \qquad (1)$$

$$\tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ = \tan 75^\circ \cdot \left(-\cot 75^\circ\right) = -1. \qquad (2)$$

Do $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên theo hệ thức cơ bản, ta có

$$\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ = \tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ = 1. \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $D = 12 - 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$.

e) Do $148^\circ + 32^\circ = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ$ và $72^\circ + 18^\circ = 90^\circ$ nên

$$E = 4\tan 32^\circ \cdot \left(-\cot 32^\circ\right) \cdot \cos 60^\circ + 5\left(-\cot 72^\circ\right)^2 \cdot \cos^2 18^\circ + 5\cos^2 18^\circ$$

$$= 4 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 1 = 3.$$

3.2. HD. Sử dụng hệ thức cơ bản, chú ý do $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$. Đáp số: $F = \frac{23}{16}$.

3.3. **HD.** Sử dụng hệ thức cơ bản, chú ý do $\tan\alpha > 0$ nên α là góc nhọn.

Đáp số: a) $G = \sqrt{5}$; b) $H = 5$.

3.4. Do $\tan\alpha = \sqrt{2} > 0$ nên α là góc nhọn và $\cos\alpha > 0$. Chia cả tử và mẫu của K cho $\cos^3\alpha \neq 0$, ta được

$$\begin{aligned}K &= \frac{\tan^3\alpha + \tan\alpha + 2\tan^2\alpha - 4}{\tan\alpha\cdot\left(1+\tan^2\alpha\right) - \left(1+\tan^2\alpha\right)}\\ &= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}+4-4}{\sqrt{2}\cdot 3 - 3}\\ &= \frac{3\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}-1\right)} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right).\end{aligned}$$

3.5. a) **HD.** *Sử dụng hằng đẳng thức* $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ và hệ thức cơ bản.

b) **HD.** *Sử dụng hằng đẳng thức* $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ và hệ thức cơ bản.

c) *Sử dụng hệ thức cơ bản* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ta được

$$\begin{aligned}&\sqrt{\sin^4\alpha + 6\cos^2\alpha + 3} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}\\ &= \sqrt{\left(1-\cos^2\alpha\right)^2 + 6\cos^2\alpha + 3} + \sqrt{\left(1-\sin^2\alpha\right)^2 + 4\sin^2\alpha}\\ &= \sqrt{4+4\cos^2\alpha+\cos^4\alpha} + \sqrt{1+2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}\\ &= \left(2+\cos^2\alpha\right) + \left(1+\sin^2\alpha\right) = 4.\end{aligned}$$

3.6. a) Ngày 10/10 là ngày thứ 283 của năm không nhuận. Do đó, góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày này tại vĩ độ $\phi = 20^\circ$ bằng

$$\begin{aligned}\alpha &= 90^\circ - 20^\circ - \left|\cos\left(\left(\frac{2(283+10)}{365} - 1\right)\cdot 180^\circ\right)\right|\cdot 23{,}5^\circ\\ &= 70^\circ - \left|\cos\frac{221}{365}\cdot 180^\circ\right|\cdot 23{,}5^\circ \approx 62{,}35^\circ.\end{aligned}$$

b) **Chú ý.** Vĩ độ của nơi có góc nghiêng Mặt Trời α vào ngày thứ N trong năm bằng

$$\phi = 90^\circ - \alpha - \left|\cos\left(\frac{2(N+10)}{365} - 1\right)\cdot 180^\circ\right|\cdot 23{,}5^\circ.$$

Bài 6 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

3.7. a) Áp dụng định lí sin, tính được $b = 6\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$, $a = 12\sqrt{2}$.

b) Đáp số: $R = 12$.

c) Đáp số: $S = \frac{1}{2}bc\sin A = 36\left(\sqrt{3}+1\right)$.

d) Đáp số: $h_a = 3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$, $h_b = 6\sqrt{2}$, $h_c = 6\left(\sqrt{3}+1\right)$.

3.8. a) Đáp số: $\cos A = -\frac{5}{9}$.

b) Có thể tính diện tích theo công thức Heron hoặc công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A$.

Đáp số: $S = 10\sqrt{14}$.

c) Đáp số: $h_c = \frac{4\sqrt{14}}{3}$.

d) Sử dụng công thức $S = p \cdot r$. Đáp số: $r = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

3.9. a) Theo định lí côsin, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 21$.

Suy ra $c = \sqrt{21}$.

Áp dụng định lí sin, ta được $\sin A = \frac{a}{c} \cdot \sin C = \frac{4}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Suy ra $\widehat{A} \approx 49^\circ 6' 24''$.

Cũng vậy, tính được $\sin B = \frac{b}{c} \cdot \sin C = \frac{5}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.

Suy ra $\widehat{B} \approx 70^\circ 53' 36''$.

b) Đáp số: $S = 5\sqrt{3}$.

c) Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến (Ví dụ 3).

Đáp số: $m_a = \sqrt{19}$.

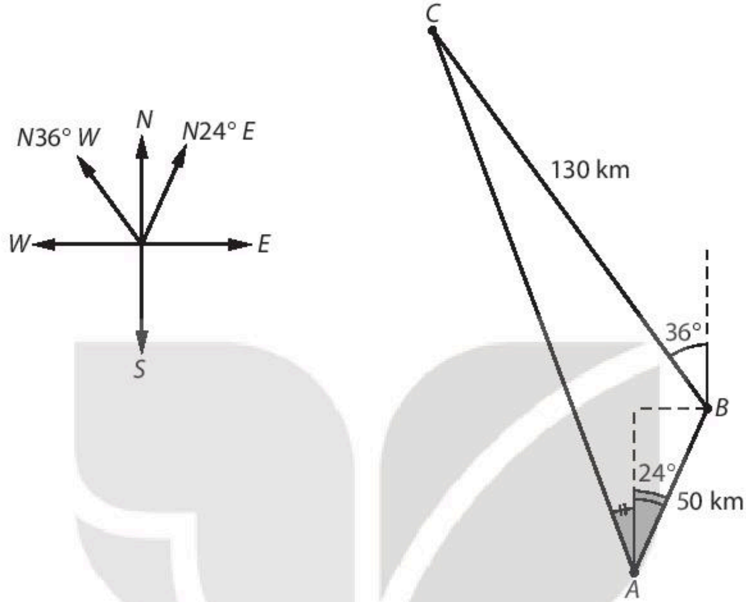
3.10. a) Từ giả thiết suy ra $\widehat{ABC} = \left(90^\circ - 24^\circ\right) + \left(90^\circ - 36^\circ\right) = 120^\circ$ (H.3.7).

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta được

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$$
$$= 2500 + 16900 - 2 \cdot 50 \cdot 130 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 25900.$$

Suy ra $AC = 10\sqrt{259} \approx 161$ (km).



Hình 3.7

b) Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta được $\sin\widehat{CAB} = \frac{BC}{AC} \cdot \sin\widehat{ABC} \approx 0{,}6993$.

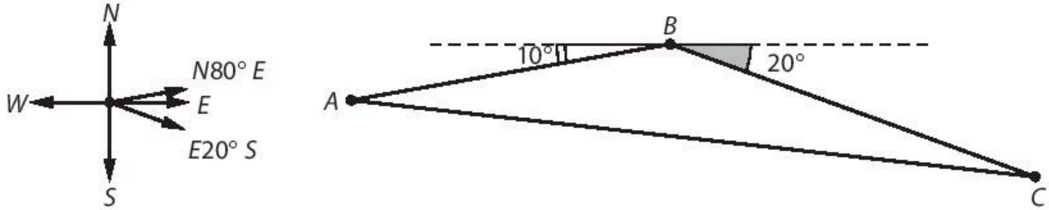
Suy ra $\widehat{CAB} \approx 44^\circ$ và do đó AC chếch về hướng tây một góc $44^\circ - 24^\circ = 20^\circ$ so với phương bắc.

Vậy hướng từ A tới C là $N20^\circ W$.

3.11. Coi điểm xuất phát là A, điểm tàu chuyển hướng là B và đích đến là C (H.3.8).

Theo giả thiết

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - (10^\circ + 20^\circ) = 150^\circ.$$



Hình 3.8

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Do tàu chạy từ A tới B với vận tốc 20 km/h trong 30 phút, nên

$$AB = 20 \cdot \frac{30}{60} = 10 \text{ (km)}.$$

Do tàu chạy từ B đến C với vận tốc 20 km/h trong 36 phút, nên

$$BC = 20 \cdot \frac{36}{60} = 12 \text{ (km)}.$$

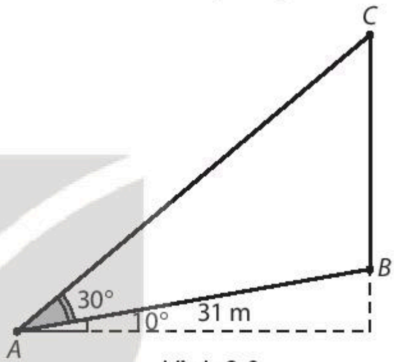
Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta được

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\widehat{ABC} = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 452.$$

Suy ra $AC \approx \sqrt{452} \approx 21$ (km).

3.12. Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC (H.3.9).

Đáp số: Chiều cao của cây là $h \approx 20{,}23$ (m).



Hình 3.9

3.13. a) Từ định lí côsin và công thức tính diện tích của tam giác, suy ra

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}.$$

Tương tự cũng có $\cot B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$, $\cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$.

Từ đó $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

b) **HD.** Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến.

3.14. a) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA; gọi G là trọng tâm của tam giác ABC (H.3.10). Khi đó $AG = \dfrac{2}{3}AM$, $BG = \dfrac{2}{3}BN$. Từ đó, theo định lí Pythagore ta có

$$c^2 = AB^2 = AG^2 + BG^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right)$$
$$= \frac{4}{9}\left(c^2 + \frac{a^2 + b^2}{4}\right).$$

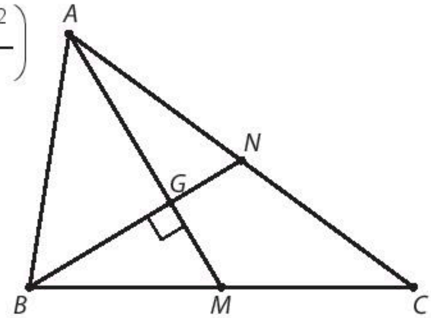
Suy ra $5c^2 = a^2 + b^2$.

b) Do $a^2 + b^2 = 5c^2$ nên $\cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} = \dfrac{c^2}{S}$. Mà

$$2(\cot A + \cot B) = 2\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}\right)$$

$$= \frac{c^2}{S}.$$

Suy ra $\cot C = 2(\cot A + \cot B)$.



Hình 3.10

3.15. HD. Áp dụng định lí sin, ta có $a : b : c = 1 : 2 : \sqrt{3}$.

Đáp số: $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$.

3.16. Từ định lí sin và công thức tính diện tích, suy ra diện tích của tam giác bằng

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{(2R\sin A)(2R\sin B)(2R\sin C)}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Từ đó, do $S = 2R^2 \sin A \sin B$, suy ra $\sin C = 1$ và do đó $\widehat{C} = 90^\circ$.

Suy ra điều phải chứng minh.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A – Trắc nghiệm

3.17. A	**3.23.** B	**3.29.** A	**3.35.** A
3.18. C	**3.24.** A	**3.30.** A	**3.36.** C
3.19. A	**3.25.** B	**3.31.** B	**3.37.** B
3.20. B	**3.26.** D	**3.32.** B	
3.21. A	**3.27.** A	**3.33.** A	
3.22. D	**3.28.** C	**3.34.** C	

B – Tự luận

3.38. a) $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $\cot\alpha = -2\sqrt{2}$.

b) $A = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{3}$; $B = -3$.

3.39. Do $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, suy ra $\cos 15^\circ = \sqrt{1-\sin^2 15^\circ} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Do đó $\tan 15^\circ = \dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 2-\sqrt{3}$.

a) $\sin 75^\circ = \sin\left(90^\circ - 15^\circ\right) = \cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

$$\cos 105^\circ = \cos\left(180^\circ - 75^\circ\right) = -\cos 75^\circ = -\cos\left(90^\circ - 15^\circ\right)$$
$$= -\sin 15^\circ = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

$\tan 165^\circ = \tan\left(180^\circ - 15^\circ\right) = -\tan 15^\circ = -2+\sqrt{3}$.

b) Đáp số: $A = -1$.

3.40. Đáp số: $\widehat{CAB} = 90^\circ$, $\widehat{BCA} = 30^\circ$ và $CA = \sqrt{3}$.

3.41. a) **HD.** Áp dụng định lí côsin.

Đáp số: $b = \sqrt{7}$, $\widehat{A} \approx 41^\circ$, $\widehat{C} \approx 19^\circ$.

b) Đáp số: $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $h_b = \dfrac{2S}{b} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

3.42. a) **HD.** Áp dụng định lí côsin.

Đáp số: $\widehat{C} = 120^\circ$, $\widehat{A} \approx 22^\circ$, $\widehat{B} \approx 38^\circ$.

b) Áp dụng định lí sin, ta được bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác là $R = \dfrac{c}{2\sin C} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$.

Do $a = 3$, $b = 5$ và $\widehat{C} = 120^\circ$ nên diện tích của tam giác là

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Từ đó, bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác là

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.43. Đáp số: $a = \sqrt{3}, h_a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

3.44. a) **HD.** Áp dụng định lí côsin.

Đáp số: $b = 7$, $\widehat{C} \approx 38^{\circ}$, $\widehat{A} \approx 82^{\circ}$.

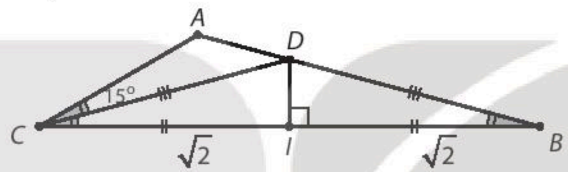
b) Đáp số: $h_b = \dfrac{20\sqrt{3}}{7}$.

c) Đáp số: $m_a = \sqrt{21}$.

3.45. a) Đáp số: $\widehat{A} = 135^{\circ}$, $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

b) Đáp số: $S = \sqrt{3} - 1$, $R = 2$.

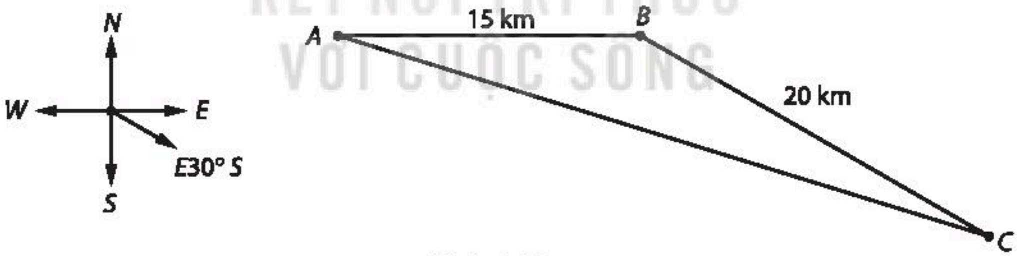
c) Do CD là phân giác của $\widehat{BCA}$ nên $\widehat{BCD} = \widehat{DCA} = 15^{\circ} = \widehat{CBD}$. Suy ra tam giác DBC cân tại D. Từ đó, nếu gọi I là trung điểm của BC thì $IC = IB = \sqrt{2}$ và $DI \perp BC$ (H.3.11).



Hình 3.11

Từ đó $CD = \dfrac{CI}{\cos\widehat{ICD}} = 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

3.46. a) Do ban đầu tàu chạy theo hướng đông từ A tới B, rồi chuyển sang $E30^{\circ}S$ chạy tới C, nên $\widehat{ABC} = 180^{\circ} - 30^{\circ} = 150^{\circ}$ (H.3.12).



Hình 3.12

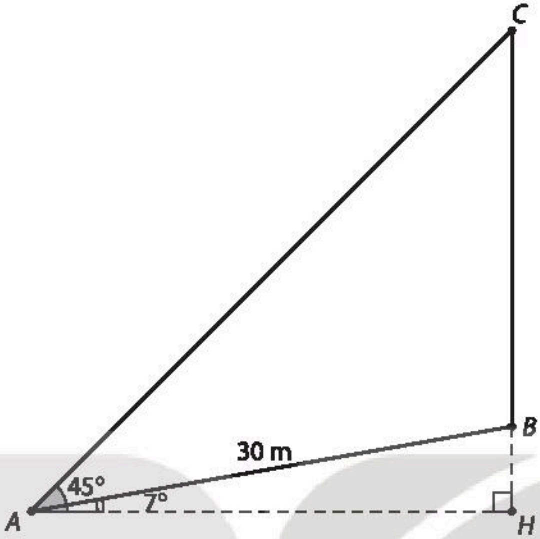
Áp dụng định lí côsin ta được $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\widehat{ABC} \approx 1\,144{,}6$ và do đó $AC \approx 34\text{km}$.

b) Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta được

$$\sin\widehat{CAB} = \frac{\sin\widehat{ABC}}{AC} \cdot BC \approx 0{,}2941.$$

Suy ra $\widehat{CAB} \approx 17^{\circ}$. Vậy từ A tới C là hướng $E17^{\circ}S$.

3.47. Coi người quan sát từ điểm A cách gốc cây B một khoảng bằng 30 m, nhìn ngọn cây C dưới góc 45° (H.3.13).



Hình 3.13

Do sườn đồi có độ dốc 12%, nên sườn đồi tạo với phương nằm ngang một góc $\widehat{BAH} \approx 7^{\circ}$.

Từ đó $\widehat{BAC} = \widehat{HAC} - \widehat{HAB} \approx 38^{\circ}$ và $\widehat{BCA} = 45^{\circ}$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC, ta được

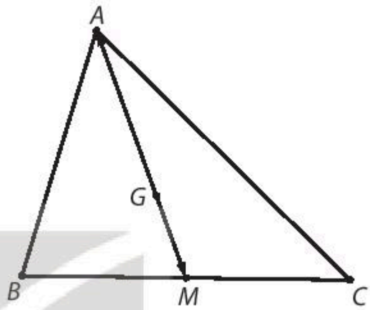
$$BC = \frac{AB}{\sin\widehat{BCA}} \cdot \sin\widehat{BAC} \approx 26(\text{m}).$$

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

CHƯƠNG IV – VECTƠ

Bài 7 CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

4.1. Do M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác, nên A, G, M thẳng hàng theo thứ tự đó và $AG = \dfrac{2}{3}AM$ (H.4.17).



Hình 4.17

Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}$ ngược hướng và $\left|\overrightarrow{GA}\right| = 2\left|\overrightarrow{GM}\right|$. Do đó $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 3\left|\overrightarrow{GM}\right|$.

Từ đó, các khẳng định a, c, d là các khẳng định đúng; khẳng định b là khẳng định sai.

4.2. Có, đó là vectơ $\vec{0}$.

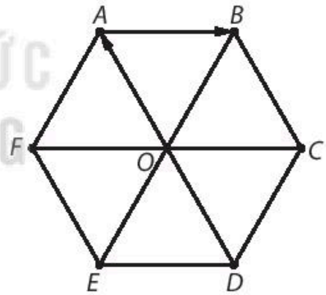
4.3. Với hai vectơ khác vectơ $\vec{0}$, cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng, hoặc chúng ngược hướng. Từ đó, nếu $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$ và $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{c}$ thì hai vectơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng.

4.4. Do $ABCDEF$ là lục giác đều tâm O (H.4.18), nên:

– Các cặp cạnh đối diện AB và ED, BC và EF, CD và FA song song và bằng nhau;

– Ba đường chéo chính AD, BE, CF đồng quy tại trung điểm của mỗi đường;

– Mỗi đường chéo chính song song với một cặp cạnh có đầu mút không thuộc đường chéo ấy.



Hình 4.18

Suy ra:

a) Các vectơ khác $\vec{0}$, cùng phương với $\overrightarrow{OA}$ là: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$.

b) Các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$.

4.5. a) Do AA' là đường kính của (O), nên $\widehat{ABA'} = \widehat{ACA'} = 90^\circ$ (H.4.19).

Suy ra $A'C \perp AC$ (1)

và $A'B \perp AB$. (2)

Do H là trực tâm của tam giác ABC nên

$BH \perp AC$ (3)

và $CH \perp AB$. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành.

Do đó $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$.

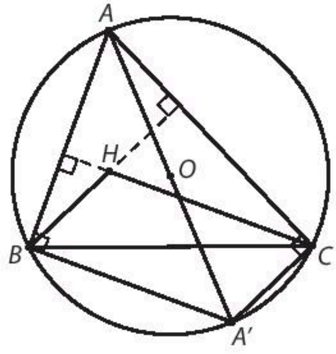
b) Do AA' là đường kính của (O), nên O là trung điểm của AA' (H.4.20). (5)

Do $BHCA'$ là hình bình hành, nên trung điểm M của BC cũng là trung điểm của HA'. (6)

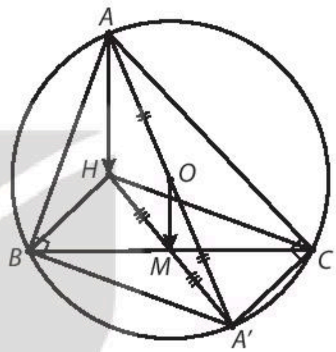
Từ (5) và (6) suy ra OM là đường trung bình của tam giác AHA'.

Do đó OM // AH và $OM = \dfrac{1}{2}AH$.

Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng và $|\overrightarrow{AH}| = 2|\overrightarrow{OM}|$.



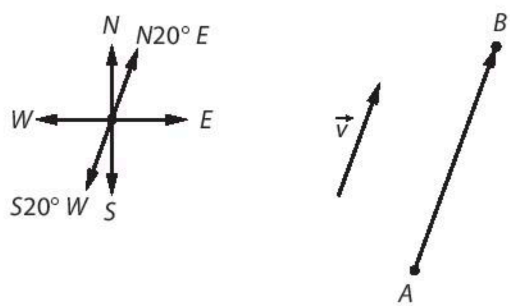
Hình 4.19



Hình 4.20

4.6. Ta sử dụng vectơ $\vec{v}$: $|\vec{v}| = 20$ để biểu thị cho vận tốc của tàu, vectơ $\overrightarrow{AB}$ để biểu thị cho quãng đường và hướng chuyển động của tàu từ A tới B (H.4.21). Do tàu chuyển động đều từ A, với vận tốc 20 km/h, trong 2 giờ tới B, nên $AB = |\overrightarrow{AB}| = 2|\vec{v}| = 40$ (km).

Vậy A cách B 40 km.



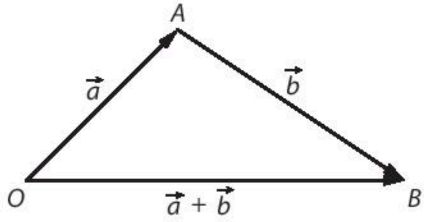
Hình 4.21

Do B ở về hướng $N20^{\circ}E$ so với A, nên A ở về hướng $S20^{\circ}W$ so với B.

Bài 8 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

4.7. Từ một điểm O bất kì, ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ rồi vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ (H.4.22).

Vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên O, A, B không thẳng hàng. Khi đó, trong tam giác OAB, ta có $OA - AB < OB < OA + AB$ hay là $|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.



Hình 4.22

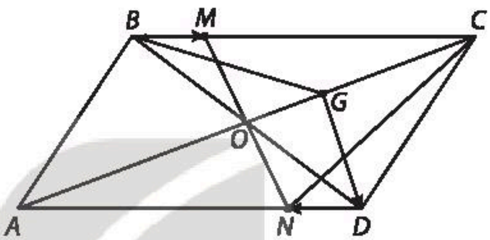
4.8. (H.4.23) a) **HD.** Chứng minh hai tam giác BOM và DON bằng nhau.

b) Do O là trung điểm của BD và MN nên $BMDN$ là một hình bình hành.

Suy ra $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$. (1)

Do G là trọng tâm tam giác BCD

nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. (2)



Hình 4.23

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DN}$. Từ đó và (1), (2) suy ra

$$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GC} + \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BM}\right) + \left(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DN}\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) + \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN}\right) = \vec{0}.$$

Suy ra G là trọng tâm tam giác MNC.

4.9. a) Theo tính chất kết hợp của phép cộng vectơ, ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{DA}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

b) Do $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$.

Do tính kết hợp của phép cộng, ta được $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$. (1)

Từ đó $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Do tính kết hợp, giao hoán của phép cộng vectơ, tính chất của vectơ $\vec{0}$, nên

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

4.10. a) Do D là trung điểm của BC, E là trung điểm của CA, F là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$.

Do $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$ nên tứ giác $CEFD$ là hình bình hành.

Từ đó $-\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF}$.

Suy ra $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{CB}$.

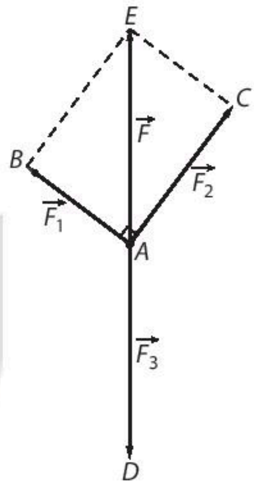
b) Giả sử tìm được điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MA}$. Khi đó, theo kết quả câu a, ta được $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MA}$. Suy ra tứ giác $ABCM$ là hình bình hành. Và do đó điểm M cần tìm đối xứng với B qua E.

c) Do $ABCM$ là một hình bình hành, nên $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

4.11. Ta sử dụng các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ lần lượt biểu thị cho các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ và vectơ $\overrightarrow{AE}$ biểu thị cho hợp lực $\overrightarrow{F}$ của $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ (H.4.24). Khi đó, do $\widehat{BAC} = 90^\circ$, nên tứ giác $ABEC$ là hình chữ nhật. Từ đó, do AB = 30 (N), AC = 40 (N), suy ra

$$\left|\overrightarrow{F}\right| = AE = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ (N)}.$$

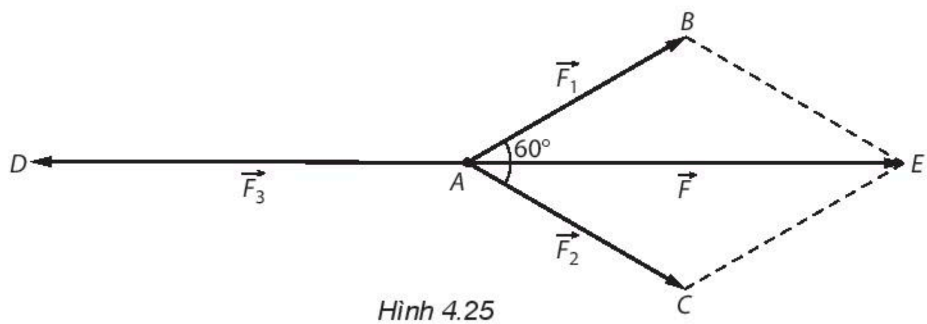
Do vật ở vị trí cân bằng, nên hai lực $\overrightarrow{F}$ và $\overrightarrow{F_3}$ có cùng cường độ và ngược hướng, tức là các vectơ $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AD}$ là các vectơ có cùng độ dài và ngược hướng. Bởi vậy, cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$ bằng $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F}\right| = AE = 50$ (N).



Hình 4.24

4.12. Ta sử dụng các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ lần lượt biểu thị cho các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ và vectơ $\overrightarrow{AE}$ để biểu thị cho hợp lực $\overrightarrow{F}$ của hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ (H.4.25). Khi đó, tứ giác $BACE$ là một hình bình hành. Từ đó, do $AB = AC = 2\sqrt{3}$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $BACE$ là một hình thoi và tam giác ABC là một tam giác đều.

Do đó $AE = 2 \cdot \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 6$.



Hình 4.25

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Do A ở vị trí cân bằng nên hai lực $\overrightarrow{F}$ và $\overrightarrow{F_3}$ có cùng cường độ và ngược hướng, tức là các vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AE}$ đối nhau. Bởi vậy, cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$ bằng $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F}\right| = AE = 6$ (N).

Bài 9 TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

4.13. Do D, E theo thứ tự là trung điểm của BC, CA (H.4.26), nên

$$\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

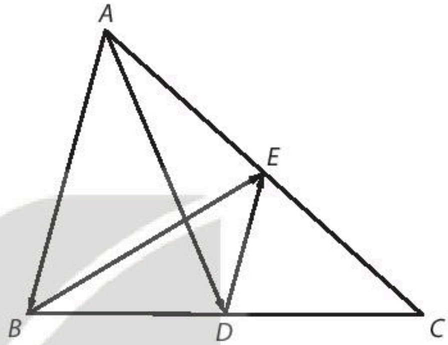
$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}. \qquad (2)$$

Theo quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB} \qquad (4)$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}. \qquad (5)$$



Hình 4.26

Từ (1) và (3) suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BE} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$.

Từ (3) và (4) suy ra $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD} - 2\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$.

Từ (4) và (5) suy ra $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AD} - \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}\right) = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$.

4.14. a) Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ với C là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OACB$ dựng trên hai cạnh OA, OB (H.4.27a).

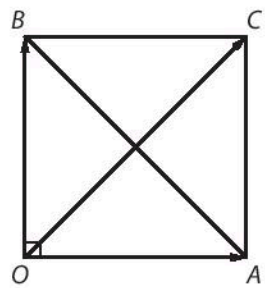
Do tam giác OAB vuông cân tại O, nên $OACB$ là hình vuông. Khi đó

$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = OC = \sqrt{OA^2 + OB^2} = a\sqrt{2}.$$

b) Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

Từ đó, do tam giác OAB vuông cân tại O, nên

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = AB = a\sqrt{2}.$$

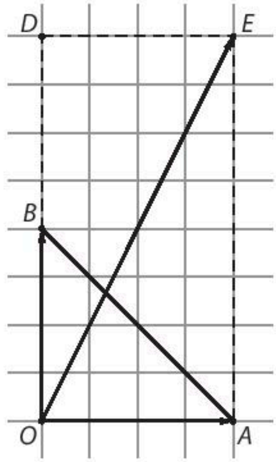


Hình 4.27a

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

c) Lấy điểm D đối xứng với O qua B (H.4.27b). Khi đó $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$. Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE}$ với E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OAED$ dựng trên hai cạnh OA, OD. Do tam giác OAB vuông cân tại O nên $OAED$ là hình chữ nhật, với $OA = a$, $OD = 2a$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{OE}\right| = OE = \sqrt{OA^2 + OD^2} = a\sqrt{5}$.



Hình 4.27b

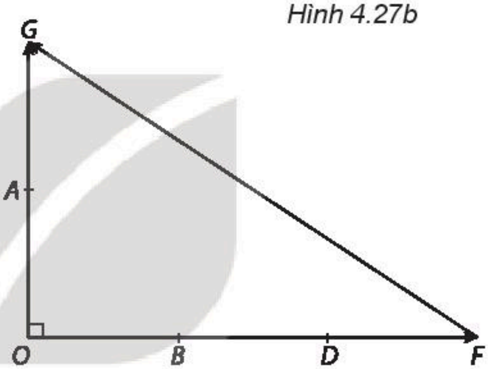
d) Lấy F đối xứng B qua D và lấy G đối xứng với O qua A (H.4.28). Khi đó $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OF} = 3\overrightarrow{OB}$. Suy ra

$$2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{FG}. \qquad (1)$$

Do cách dựng các điểm F, G, tam giác OFG vuông tại O, $OG = 2OA = 2a$, $OF = 3OB = 3a$.

Từ đó và (1) suy ra

$$\left|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{FG}\right| = FG$$
$$= \sqrt{OF^2 + OG^2} = a\sqrt{13}.$$



Hình 4.28

4.15. a) Do H là trực tâm của tam giác ABC, nên $BH \perp CA$, $CH \perp AB$. (1)

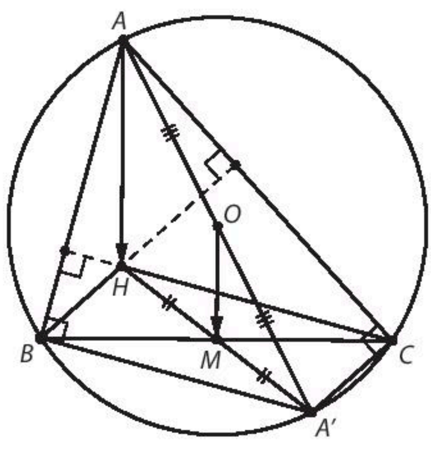
Kẻ đường kính AA' của đường tròn ngoại tiếp (O). Khi đó O là trung điểm của AA' (H.4.29). Hơn nữa $\widehat{A'CA} = 90^\circ = \widehat{A'BA}$, do đó $A'C \perp CA$, $A'B \perp AB$. Từ đó và (1) suy ra $A'C \parallel BH$, $A'B \parallel CH$ và do đó tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành. Mà M là trung điểm của BC, suy ra M cũng là trung điểm của HA'.

Trong tam giác AHA' có O là trung điểm của AA', M là trung điểm của $A'H$, suy ra OM là đường trung bình. Từ đó $AH \parallel OM$ và $AH = 2OM$. Suy ra $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

b) Do M là trung điểm của BC nên

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AH}.$$

Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}$. (1)



Hình 4.29

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

c) Gọi G là trọng tâm ΔABC nên ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$. Từ đó và (1) suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$. Bởi vậy hai vectơ $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OG}$ cùng phương hay O, G, H cùng thuộc một đường thẳng.

4.16. Do I là trung điểm của MN nên ta có $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$. (1)

Do M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IM}$. (2)

Do N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN}$. (3)

Từ (2), (3), theo quy tắc ba điểm, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}&=\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{ID}\right)\\&=4\overrightarrow{OI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)\\&=4\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{IM}+2\overrightarrow{IN}.\end{aligned}$$

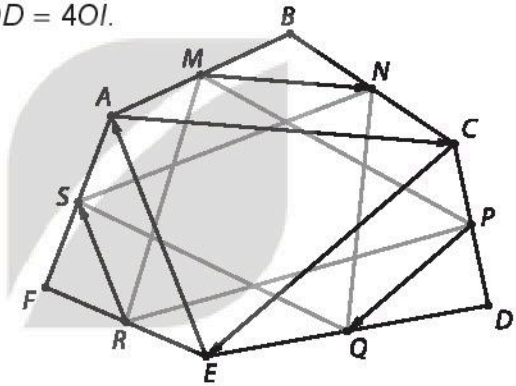
Từ đó và (1) suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OI}$.

4.17. Do M là trung điểm của AB, N là trung điểm của BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC (H.4.30).

Do đó $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (1)

Tương tự cũng có $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CE}$ (2)

và $\overrightarrow{RS}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EA}$. (3)



Hình 4.30

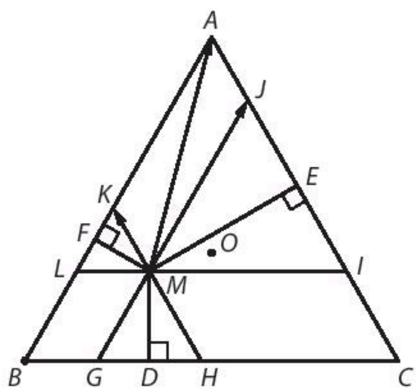
Theo quy tắc ba điểm và tính chất kết hợp của phép cộng vectơ, ta có $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}$.

Từ đó và từ (1), (2), (3), suy ra $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}\right)=\vec{0}$.

Do đó, theo kết quả của Ví dụ 3 thì hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

4.18. Đường thẳng đi qua M và song song với BC cắt AB, AC tại L, I; đường thẳng đi qua M song song với CA cắt BC, AB tại H, K; đường thẳng đi qua M song song với AB cắt CA, BC tại J, G (H.4.31).

Do tam giác ABC đều và $MG // AB$, $MH // AC$ nên tam giác MGH cũng là một tam giác đều. Từ đó, do $MD \perp GH$ nên D là trung điểm của GH.



Hình 4.31

Suy ra $2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}$. (1)

Tương tự cũng có $2\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}$; $2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right) = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}$. (3)

Do $MK \parallel AC$, $MJ \parallel AB$ nên tứ giác $AKMJ$ là hình bình hành. Suy ra

$$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MA}. \quad (4)$$

Tương tự, cũng có $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MC}$. (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO}$ (do O là trọng tâm của tam giác đều ABC). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

4.19. a) Giả sử tìm được điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Gọi I là trung điểm của AB và J là trung điểm của IC. Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MJ}$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} = \vec{0}$ hay $M \equiv J$.

b) Giả sử tìm được điểm N thoả mãn $4\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Gọi K là trung điểm của CA (H.4.32). Khi đó

$$4\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 2\left(\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB}\right) + \left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}\right) + \overrightarrow{NA}$$
$$= 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NA}.$$

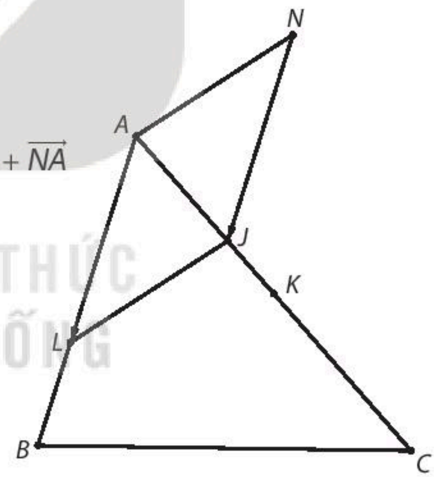
Gọi J là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{JA} = \vec{0}$.

Khi đó $2\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{NJ}$.

Do đó $4\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{NJ}$.

Từ đó $4\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{NJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. (1)



Hình 4.32

Lấy điểm L thuộc cạnh AB sao cho $\overrightarrow{AL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{AL}$.

Từ đó, do A, L, J không thẳng hàng, nên tứ giác $ALJN$ là một hình bình hành. Vậy, điểm N cần tìm là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ALJN$.

4.20. a) Giả sử tìm được điểm K thoả mãn $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Gọi I là trung điểm của AC, gọi J là trung điểm của BC. Khi đó

$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC}\right) + 2\left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right) = 2\overrightarrow{KI} + 4\overrightarrow{KJ}. \quad (1)$$

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Lấy điểm L thuộc đoạn IJ sao cho $LI = 2LJ$. Khi đó, theo kết quả Ví dụ 2, ta được $\overrightarrow{LI} + 2\overrightarrow{LJ} = \vec{0}$. Suy ra $\overrightarrow{KI} + 2\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{KL}$. Từ đó và (1) suy ra $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{KI} + 2\overrightarrow{KJ}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{KL} = \vec{0}$, điều này tương đương với $K \equiv L$.

b) Với mỗi điểm M ta có $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$. (2)

Theo kết quả phần a), $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{ML}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra

$$\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow 6\left|\overrightarrow{ML}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| \Leftrightarrow LM = \frac{BC}{6}.$$

Từ đó suy ra tập hợp tất cả các điểm M cần tìm là đường tròn tâm L, bán kính bằng $\frac{BC}{6}$.

4.21. Lực đẩy Archimedes $\overrightarrow{F_A}$ và trọng lực $\vec{P}$ đều tác động lên vật theo phương thẳng đứng, hai lực này ngược hướng. Do ở trạng thái cân bằng vật nổi (chìm một nửa), nên hai lực này có cường độ bằng nhau.

Gọi d, d' tương ứng là trọng lượng riêng của vật và trọng lượng riêng của chất lỏng; gọi V là thể tích của vật. Khi đó trọng lượng của vật bằng $P = \left|\vec{P}\right| = dV$. (1)

Lực đẩy Archimedes tác động lên vật có cường độ bằng $F_A = \left|\overrightarrow{F_a}\right| = d' \cdot \frac{V}{2}$. (2)

Từ (1) và (2), để ý rằng $P = F_A$, suy ra $\frac{d}{d'} = 2$.

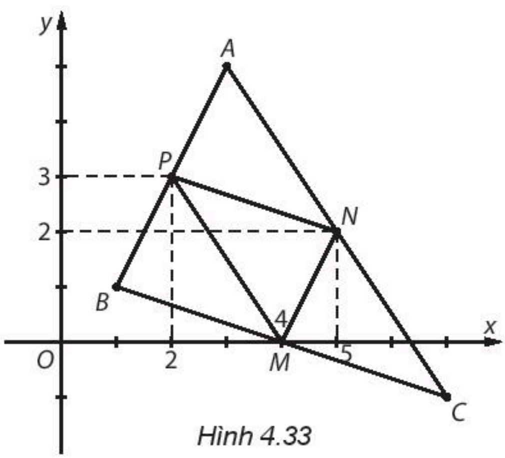
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bài 10 VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

4.22. Do M là trung điểm của BC, N là trung điểm của CA, P là trung điểm của AB, nên MN, NP, PM là các đường trung bình của tam giác ABC và do đó MN // AB, NP // BC, PM // CA (H.4.33).

Do MN // AB và MP // AC nên tứ giác $APMN$ là hình bình hành, và do đó $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{OA} = (3; 5)$, do đó A có toạ độ là (3; 5). Bằng lập luận tương tự, tìm được $B(1; 1)$ và $C(7; -1)$.



Hình 4.33

4.23. a) Đáp số: $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{52}$, $CA = \sqrt{26}$. Tam giác ABC vuông cân tại A.

b) **HD.** Hình vuông $ABDC$ là một hình bình hành.

Đáp số: $D(6; 5)$.

4.24. a) Đáp số: $P(3; 0)$.

b) Đáp số: $Q(0; 11)$.

c) Giả sử tìm được điểm R thoả mãn yêu cầu. Do $\overrightarrow{RM} + 2\overrightarrow{RN} = \vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = (1+2)\overrightarrow{OR} \text{ hay } \overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$$

và do đó R có toạ độ $\left(2; \frac{11}{3}\right)$.

Do $\overrightarrow{PQ} = (-3; 11)$, $\overrightarrow{PR} = \left(-1; \frac{11}{3}\right)$. Do $\frac{-1}{-3} = \frac{\frac{11}{3}}{11}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{PR}$ cùng phương và do đó P, Q, R thẳng hàng.

4.25. a) Đáp số: $P(0; 5)$.

b) Đáp số: $Q(-2; 7)$.

c) Đáp số: $R(-3; -2)$.

4.26. a) Đáp số: $E(0; 4)$.

b) Đáp số: $F(7; 0)$.

c) Do $C(1; 6)$, $D(11; 2)$, nên $CD = \sqrt{(11-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$.

Gọi I là trung điểm CD, thế thì $I(6; 4)$ và với mỗi điểm M đều có $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = CD \Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{MI}\right| = 2\sqrt{29} \Leftrightarrow IM = \sqrt{29}$.

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I bán kính $\frac{CD}{2} = \sqrt{29}$.

4.27. a) **HD.** Chứng minh các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Trọng tâm của tam giác là $G\left(2; \frac{5}{3}\right)$.

b) **HD.** Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp và H là trực tâm của tam giác ABC. Thế thì $IA = IB = IC$ và $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$.

Đáp số: $I\left(\frac{15}{4}; \frac{5}{4}\right)$, $H\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

4.28. Chọn hệ toạ độ *Oxy* sao cho $A(0; 0)$, $B(200; 0)$, $C(200; 180)$, $D(0; 180)$.

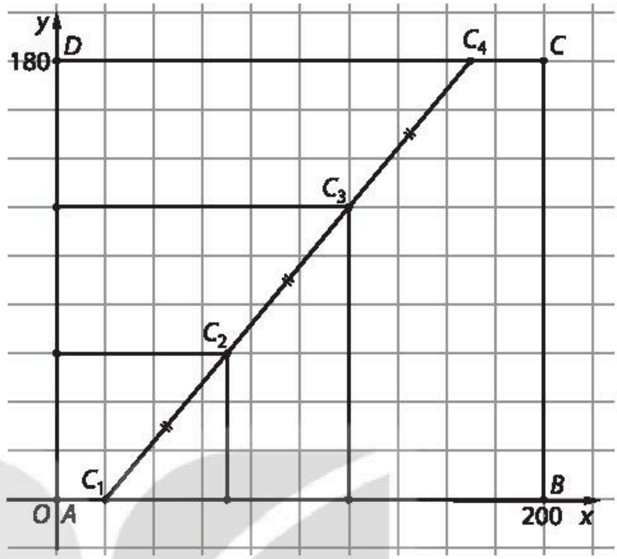
Gọi vị trí các cột điện được trồng là C_1, C_2, C_3, C_4 (H.4.34).

Do C_1 thuộc cạnh AB và $AC_1 = 20$ nên $C_1(20; 0)$, do C_4 thuộc cạnh CD và $C_4C = 30$ nên $C_4(170; 180)$.

Suy ra $\overrightarrow{C_1C_4} = (150; 180)$. (1)

Do bốn cột điện C_1, C_2, C_3, C_4 được trồng liên tiếp, cách đều trên một đường thẳng, nên $\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$ và

$\overrightarrow{C_1C_3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$.



Hình 4.34

Gọi toạ độ của C_2 đối với hệ trục đang xét là $(x; y)$. Khi đó $\overrightarrow{C_1C_2} = (x - 20; y)$.

Từ đó và (1), do $\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$ nên $\begin{cases} x - 20 = \dfrac{150}{3} = 50 \\ y = \dfrac{180}{3} = 60. \end{cases}$

Suy ra $x = 70, y = 60$, tức là $C_2(70; 60)$.

Khi đó $d(C_2; AB) = d(C_2; Ox) = 60$ (m) và $d(C_2; AD) = d(C_2; Oy) = 70$ (m).

Hoàn toàn tương tự, cũng được $d(C_3; AB) = 120$ (m), $d(C_3; AD) = 120$ (m).

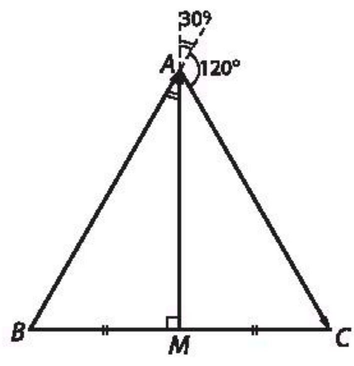
Bài 11 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

4.29. a) Do tam giác *ABC* là tam giác đều với độ dài các cạnh bằng 1, *M* là trung điểm *BC*, nên $MA = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{BA}) = 30^\circ$, $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{AC}) = 120^\circ$ (H.4.35).

Suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{BA}) = \frac{3}{2}$,

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.



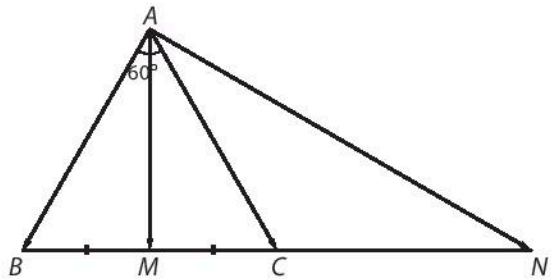
Hình 4.35

b) Do tam giác ABC đều, nên

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=60^{\circ}. \qquad (1)$$

Do M là trung điểm của BC nên

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right). \qquad (2)$$



Hình 4.36

Do N đối xứng với B qua C, nên C là trung điểm của BN (H.4.36).

Suy ra $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}. \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

c) Do P thuộc đoạn AN thoả mãn $AP=3PN$ nên $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ (H.4.37).

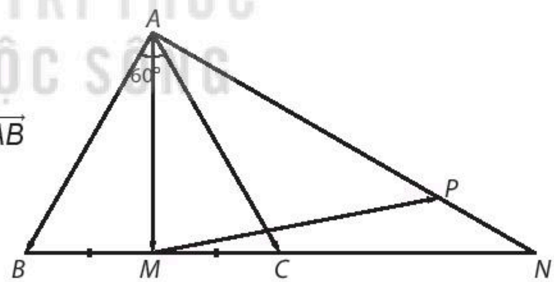
Suy ra $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AC}-\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.$

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Từ đó

$$\begin{aligned}MP^2=\overrightarrow{MP}^2&=\left(\overrightarrow{AC}-\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}\right)^2\\&=\overrightarrow{AC}^2+\frac{25}{16}\overrightarrow{AB}^2-2\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}\\&=1+\frac{25}{16}-\frac{5}{2}\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{21}{16}\end{aligned}$$

Suy ra $MP=\frac{\sqrt{21}}{4}.$



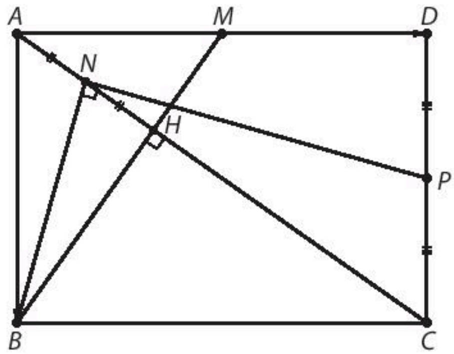
Hình 4.37

4.30. (H.4.38) a) Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ với $\left|\vec{b}\right|=1$, $\left|\vec{d}\right|=\sqrt{2}$ và $\vec{b}\cdot\vec{d}=0$.

Khi đó $\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{d}$. Hơn nữa, do M là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{d}$ và do đó $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{d}-\vec{b}.$

Suy ra $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = (\vec{b} + \vec{d}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{d} - \vec{b}\right) = -\vec{b}^2 + \frac{1}{2}\vec{d}^2 = -1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$.

Từ đó $AC \perp BM$.



Hình 4.38

b) Theo định lí Pythagore ta có $AC = \sqrt{3}$

và $AH = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Do N là trung điểm của AH nên

$$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{d})\right] + \vec{b} = \frac{5}{6}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{d}. \quad (1)$$

Do P là trung điểm của CD và N là trung điểm của HA, nên theo kết quả bài 4.12, Toán 10 tập một, ta có

$$\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{2}\left[\vec{d} + \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{d})\right] = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{d}. \quad (2)$$

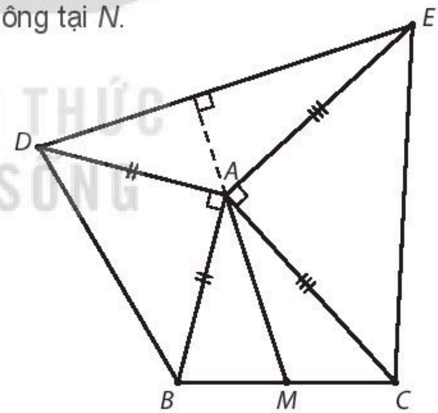
Từ (1) và (2) suy ra

$$\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NP} = \left(\frac{5}{6}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{d}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{d}\right) = \frac{5}{18}\vec{b}^2 - \frac{5}{36}\vec{d}^2 = \frac{5}{18} \cdot 1 - \frac{5}{36} \cdot 2 = 0.$$

Suy ra $NB \perp NP$ và do đó tam giác NBP vuông tại N.

4.31. Do $\widehat{A} < 90^\circ$ nên

$\widehat{BAE} = 90^\circ + \widehat{A} = \widehat{CAD}$. (1)



Hình 4.39a

a) Do M là trung điểm của BC (H.4.39a)

nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. (2)

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$.

Từ đó và (1), (2) suy ra

$$2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \quad (\text{do } AB \perp AD,\ AC \perp AE)$$

$$= AB \cdot AE \cdot \cos\widehat{BAE} - AC \cdot AD \cdot \cos\widehat{CAD} = 0$$

$$(\text{do } AB = AD, AE = AC \text{ và } (1)).$$

Suy ra $AM \perp DE$.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

b) Từ giả thiết suy ra $\widehat{DAE} = 360^\circ - \widehat{DAB} - \widehat{BAC} - \widehat{CAE} = 180^\circ - \widehat{A}$. (3)

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$. Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CD} &= \left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC} + AE \cdot AD \cdot \cos\widehat{DAE} \\ &= 0 \ \ (\text{do } AB = AD, AC = AE \text{ và } (3)).\end{aligned}$$

Từ đó $BE \perp CD$.

Hơn nữa $BE^2 = \overrightarrow{BE}^2 = \left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AE^2 + AB^2 - 2AE \cdot AB \cdot \cos\widehat{BAE}$

$$= AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos\widehat{CAD} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{CD}^2 = CD^2.$$

Suy ra $BE = CD$.

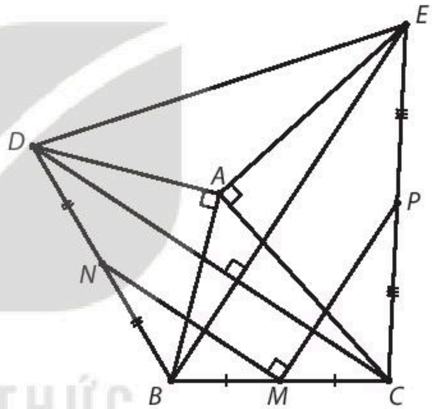
c) Do M là trung điểm của BC và N là trung điểm của BD, nên MN là đường trung bình của tam giác BCD (H.4.39b).

Do đó $MN \,//\, CD$, $MN = \dfrac{1}{2}CD$. (4)

Cũng vậy, MP là đường trung bình của tam giác BCE.

Do đó $MP \,//\, BE$, $MP = \dfrac{1}{2}BE$. (5)

Từ (4), (5) và kết quả của phần b) suy ra $MN = MP$ và $MN \perp MP$, hay tam giác MNP vuông cân tại M.



Hình 4.39b

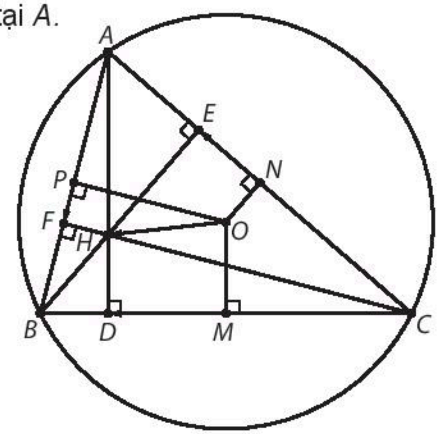
4.32. HD. Từ một điểm O, dựng vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, rồi dựng vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Khi đó $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ và tam giác OAB vuông tại A.

a) **Đáp số.** $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 36$.

b) **Đáp số.** $\left(\vec{a}; \vec{a} + \vec{b}\right) \approx 53^\circ 7' 48''$.

4.33. Gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC (H.4.40). Khi đó D, E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của H trên BC, CA, AB và M, N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của O trên BC, CA, AB.



Hình 4.40

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Theo định lí chiếu ta có:

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OH} \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OH} \cdot \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OH} \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA}.$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

4.34. a) **Đáp số:** $C(3; 0)$. Chu vi tam giác ABC bằng $3\sqrt{2} + \sqrt{10}$.

Diện tích tam giác ABC bằng 2.

b) **HD.** Điểm D thoả mãn đồng thời hai điều kiện vectơ $\overrightarrow{AD}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $AD = AB = 2\sqrt{2}$.

Đáp số: Có hai điểm D thoả mãn là $D_1(0; 3)$ và $D_2(4; -1)$.

4.35. HD. Do $ABCD$ là hình vuông nên hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm chung I của chúng.

Đáp số: $B(4; -1)$, $D(6; 7)$.

4.36. a) Xét điểm $C(c;0) \in Ox$. Khi đó $CA^2 = (c-1)^2 + 1$, $CB^2 = (c-7)^2 + 25$.

Vậy C cách đều A, B khi và chỉ khi

$$CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (c-1)^2 - (c-7)^2 = 25 - 1 \Leftrightarrow c = 6.$$

Vậy $C(6; 0)$ là điểm cần tìm.

b) Gọi M là trung điểm AB. Khi đó $M(4; 3)$. Với mọi điểm D ta có $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DM}$. Suy ra vectơ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi vectơ $2\overrightarrow{DM}$ có độ dài ngắn nhất.

Từ đó điểm D thuộc trục tung sao cho vectơ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi D là hình chiếu vuông góc của M trên Oy, tức là $D(0; 3)$.

4.37. a) **HD.** Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Đáp số: $G\left(\dfrac{1}{3}; 2\right)$.

b) Từ giả thiết, suy ra $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (2; -6)$. Gọi $H(x; y)$ là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó $\overrightarrow{AH} = (x + 3; y - 2)$, $\overrightarrow{CH} = (x - 3; y + 1)$.

Do $AH \perp BC$, $CH \perp AB$ nên

$$\begin{cases} 2(x+3) - 6(y-2) = 0 \\ 4(x-3) + 3(y+1) = 0. \end{cases}$$

Từ đó tìm được $x = 0$, $y = 3$. Vậy trực tâm của tam giác ABC là điểm $H(0; 3)$.

c) **HD.** Sử dụng kết quả của bài tập 4.15.

Đáp số: $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

4.38. Do lực $\vec{F}$ không đổi, tác động lên chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, nên công sinh bởi lực $\vec{F}$ khi chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ M tới N rồi từ N tới P bằng $A_1 = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN} + \vec{F} \cdot \overrightarrow{NP}$ (1)

và công sinh bởi lực F khi chất điểm chuyển động thẳng từ M tới P bằng

$$A_2 = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MP}. \qquad (2)$$

Từ (1), (2), để ý rằng $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$, suy ra $A_1 = A_2$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A – Trắc nghiệm

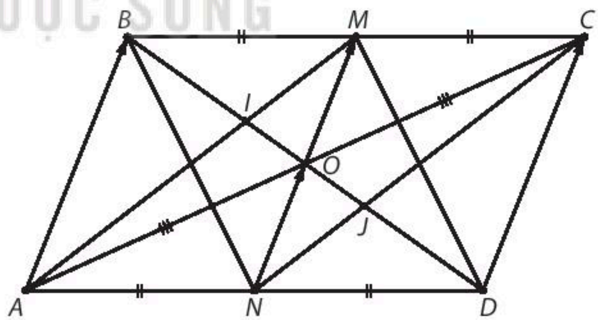
4.39. A	**4.43.** A	**4.47.** B	**4.51.** C	**4.55.** C
4.40. C	**4.44.** B	**4.48.** A	**4.52.** B	**4.56.** A
4.41. B	**4.45.** C	**4.49.** B	**4.53.** D	**4.57.** B
4.42. D	**4.46.** D	**4.50.** C	**4.54.** B	**4.58.** A

B – Tự luận

4.59. (H.4.41) a) Những vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{DC}$;

Những vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NO}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{DC}$.

b) Do $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm chung của AC và BD. Do M là trung điểm của BC nên I là trọng tâm của tam giác ABC, do N là trung điểm của DA nên J là trọng tâm của tam giác CDA.



Hình 4.41

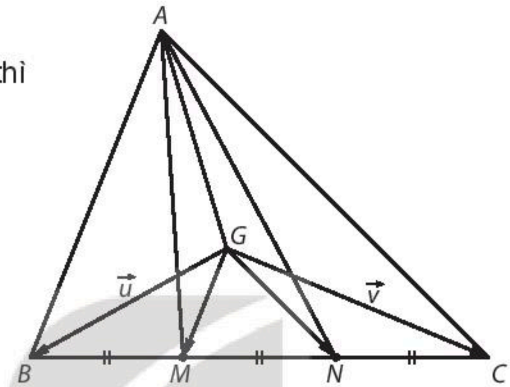
Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$. (1)

Do I là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BI}$.

Từ đó và (1) suy ra $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BI}$. (2)

Hoàn toàn tương tự, chứng minh được $\overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DJ}$. Từ đó và (2) suy ra $BI = IJ = JD$.

4.60. (H.4.42) a) Do M, N thuộc cạnh BC sao cho $BM = MN = NC$ nên $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NC}$ ngược hướng và cùng độ dài. Bởi vậy $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Từ đó, theo kết quả của Ví dụ 3, Bài 9, hai tam giác AMN, ABC có cùng trọng tâm.



Hình 4.42

b) Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$.

Từ đó, theo Nhận xét ở Ví dụ 2, Bài 9, thì

$(1-(-2))\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GC} - (-2)\overrightarrow{GB}$.

Suy ra $\overrightarrow{GM} = \dfrac{2}{3}\vec{u} + \dfrac{1}{3}\vec{v}$.

Tương tự, cũng được $\overrightarrow{GN} = \dfrac{1}{3}\vec{u} + \dfrac{2}{3}\vec{v}$.

Do G là trọng tâm của tam giác ABC

nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$. và do đó $\overrightarrow{GA} = -\vec{u} - \vec{v}$.

4.61. a) Gợi ý: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Đáp số: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -6$.

b) Do $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ nên $2\left(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}\right) + 3\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM}\right) = \vec{0}$. Suy ra

$$\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA} = 3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + 2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}. \quad (1)$$

Do $\overrightarrow{NB} + x\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ nên $(1+x)\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$. Từ đó và (1) suy ra

$$(1+x)\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = \left(\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}\right)$$
$$= -\overrightarrow{AB}^2 + 3x\overrightarrow{AC}^2 + (3-x)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -16 + 75x + 10(3-x).$$

Từ đó suy ra $AN \perp BM$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$. Điều này tương đương với $-16 + 75x + 10(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{14}{65}$.

Vậy với $x = -\dfrac{14}{65}$ thì $AN \perp BM$.

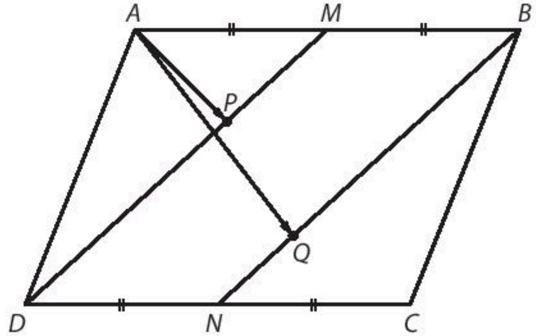
4.62. (H.4.43) a) Do P thuộc đoạn DM sao cho $DP = 2PM$ nên $\overrightarrow{PD} = -2\overrightarrow{PM}$. Suy ra $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Từ đó, do M là trung điểm của AB, nên $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

tức là $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\vec{u} + \dfrac{1}{3}\vec{v}$. $\quad$ (1)

Do Q thuộc đoạn BN sao cho $BQ = xQN$ nên $\overrightarrow{QB} = -x\overrightarrow{QN}$. Suy ra

$$(1+x)\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + x\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}\right) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$$

hay $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{(2+x)}{2(1+x)}\vec{u} + \dfrac{x}{1+x}\vec{v}.$ (2)



Hình 4.43

b) Từ (1) và (2) suy ra A, P, Q thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{2+x}{2(1+x)} : \frac{1}{3} = \frac{x}{1+x} : \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+x}{2(1+x)} = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy với $x = 2$ thì A, P, Q thẳng hàng.

4.63. HD. Sử dụng kết quả Ví dụ 3, Bài 9, ta được $3\overrightarrow{GG'} = 2\overrightarrow{BA}$.

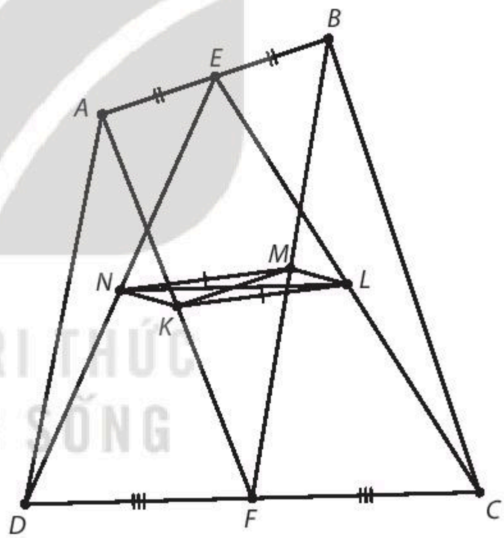
4.64. (H.4.44) a) Do E là trung điểm của AB, F là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DF}$.

Do K là trung điểm của AF, L là trung điểm của CE, M là trung điểm của BF, N là trung điểm của DE, nên theo kết quả của bài tập 4.12, Toán 10, Tập một, ta có

$$2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{NM}$$

Suy ra $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$ và do đó $KLMN$ là một hình bình hành.

b) Do $KLMN$ là hình bình hành và I là giao điểm của KM, LN nên I là trung điểm chung của KM, LN.



Hình 4.44

Suy ra $2\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{ED} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF}$. Do đó E, I, F thẳng hàng, hơn nữa I là trung điểm của EF.

4.65. a) Do M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (H.4.45). (1)

Gọi E là hình chiếu vuông góc của C trên AD. Khi đó tứ giác $ABCE$ là một hình chữ nhật.

Suy ra $EA = CB = 1 = \dfrac{1}{3}DA$ và do đó $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EA} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$ (2)

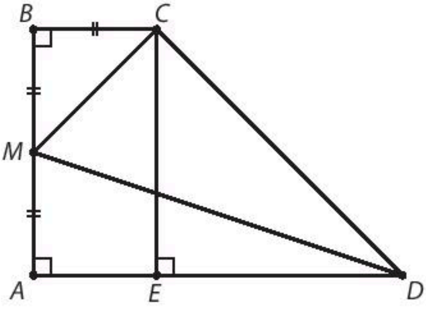
Từ (1), (2), theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Theo cách xác định điểm E thì $\overrightarrow{ED} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

Từ đó, theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$



Hình 4.45

b) Do G là trọng tâm của tam giác MCD nên

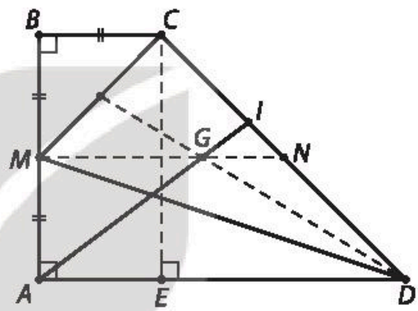
$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}\right) + \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}. \quad (3)$$

Do I thuộc cạnh CD nên hai vectơ $\overrightarrow{IC}$ và $\overrightarrow{ID}$ ngược hướng (H.4.46).

Từ đó, do $9IC = 5ID$ nên $9\overrightarrow{IC} + 5\overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Suy ra $14\overrightarrow{AI} = 9\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD} = 9\overrightarrow{AB} + 8\overrightarrow{AD}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $14\overrightarrow{AI} = 6 \cdot 3\overrightarrow{AG} = 18\overrightarrow{AG}$ và do đó A, G, I thẳng hàng.



Hình 4.46

c) Từ (4), để ý rằng $AD \perp AB$, suy ra

$$196AI^2 = \left(14\overrightarrow{AI}\right)^2 = \left(9\overrightarrow{AB} + 8\overrightarrow{AD}\right)^2 = 81\overrightarrow{AB}^2 + 2 \cdot \left(9\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(8\overrightarrow{AD}\right) + 64\overrightarrow{AD}^2$$

$$= 81AB^2 + 64AD^2 = 81 \cdot 4 + 64 \cdot 9 = 900.$$

Suy ra $AI = \frac{15}{7}$.

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = -\frac{5}{14}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AD}$.

Suy ra $BI^2 = \left(-\frac{5}{14}\overrightarrow{AB} + \frac{8}{14}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \frac{25}{196} \cdot 4 + \frac{64}{196} \cdot 9 = \frac{169}{49}$ và do đó $BI = \frac{13}{7}$.

4.66. HD. Biểu diễn các vectơ theo ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$.

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$

$$+\left(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right).$$

Khai triển, giản ước, thu được điều phải chứng minh.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

4.67. a) Đáp số: $\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$; $\vec{b}\cdot\vec{c}=-27$; $\vec{c}\cdot\vec{a}=1$.

b) Từ giả thiết suy ra $\vec{b}+\vec{c}=(-2;-1)$, $|\vec{a}|=\sqrt{5}$, $|\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{5}$.

Do $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}+\vec{c}=(-2;-1)$ nên $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=1\cdot(-2)+2\cdot(-1)=-4$.

Suy ra $\cos(\vec{a};\vec{b}+\vec{c})=\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}+\vec{c}|}=\dfrac{-4}{5}$. Từ đó suy ra $(\vec{a};\vec{b}+\vec{c})\approx 143^\circ 7'48''$.

4.68. a) Do $A(-2;\ 1)$, $B(1;\ 4)$, $C(5;\ -2)$ nên $\overrightarrow{AB}=(3;\ 3)$, $\overrightarrow{AC}=(7;\ -3)$. Do $\dfrac{7}{3}\neq\dfrac{-3}{3}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, suy ra A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

Gọi $G(x;y)$ là trọng tâm của tam giác. Thế thì $\begin{cases} x=\dfrac{-2+1+5}{3}=\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{1+4+(-2)}{3}=1. \end{cases}$

Vậy trọng tâm của tam giác là $G\left(\dfrac{4}{3};1\right)$.

b) Gọi $H(x;\ y)$ là trực tâm của tam giác ABC.

Khi đó $\overrightarrow{CH}=(x-5;y+2)$, $\overrightarrow{BH}=(x-1;y-4)$.

Do H là trực tâm, nên $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$. Từ đó thu được

$$\begin{cases} 3(x-5)+3(y+2)=0 \\ 7(x-1)-3(y-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{5} \\ y=\dfrac{13}{5}. \end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{13}{5}\right)$.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Theo kết quả bài tập 4.15, ta có

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IH}.$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{OI}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OG}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OH}$ và do đó $I\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

Nhận xét

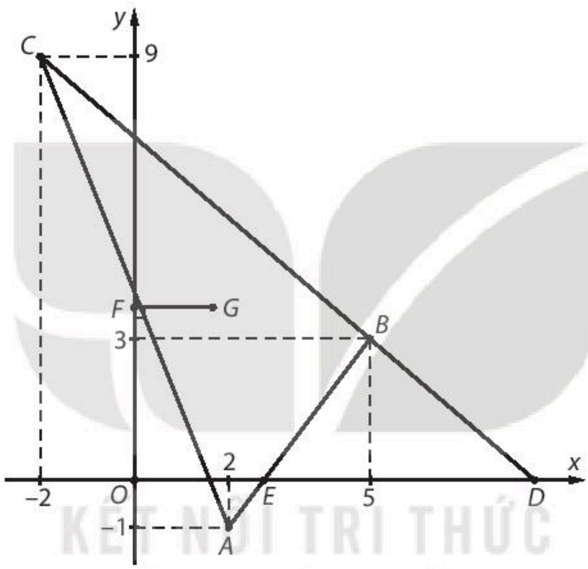
– Ta có thể tìm toạ độ điểm I nhờ vào dấu hiệu $IA=IB=IC$.

– Việc sử dụng đẳng thức $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IH}$ hay $\overrightarrow{IH}=3\overrightarrow{IG}$ cho phép ta thu được toạ độ của điểm còn lại khi biết toạ độ của hai trong ba điểm G, H, I.

4.69. (H.4.47) a) Xét điểm $D(d; 0) \in Ox$. Ta có $\overrightarrow{BD} = (d - 5; -3)$, $\overrightarrow{CD} = (d + 2; -9)$.

Từ đó B, C, D thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$ cùng phương, tức là $(d - 5) : (-3) = (d + 2) : (-9)$. Từ đó tìm được $d = \dfrac{17}{2}$. Vậy $D\left(\dfrac{17}{2}; 0\right)$ là điểm cần tìm.

b) Từ giả thiết suy ra A và B nằm về hai phía của trục hoành. Bởi vậy, với mỗi điểm $E \in Ox$ ta có $EA + EB \geq AB$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi E là giao điểm của AB với Ox. Bằng lập luận như ở phần a), tìm được $E\left(\dfrac{11}{4}; 0\right)$.



Hình 4.47

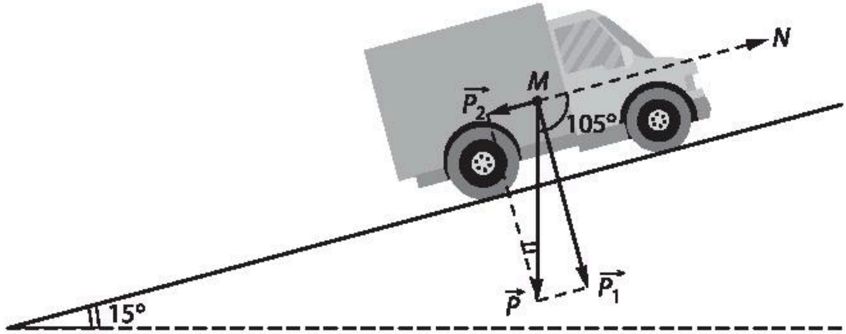
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

c) Giả sử tìm được điểm F thoả mãn yêu cầu bài toán. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó $G\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{11}{3}\right)$. (1)

Do $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = 3\overrightarrow{FG}$ nên $\left|\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{FG}$ có độ dài nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi F là hình chiếu vuông góc của G trên Oy. Từ đó và (1) suy ra $F\left(0; \dfrac{11}{3}\right)$.

4.70. Trọng lực của ô tô có độ lớn bằng $\left|\overrightarrow{P}\right| = 2500 \times 10 = 25\,000$ (N).

Trọng lực $\overrightarrow{P}$ của ô tô hợp với hướng chuyển dời $\overrightarrow{MN}$ một góc $\alpha = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$. Trọng lực $\overrightarrow{P}$ được phân tích thành hai thành phần $\overrightarrow{P_1}$ và $\overrightarrow{P_2}$: $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2}$, trong đó $\overrightarrow{P_1}$ có phương vuông góc với mặt dốc, $\overrightarrow{P_2}$ có phương song song với mặt dốc (H.4.48).



Hình 4.48

Ta nhận thấy rằng, $\overrightarrow{P_1}$ không có tác dụng đối với chuyển dời $\overrightarrow{MN}$ của xe, còn $\overrightarrow{P_2}$ ngược hướng với $\overrightarrow{MN}$. Do đó, công của trọng lực tác động lên xe bằng

$$A = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{MN} = \left|\overrightarrow{P}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MN}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{MN}\right)$$

$$= 25\,000 \cdot 50 \cdot \cos 105^\circ \approx -323\,524 \text{ (J)}.$$

Nhận xét. Cũng có thể tính công A nhờ định lí chiếu (xem mục Nhận xét sau Ví dụ 2, Bài 11) như sau:

$$A = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{P_2} \cdot \overrightarrow{MN} = \left|\overrightarrow{P_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MN}\right| \cdot \cos 180^\circ$$

$$= -\left(\left|\overrightarrow{P}\right| \cdot \sin 15^\circ\right) \cdot 50 \approx -323\,524 \text{ (J)}.$$

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

CHƯƠNG V – CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

Bài 12 SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

5.1. a) Cả hai số đều là số gần đúng.

b) $18,3\pi$ là số đúng; 57,462 là số gần đúng.

5.2. Vì độ chia nhỏ nhất của thước là 1 cm nên độ chính xác $d = 0,5$ cm.

Sai số tuyệt đối $\delta \le d = 0,5$ cm và sai số tương đối $\delta \le \frac{d}{a} = \frac{0,5}{163} \approx 0,31\%$.

5.3. a) e là số đúng; 2,71828 là số gần đúng.

b) Từ giả thiết ta có: $|e - 2,71828| < 0,00008 = d$.

Do đó, sai số tương đối $\delta < \frac{0,00008}{2,71828} \approx 0,0029\%$.

5.4. *HD.* Sử dụng chức năng bấm căn bậc 2 và bấm số π.

5.5. a) 23 200; b) 18,06.

5.6. a) 120 V; b) 10 m/s^2.

Bài 13 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

5.7. $\overline{x} \approx 5,72$.

5.8. 91%.

5.9. a) Số trung bình:

$$\overline{x} = \frac{190\,174 + \ldots + 1\,195}{15} \approx 23\,404,67.$$

Sắp xếp dãy số liệu theo thứ tự không giảm:

1 195	1 602	1 934	2 000	2 541	3 297	3 760	**4 544**
5 807	6 103	8 155	19 048	19 728	81 182	190 174.	

Vì n = 15 nên vị trí chính giữa là vị trí số 8. Do đó, trung vị là 4 544.

b) Số trung bình lớn hơn trung vị nhiều là do trong dãy số có một giá trị rất lớn là 190 174. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị "bất thường" này.

5.10. Mốt = 1; Ý nghĩa: Số gia đình có hai con là nhiều nhất.

5.11. a) Sắp xếp dãy số liệu theo thứ tự không giảm:

12,02	19,08	25,95	81,26	338,28
339,98	340,82	362,24	501,89	1 059,64.

Vì n = 10 nên trung vị là trung bình cộng của 2 giá trị chính giữa (vị trí 5 và 6):

$$Q_2 = \frac{338,28 + 339,98}{2} = 339,13.$$

Nửa dữ liệu bên trái Q_2 là: 12,02 19,08 25,95 81,26 338,28;
gồm 5 số do đó số chính giữa là số ở vị trí thứ 3 nên Q_1 = 25,95.

Nửa dữ liệu bên phải Q_2 là: 339,98 340,82 362,24 501,89 1 059,64;
gồm 5 số do đó trung vị là số chính giữa ở vị trí thứ 3 nên Q_3 = 362,24.

b) GDP của Việt Nam năm 2020 là 340,82 tỉ đô la Mỹ (nhỏ hơn Q_3) nên Việt Nam không thuộc nhóm 25% quốc gia trong khu vực Đông Nam Á có GDP cao nhất.

5.12. a) Số trung bình $\overline{x} \approx 3,14$. Trung vị Me = 2,67.

b) Diện tích trung bình của các tỉnh đồng bằng sông Cửu Long là 3,14 nghìn km^2.

Trung vị Me = 2,67 (nghìn km^2) nghĩa là số tỉnh có diện tích nhỏ hơn 2,67 nghìn km^2 bằng số tỉnh có diện tích lớn hơn 2,67 nghìn km^2.

Bài 14 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN

5.13. a) Độ lệch chuẩn của dãy số liệu A lớn hơn.

b) Không như nhau.

5.14. *HD.* Dãy B có được là do cộng mỗi giá trị của dãy A với 5.

5.15. a) Vận động viên A: Khoảng biến thiên = 2, Độ lệch chuẩn = 0,7.

Vận động viên B: Khoảng biến thiên = 5, Độ lệch chuẩn ≈ 1,64.

b) Vì khoảng biến thiên, độ lệch chuẩn về thành tích của vận động viên A đều nhỏ hơn của vận động viên B nên dựa trên các tiêu chí này ta có thể kết luận vận động viên A có thành tích ổn định hơn.

5.16. Dãy số liệu (c).

5.17. a) Sắp xếp dãy số liệu theo thứ tự không giảm:

148 157 162 165 165 165 167 168 170 179.

Vì n = 10 nên trung vị là trung bình cộng của 2 số ở chính giữa (vị trí 5 và 6):

$$Q_2 = \frac{165 + 165}{2} = 165.$$

Ta tìm Q_1 là trung vị của nửa dữ liệu bên trái Q_2 là:

148 157 162 165 165

và tìm được $Q_1 = 162$.

Nửa dữ liệu bên phải Q_2 là: 165 167 168 170 179

và tìm được $Q_2 = 168$.

Do đó, khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q = 168 - 162 = 6$.

b) Khoảng tứ phân vị đo độ phân tán của 50% dữ liệu ở giữa nên không bị ảnh hưởng bởi giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất.

5.18. *HD.* Tìm khoảng tứ phân vị Δ_Q tương tự như Bài 5.17, tìm số trung bình $\overline{x}$ sau đó kiểm tra xem giá trị 0,290 có nhỏ hơn $Q_1 - 1{,}5 \cdot \Delta_Q$ không.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A – Trắc nghiệm

5.19. B	**5.21.** A	**5.23.** C	**5.25.** C	**5.27.** D	**5.29.** A
5.20. C	**5.22.** B	**5.24.** D	**5.26.** B	**5.28.** B	**5.30.** B

B – Tự luận

5.31. Giới hạn cho phép là $50 \pm 0{,}5\% \cdot 50$ hay $50 \pm 0{,}25$. Đồng hồ của cột đo xăng dầu báo là 50,3 > 50,25 lít, tức là đã vượt qua giới hạn cho phép.

5.32. a) $\overline{x} = 7{,}96$. b) 8,0.

5.33. *HD.* Tính $Z = \dfrac{155 - 175{,}16}{7{,}64} \approx -2{,}64$. Do $-3 < Z < -2$ nên người này bị suy dinh dưỡng thể thấp còi, mức độ vừa.

5.34. a) Số trung bình = 15, Trung vị = 10, Mốt = 5.

b) Nên dùng trung vị vì số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị "bất thường" là 55, còn mốt xuất hiện là do ngẫu nhiên.

5.35. *HD.* a) Tính các tứ phân vị và khoảng tứ phân vị. Kiểm tra xem giá trị 6,78 có lớn hơn $Q_3 + 1{,}5 \cdot \Delta_Q$ hay không.

b) Nếu 6,78 là điểm bất thường ta loại bỏ giá trị này và tính số trung bình của 7 giá trị còn lại. Nếu 6,78 không là điểm bất thường ta tính số trung bình của 8 giá trị trong mẫu số liệu.

5.36. a) Số trung bình = 8,1875 (triệu đồng).

b) $Q_1 = 6{,}5$ (triệu đồng).

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: HOÀNG VIỆT – NGUYỄN TRỌNG THIỆP
Thiết kế sách: HOÀNG ANH TUẤN
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Sửa bản in: PHAN THỊ THANH BÌNH – PHẠM THỊ TÌNH
Chế bản: CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.
Tất cả các phần của nội dung cuốn sách này đều không được sao chép, lưu trữ, chuyển thể dưới bất kì hình thức nào khi chưa có sự cho phép bằng văn bản của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

BÀI TẬP TOÁN 10 - Tập một

Mã số: G1BHXT001H22

In .... bản (QĐ ....), khổ 17 x 24cm.
Đơn vị in .... địa chỉ ....
Cơ sở in .... địa chỉ ....
Số ĐKXB: 520-2022/CXBIPH/29-280/GD
Số QĐXB: .... /QĐ-GD ngày ... tháng ... năm 2022
In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm 2022
Mã số ISBN: Tập một: 978-604-0-31718-6
Tập hai: 978-604-0-31719-3

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH BÀI TẬP LỚP 10 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Bài tập Ngữ văn 10, tập một
2. Bài tập Ngữ văn 10, tập hai
3. Bài tập Toán 10, tập một
4. Bài tập Toán 10, tập hai
5. Bài tập Lịch sử 10
6. Bài tập Địa lí 10
7. Bài tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10
8. Bài tập Vật lí 10
9. Bài tập Hoá học 10
10. Bài tập Sinh học 10
11. Bài tập Tin học 10
12. Bài tập Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10
13. Bài tập Giáo dục quốc phòng và an ninh 10
14. Tiếng Anh 10 – Global Success – Sách bài tập

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
- **Cửu Long:** CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

ISBN 978-604-0-31718-6

Giá: 18.000 đ