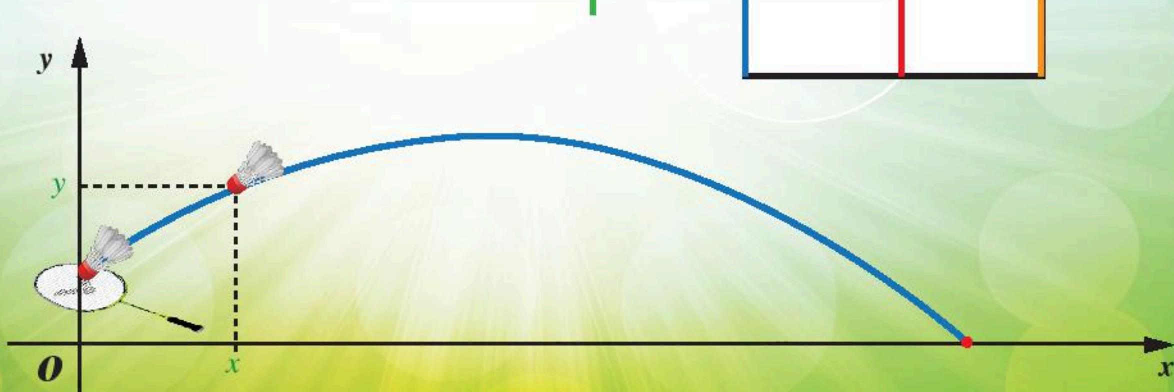
TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN

10

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN

10

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Mỗi bài học trong sách **Toán 10** thường có các phần như sau:

Hoạt động khởi động	Gợi mở, kết nối người học vào chủ đề bài học.
Hoạt động khám phá	Gợi ý để người học tìm ra kiến thức mới.
Kiến thức trọng tâm	Nội dung kiến thức cần lĩnh hội.
Thực hành	Các bài tập cơ bản theo yêu cầu cần đạt.
Vận dụng	Ứng dụng kiến thức để giải quyết vấn đề.

Chân trời sáng tạo

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

Lời nói đầu

Các bạn học sinh, quý thầy, cô giáo thân mến!

Sách ***Toán 10*** thuộc bộ sách giáo khoa ***Chân trời sáng tạo*** được biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Cấu trúc sách Toán 10 được chia thành hai tập.

Tập một bao gồm ba phần:

Đại số và Một số yếu tố Giải tích gồm ba chương: *Mệnh đề và tập hợp; Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn; Hàm số bậc hai và đồ thị.*

Hình học và Đo lường gồm hai chương: *Hệ thức lượng trong tam giác; Vectơ.*

Thống kê và Xác suất gồm một chương: *Thống kê.*

Đầu mỗi chương đều có nêu rõ các kiến thức cơ bản sẽ học và các yêu cầu cần đạt của chương. Các bài học đều xây dựng theo tinh thần định hướng phát triển năng lực và thường được thống nhất theo các bước: *khởi động, khám phá, thực hành, vận dụng*. Sách sẽ tạo nên một môi trường học tập và giảng dạy tương tác tích cực nhằm đảm bảo tính dễ dạy, dễ học đồng thời hỗ trợ các phương pháp giảng dạy hiệu quả.

Nội dung sách thể hiện tính tích hợp, gắn bó môn Toán với các môn học khác. Những hoạt động trải nghiệm được tăng cường giúp người học có thêm cơ hội vận dụng Toán học vào thực tiễn, đồng thời ứng dụng công nghệ thông tin vào việc học Toán.

Chúng tôi tin tưởng rằng với cách biên soạn này, sách giáo khoa ***Toán 10*** sẽ hỗ trợ quý thầy, cô giáo một cách tích cực và hiệu quả trong quá trình dạy học, đồng thời giúp các bạn học sinh hứng thú hơn khi học tập bộ môn Toán.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để sách được ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

Mục lục

Trang

Chân trời sáng tạo

Phần ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương I MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

Mệnh đề và tập hợp được coi là ngôn ngữ của toán học, là công cụ giúp con người diễn đạt các phát biểu toán học trở nên thống nhất, ngắn gọn, rõ ràng và chính xác.

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về hai khái niệm mệnh đề và tập hợp, cũng như một số khái niệm cơ bản liên quan và làm quen với việc sử dụng chúng trong học tập và cuộc sống.

Sách ở thư viện được sắp xếp như thế nào để thuận tiện cho việc quản lí và tìm kiếm?

Học xong chương này, bạn có thể:

- Nhận biết và lấy được ví dụ về mệnh đề, mệnh đề phủ định, mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo, mệnh đề tương đương, mệnh đề chứa kí hiệu $\forall$ và $\exists$; sử dụng đúng các thuật ngữ điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ.
- Xác định được tính đúng sai của mệnh đề trong những trường hợp đơn giản.
- Nhận biết được các khái niệm cơ bản về tập hợp (tập hợp, phần tử, tập con, hai tập hợp bằng nhau, tập rỗng); sử dụng đúng các kí hiệu $\in$, $\subset$, $\supset$, $\varnothing$.
- Thực hiện được phép toán trên tập hợp (hợp, giao, hiệu của hai tập hợp, phần bù của tập con); minh hoạ được bằng biểu đồ Ven.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn liên quan đến số phần tử của tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

Bài 1. Mệnh đề

Từ khoá: **Mệnh đề; Mệnh đề phủ định; Mệnh đề kéo theo; Mệnh đề đảo; Mệnh đề tương đương; Mệnh đề chứa kí hiệu ∀, ∃; Điều kiện cần; Điều kiện đủ; Điều kiện cần và đủ.**

Hãy theo dõi tình huống sau đây:

Bạn có thể phát biểu định lí theo cách khác?
Sau bài học này, bạn còn có thể đưa ra những cách phát biểu khác nữa.

1. Mệnh đề

1 Xét các câu sau đây:

(1) $1 + 1 = 2$.

(2) Dân ca Quan họ là di sản văn hoá phi vật thể đại diện của nhân loại.

(3) Dơi là một loài chim.

(4) Nấm có phải là một loài thực vật không?

(5) Hoa hồng đẹp nhất trong các loài hoa.

(6) Trời ơi, nóng quá!

Hình 1. Hát đối Quan họ

Trong những câu trên,

a) Câu nào là khẳng định đúng, câu nào là khẳng định sai?

b) Câu nào không phải là khẳng định?

c) Câu nào là khẳng định, nhưng không thể xác định nó đúng hay sai?

Trong khoa học cũng như trong đời sống hằng ngày, người ta thường dùng các câu nêu lên một khẳng định. Những khẳng định có tính hoặc đúng hoặc sai, như các câu (1), (2), (3) ở trên, được gọi là mệnh đề logic (hay mệnh đề).

Mệnh đề là một khẳng định đúng hoặc sai.

Một khẳng định đúng gọi là ***mệnh đề đúng***.

Một khẳng định sai gọi là ***mệnh đề sai***.

Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Chú ý: Người ta thường sử dụng các chữ cái in hoa P, Q, R, ... để kí hiệu mệnh đề.

Ví dụ 1

Trong các câu sau đây, câu nào là mệnh đề?

a) 3 là số lẻ;

b) $1 + 2 > 3$;

c) π là số vô tỉ phải không?

d) 0,0001 là số rất bé;

e) Đến năm 2050, con người sẽ đặt chân lên Sao Hoả.

Giải

a) "3 là số lẻ" là mệnh đề (là mệnh đề đúng).

b) "$1 + 2 > 3$" là mệnh đề (là mệnh đề sai).

c) "π là một số vô tỉ phải không?" là câu hỏi, không phải mệnh đề.

d) Câu "0,0001 là số rất bé" không có tính hoặc đúng hoặc sai (do không đưa ra tiêu chí thế nào là số rất bé). Do đó, nó không phải là mệnh đề.

e) "Đến năm 2050, con người sẽ đặt chân lên Sao Hoả" là một khẳng định chưa thể chắc chắn là đúng hay sai. Tuy nhiên, nó chắc chắn chỉ có thể hoặc đúng hoặc sai. Do đó, nó là một mệnh đề.

Chú ý: Những mệnh đề liên quan đến toán học (như các mệnh đề ở câu a) và b) trong Ví dụ 1) còn được gọi là ***mệnh đề toán học***.

1 Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

a) $\sqrt{2}$ là số vô tỉ;

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{10}} > 2$;

c) 100 tỉ là số rất lớn;

d) Trời hôm nay đẹp quá!

2 Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Vịnh Hạ Long là di sản thiên nhiên thế giới;

b) $\sqrt{(-5)^2} = -5$;

c) $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Hình 2. Vịnh Hạ Long

2. Mệnh đề chứa biến

2 Xét câu "n chia hết cho 5" (n là số tự nhiên).

a) Có thể khẳng định câu trên là đúng hay sai không?

b) Tìm hai giá trị của n sao cho câu trên là khẳng định đúng, hai giá trị của n sao cho câu trên là khẳng định sai.

Câu "n chia hết cho 5" là một khẳng định, nhưng không là mệnh đề, vì khẳng định này có thể đúng hoặc sai, tuỳ theo giá trị của n. Tuy vậy, khi thay n bằng một số tự nhiên cụ thể thì ta nhận được một mệnh đề. Người ta gọi "n chia hết cho 5" là một ***mệnh đề chứa biến*** (biến n), kí hiệu $P(n)$. Ta viết $P(n)$: "n chia hết cho 5" (n là số tự nhiên).

Một mệnh đề chứa biến có thể chứa một biến hoặc nhiều biến.

Ví dụ 2

Cho các mệnh đề chứa biến:

a) $P(x)$: "$2x = 1$";

b) $R(x, y)$: "$2x + y = 3$" (mệnh đề này chứa hai biến x và y);

c) $T(n)$: "$2n + 1$ là số chẵn" (n là số tự nhiên).

Với mỗi mệnh đề chứa biến trên, tìm những giá trị của biến để nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

Giải

a) Với $x = \frac{1}{2}$ thì $P\left(\frac{1}{2}\right)$: "$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$" là mệnh đề đúng.

Với $x = 1$ thì $P(1)$: "$2 \cdot 1 = 1$" là mệnh đề sai.

b) Với $x = 1$, $y = 1$ thì $R(1, 1)$: "$2 \cdot 1 + 1 = 3$" là mệnh đề đúng.

Với $x = 1$, $y = 2$ thì $R(1, 2)$: "$2 \cdot 1 + 2 = 3$" là mệnh đề sai.

c) Lấy số tự nhiên n_0 bất kì ta đều được $2n_0 + 1$ là một số lẻ, nghĩa là $T(n_0)$: "$2n_0 + 1$ là số chẵn" là mệnh đề sai. Do đó, không có giá trị n_0 của n để $T(n_0)$ là mệnh đề đúng. $T(n_0)$ là mệnh đề sai với số tự nhiên n_0 bất kì.

3 Với mỗi mệnh đề chứa biến sau, tìm những giá trị của biến để nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

a) $P(x)$: "$x^2 = 2$";

b) $Q(x)$: "$x^2 + 1 > 0$";

c) $R(n)$: "$n + 2$ chia hết cho 3" (n là số tự nhiên).

3. Mệnh đề phủ định

3 Xét các cặp mệnh đề nằm cùng dòng của bảng (có hai cột P và $\overline{P}$) sau đây:

P	$\overline{P}$
Dơi là một loài chim.	Dơi không phải là một loài chim.
π không phải là một số hữu tỉ.	π là một số hữu tỉ.
$\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}$.	$\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq \sqrt{5}$.
$\sqrt{2} . \sqrt{18} = 6$.	$\sqrt{2} . \sqrt{18} \neq 6$.

Nêu nhận xét về tính đúng sai của hai mệnh đề cùng cặp.

Với từng cặp mệnh đề P và $\overline{P}$ ở 3, ta thấy chúng có tính đúng sai trái ngược nhau (P đúng thì $\overline{P}$ sai và ngược lại). Ta nói mệnh đề $\overline{P}$ là ***mệnh đề phủ định*** (hoặc ***phủ định***) của mệnh đề P.

Nhận xét: Thông thường, để phủ định một mệnh đề, người ta thường thêm (hoặc bớt) từ "không" hoặc "không phải" vào trước vị ngữ của mệnh đề đó, như hai cặp mệnh đề đầu tiên ở 3. Tuy nhiên, ta cũng thường gặp cách diễn đạt khác, như hai cặp mệnh đề sau ở 3.

Mỗi mệnh đề P có mệnh đề phủ định, kí hiệu là $\overline{P}$.

Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\overline{P}$ của nó có tính đúng sai trái ngược nhau. Nghĩa là khi P đúng thì $\overline{P}$ sai, khi P sai thì $\overline{P}$ đúng.

Ví dụ 3

Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

P: "Tháng 12 dương lịch có 31 ngày";

Q: "$9^{10} \geq 10^9$";

R: "Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm".

Giải

Mệnh đề phủ định của các mệnh đề trên là:

$\overline{P}$: "Không phải tháng 12 dương lịch có 31 ngày";

$\overline{Q}$: "$9^{10} < 10^9$";

$\overline{R}$: "Phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm".

4 Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề và mệnh đề phủ định của nó.

a) Paris là thủ đô của nước Anh;

b) 23 là số nguyên tố;

c) 2021 chia hết cho 3;

d) Phương trình $x^2 - 3x + 4 = 0$ vô nghiệm.

Chân trời sáng tạo

4. Mệnh đề kéo theo

4 Xét hai mệnh đề sau:

(1) Nếu ABC là tam giác đều thì nó là tam giác cân;

(2) Nếu $2a - 4 > 0$ thì $a > 2$.

a) Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề trên.

b) Mỗi mệnh đề trên đều có dạng "Nếu P thì Q". Chỉ ra P và Q ứng với mỗi mệnh đề đó.

Mỗi mệnh đề ở 4 đều có dạng "Nếu P thì Q". Chúng là những mệnh đề kéo theo.

Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là ***mệnh đề kéo theo***, kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Nhận xét:

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là "P kéo theo Q" hoặc "Từ P suy ra Q".

b) Để xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$, ta chỉ cần xét trường hợp P đúng. Khi đó, nếu Q đúng thì mệnh đề đúng, nếu Q sai thì mệnh đề sai. Ta đã quen với điều này khi chứng minh nhiều định lí ở Trung học cơ sở.

Ví dụ 4

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) R: "Nếu tam giác ABC có hai góc bằng 60° thì nó là tam giác đều";

b) T: "Từ $-3 < -2$ suy ra $(-3)^2 < (-2)^2$".

Giải

a) R là mệnh đề có dạng $P \Rightarrow Q$, với P: "Tam giác ABC có hai góc bằng 60°" và Q: "Tam giác ABC là tam giác đều". Ta thấy khi P đúng thì Q cũng đúng. Do đó, $P \Rightarrow Q$ đúng hay R đúng.

b) T là mệnh đề có dạng $P \Rightarrow Q$, với P: "$-3 < -2$" và Q: "$(-3)^2 < (-2)^2$" (hay "$9 < 4$"). Ta thấy mệnh đề P đúng, còn mệnh đề Q sai. Do đó, $P \Rightarrow Q$ sai. Vậy T là mệnh đề sai.

Trong toán học, ***định lí*** là mệnh đề đúng. Các định lí trong toán học thường có dạng $P \Rightarrow Q$.

Khi mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là định lí, ta nói:

P là ***giả thiết***, Q là ***kết luận*** của định lí;

P là ***điều kiện đủ*** để có Q;

Q là ***điều kiện cần*** để có P.

Ví dụ 5

Sử dụng các thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ" để phát biểu lại định lí: "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì hai đường chéo bằng nhau".

Giải

Ta có thể phát biểu lại định lí đã cho như sau:

"Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau là điều kiện cần để nó là hình chữ nhật" hoặc "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật là điều kiện đủ để hai đường chéo bằng nhau".

Xét hai mệnh đề:

P: "Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau";

Q: "Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có diện tích bằng nhau".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

b) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ có phải là một định lí không? Nếu có, sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ" để phát biểu định lí này theo hai cách khác nhau.

5. Mệnh đề đảo. Hai mệnh đề tương đương

Xét hai mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$ sau:

"Nếu ABC là tam giác đều thì nó có hai góc bằng 60°";

"Nếu $a = 2$ thì $a^2 - 4 = 0$".

a) Chỉ ra P, Q và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề trên.

b) Với mỗi mệnh đề đã cho, phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$ và xét tính đúng sai của nó.

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là ***mệnh đề đảo*** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Chú ý: Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là ***hai mệnh đề tương đương***, kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$ (đọc là "*P tương đương Q*" hoặc "*P khi và chỉ khi Q*").

Khi đó, ta cũng nói P là ***điều kiện cần và đủ*** để có Q (hay Q là điều kiện cần và đủ để có P).

Nhận xét: Hai mệnh đề P và Q tương đương khi chúng cùng đúng hoặc cùng sai.

Ví dụ 6

Xét hai mệnh đề:

P: "Tam giác ABC vuông tại A";

Q: "Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

Hai mệnh đề P và Q có tương đương không? Nếu có, hãy phát biểu một định lí thể hiện điều này, trong đó có sử dụng thuật ngữ "khi và chỉ khi" hoặc "điều kiện cần và đủ".

Giải

Theo định lí Pythagore, hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng. Do đó, P và Q là hai mệnh đề tương đương. Ta có thể phát biểu thành định lí như sau:

"Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$"

hoặc "Để tam giác ABC vuông tại A, điều kiện cần và đủ là $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

6 Xét hai mệnh đề:

P: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông";

Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của nó.

b) Hai mệnh đề P và Q có tương đương không? Nếu có, sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" hoặc "khi và chỉ khi" để phát biểu định lí $P \Leftrightarrow Q$ theo hai cách khác nhau.

6. Mệnh đề chứa kí hiệu ∀, ∃

6 Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

(1) Với mọi số tự nhiên x, $\sqrt{x}$ là số vô tỉ;

(2) Bình phương của mọi số thực đều không âm;

(3) Có số nguyên cộng với chính nó bằng 0;

(4) Có số tự nhiên n sao cho $2n - 1 = 0$.

Trong toán học, để ngắn ngọn, người ta dùng các kí hiệu $\forall$ (đọc là *với mọi*) và $\exists$ (đọc là *tồn tại*) để phát biểu những mệnh đề như ở 6. Chẳng hạn, có thể viết lại các mệnh đề trên lần lượt như sau:

(1) $\forall x \in \mathbb{N}, \sqrt{x}$ là số vô tỉ;

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$;

(3) $\exists x \in \mathbb{Z}, x + x = 0$;

(4) $\exists n \in \mathbb{N}, 2n - 1 = 0$.

Ta nói (1), (2) là ***mệnh đề chứa kí hiệu*** $\forall$; (3), (4) là ***mệnh đề chứa kí hiệu*** $\exists$.

Tổng quát hơn, có thể phát biểu hai loại mệnh đề này như sau:

"$\forall x \in M, P(x)$" và "$\exists x \in M, P(x)$",

với M là một tập hợp, $P(x)$ là một mệnh đề chứa biến nào đó.

Mệnh đề "$\forall x \in M, P(x)$" đúng nếu với mọi $x_0 \in M$, $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.

Mệnh đề "$\exists x \in M, P(x)$" đúng nếu có $x_0 \in M$ sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.

Chân trời sáng tạo

Ví dụ 7

Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$;

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 4 = 0$.

Giải

a) Mệnh đề đúng, vì $x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$.

b) Mệnh đề sai, vì phương trình $x^2 + 3x + 4 = 0$ vô nghiệm ($\Delta = -7 < 0$).

Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 4 \neq 0$.

7 Sử dụng kí hiệu $\forall$, $\exists$ để viết các mệnh đề sau:

a) Mọi số thực cộng với số đối của nó đều bằng 0;

b) Có một số tự nhiên mà bình phương bằng 9.

8 Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$;

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 5x - 4$;

c) $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 1 = 0$.

BÀI TẬP

1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là mệnh đề, khẳng định nào là mệnh đề chứa biến?

a) $3 + 2 > 5$;

b) $1 - 2x = 0$;

c) $x - y = 2$;

d) $1 - \sqrt{2} < 0$.

2. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và phát biểu mệnh đề phủ định của chúng.

a) 2020 chia hết cho 3;

b) $\pi < 3,15$;

c) Nước ta hiện nay có 5 thành phố trực thuộc Trung ương;

d) Tam giác có hai góc bằng 45° là tam giác vuông cân.

3. Xét hai mệnh đề:

P: "Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành";

Q: "Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó.

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

4. Cho các định lí:

P: "Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau";

Q: "Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$" ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

a) Chỉ ra giả thiết và kết luận của mỗi định lí.

b) Phát biểu lại mỗi định lí đã cho, sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" hoặc "điều kiện đủ".

c) Mệnh đề đảo của mỗi định lí đó có là định lí không?

5. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ", phát biểu lại các định lí sau:

a) Một phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi biệt thức của nó dương;

b) Một hình bình hành là hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc với nhau và ngược lại.

6. Cho các mệnh đề sau:

P: "Giá trị tuyệt đối của mọi số thực đều lớn hơn hoặc bằng chính nó";

Q: "Có số tự nhiên sao cho bình phương của nó bằng 10";

R: "Có số thực x sao cho $x^2 + 2x - 1 = 0$".

a) Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề trên.

b) Sử dụng kí hiệu $\forall$, $\exists$ để viết lại các mệnh đề đã cho.

7. Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau đây:

a) $\exists x \in \mathbb{N}, x + 3 = 0$; b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$. c) $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = a$.

Bạn có biết?

Các giả thuyết trong toán học

Trong toán học, có những mệnh đề được tin là đúng nhưng chưa thể chứng minh hay bác bỏ (tức chỉ ra rằng nó sai). Mệnh đề như vậy được gọi là một ***giả thuyết*** toán học.

Nhiều giả thuyết toán học là thách thức lớn cho các nhà toán học trong thời gian dài, cuối cùng đã được chứng minh. Chẳng hạn, định lí lớn Fermat "Không tồn tại ba số nguyên dương x, y, z sao cho $x^n + y^n = z^n$, trong đó n là số nguyên, $n > 2$" được Pierre de Fermat (1607 – 1665, nhà toán học người Pháp) phát biểu vào năm 1630 trên bìa một cuốn sách, kèm theo dòng chữ nói rằng ông có phương pháp để chứng minh nhưng không thể viết ra vì lề sách quá hẹp. Phải sau đó gần bốn thế kỉ, định lí lớn Fermat mới được chứng minh bởi nhà toán học người Anh Andrew Wiles vào năm 1994.

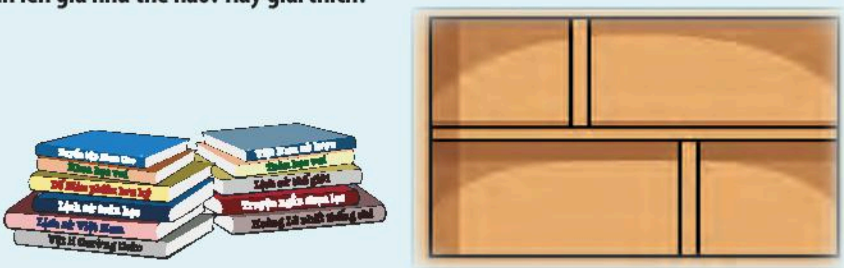
Có những giả thuyết tưởng chắc đúng, nhưng sau đó người ta chỉ ra nó sai. Cũng có những giả thuyết đến nay vẫn chưa thể chứng minh hay bác bỏ. Chẳng hạn, giả thuyết Goldbach (Christian Goldbach, 1690 – 1764, là nhà toán học người Nga) phát biểu rằng "Mọi số chẵn lớn hơn 2 là tổng của hai số nguyên tố" (ví dụ: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, ...). Những giả thuyết như vậy đang chờ đợi các nhà toán học chinh phục trong tương lai.

(*Theo Britannica*)

Bài 2. Tập hợp

Từ khoá: Tập hợp; Phần tử; Thuộc; Không thuộc; Tập hợp rỗng; Tập con; Nằm trong; Chứa; Đoạn; Khoảng; Nửa khoảng.

Giả sử bạn có một giá sách và các quyển sách như hình dưới đây. Bạn sẽ xếp các quyển sách của mình lên giá như thế nào? Hãy giải thích.



1. Nhắc lại về tập hợp

Như đã biết ở cấp Trung học cơ sở, trong toán học, người ta dùng từ ***tập hợp*** để chỉ một nhóm đối tượng nào đó hoàn toàn xác định. Mỗi đối tượng trong nhóm gọi là một ***phần tử*** của tập hợp đó.

Ví dụ 1

a) Các học sinh của lớp 10A tạo thành một tập hợp. Các học sinh nữ của lớp này cũng tạo thành một tập hợp.

b) Các nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$ tạo thành một tập hợp (gọi là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$). Tập hợp này có hai phần tử là 2 và -2.

Người ta thường kí hiệu tập hợp bằng các chữ cái in hoa A, B, C, … và kí hiệu phần tử của tập hợp bằng các chữ cái in thường a, b, c, …

Chú ý: Đôi khi, để ngắn gọn người ta dùng từ "tập" thay cho "tập hợp".

Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$ (đọc là "*a* ***thuộc*** *A*"). Để chỉ a không là phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin A$ (đọc là "*a* ***không thuộc*** *A*").

Một tập hợp có thể không chứa phần tử nào. Tập hợp như vậy gọi là ***tập rỗng***, kí hiệu $\varnothing$.

Ví dụ 2

a) Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn 10, khi đó $0 \in A$, $4 \in A$, $1 \notin A$, $10 \notin A$.

b) Nếu gọi B là tập hợp các tháng trong năm âm lịch có 31 ngày, thì B là tập rỗng.

Người ta thường kí hiệu các tập hợp số như sau: $\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên; $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên; $\mathbb{Q}$ là tập hợp các số hữu tỉ; $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực.

1 a) Lấy ba ví dụ về tập hợp và chỉ ra một số phần tử của chúng.

b) Với mỗi tập hợp $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, hãy sử dụng kí hiệu $\in$ và $\notin$ để chỉ ra hai phần tử thuộc, hai phần tử không thuộc tập hợp đó.

Cách xác định tập hợp

Xét tập hợp A các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn 15. Ta có thể viết tập hợp A dưới dạng ***liệt kê các phần tử***:

$$A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\},$$

hoặc dưới dạng ***chỉ ra tính chất đặc trưng*** cho các phần tử:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ chẵn và } x < 15\}.$$

Chú ý: Khi liệt kê các phần tử của tập hợp, ta có một số chú ý sau đây:

a) Các phần tử có thể được viết theo thứ tự tuỳ ý. Chẳng hạn, để viết tập hợp A các nghiệm của phương trình $x(x-1)=0$, ta có thể viết $A = \{0; 1\}$ hoặc $A = \{1; 0\}$.

b) Mỗi phần tử chỉ được liệt kê một lần. Chẳng hạn, nếu kí hiệu B là tập hợp các chữ cái tiếng Anh trong từ "*mathematics*" thì $B = \{m; a; t; h; e; i; c; s\}$.

c) Nếu quy tắc xác định các phần tử đủ rõ thì người ta dùng "..." mà không nhất thiết viết ra tất cả các phần tử của tập hợp. Chẳng hạn, tập hợp các số tự nhiên không quá 100 có thể được viết là $\{0; 1; 2; \ldots; 100\}$.

Ví dụ 3

Viết mỗi tập hợp sau dưới dạng thích hợp:

a) Tập hợp A các ước dương của 18;

b) Tập hợp B các nghiệm của phương trình $x^2 + 3x - 4 = 0$;

c) Tập hợp C các số tự nhiên lẻ;

d) Tập hợp D các nghiệm của phương trình $x + 3y = 1$.

Giải

a) Số 18 có các ước dương là 1; 2; 3; 6; 9; 18. Do đó $A = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$.

b) Giải phương trình $x^2 + 3x - 4 = 0$ nhận được hai nghiệm 1 và –4. Do đó $B = \{1; -4\}$. Ta cũng có thể viết $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 = 0\}$.

c) Ta có thể viết dưới dạng liệt kê các phần tử: $C = \{1; 3; 5; 7; \ldots\}$. Ta cũng có thể viết dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử: $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ là số lẻ}\}$ hoặc $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là số lẻ}\}$ hoặc $C = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

d) Ta viết $D = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x + 3y = 1\}$.

Chú ý: Có những tập hợp, như A và B ở Ví dụ 3, ta có thể đếm hết các phần tử của chúng. Những tập hợp như vậy được gọi là *tập hợp hữu hạn*.

Nếu E là tập hợp hữu hạn thì số phần tử của nó được kí hiệu là $n(E)$. Chẳng hạn, trong Ví dụ 3, ta có: $n(A) = 6$ và $n(B) = 2$.

Đặc biệt, $n(\varnothing) = 0$.

Chân trời sáng tạo

Viết các tập hợp sau đây dưới dạng liệt kê các phần tử và tìm số phần tử của mỗi tập hợp đó:

a) Tập hợp A các ước của 24;

b) Tập hợp B gồm các chữ số trong số 1 113 305;

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội của 5 và $n \leq 30\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 3 = 0\}$.

Viết các tập hợp sau đây dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử:

a) $A = \{1; 3; 5; ...; 15\}$;

b) $B = \{0; 5; 10; 15; 20; ...\}$;

c) Tập hợp C các nghiệm của bất phương trình $2x + 5 > 0$.

2. Tập con và hai tập hợp bằng nhau

Trong mỗi trường hợp sau đây, các phần tử của tập hợp A có thuộc tập hợp B không? Hãy giải thích.

a) $A = \{-1; 1\}$ và $B = \{-1; 0; 1; 2\}$;

b) $A = \mathbb{N}$ và $B = \mathbb{Z}$;

c) A là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10E, B là tập hợp các học sinh của lớp này;

d) A là tập hợp các loài động vật có vú, B là tập hợp các loài động vật có xương sống.

Cho hai tập hợp A và B. Nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B thì ta nói tập hợp A là ***tập con*** của tập hợp B và kí hiệu $A \subset B$ (đọc là *A chứa trong B*), hoặc $B \supset A$ (đọc là *B chứa A*).

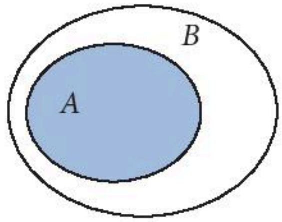
Nhận xét:

• $A \subset A$ và $\varnothing \subset A$ với mọi tập hợp A.

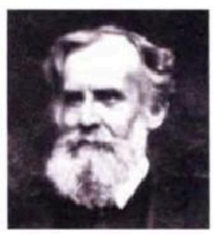
• Nếu A không phải là tập con của B thì ta kí hiệu $A \not\subset B$ (đọc là *A không chứa trong B* hoặc *B không chứa A*).

• Nếu $A \subset B$ hoặc $B \subset A$ thì ta nói A và B có *quan hệ bao hàm*.

Trong toán học, người ta thường minh hoạ tập hợp bằng một hình phẳng được bao quanh bởi một đường cong kín, gọi là ***biểu đồ Ven*** (đặt theo tên nhà toán học, nhà triết học người Anh John Venn). Theo cách này, ta có thể minh hoạ A là tập con của B như Hình 1.



Hình 1

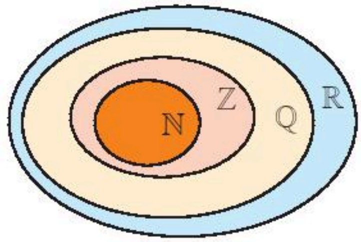


Hình 2. John Venn
(1834 – 1923)

Chú ý:

Giữa các tập hợp số quen thuộc (tập số tự nhiên, tập số nguyên, tập số hữu tỉ, tập số thực), ta có quan hệ bao hàm:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Hình 3

Hai tập hợp A và B gọi là ***bằng nhau***, kí hiệu $A = B$, nếu $A \subset B$ và $B \subset A$.

Nói cách khác, hai tập hợp A và B bằng nhau nếu mỗi phần tử của tập hợp này cũng là phần tử của tập hợp kia và ngược lại.

Ví dụ 4

Xét quan hệ bao hàm giữa mỗi cặp tập hợp sau. Chúng có bằng nhau không?

a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{0; 2; 4\}$;

b) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$ và $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 2\}$;

c) E là tập hợp các hình bình hành và F là tập hợp các tứ giác có hai cặp cạnh đối song song;

d) $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 3\}$ và $H = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 6\}$.

Giải

a) Ta thấy mỗi phần tử của B đều là phần tử của A, do đó $B \subset A$. Có $1 \in A$ nhưng $1 \notin B$, do đó A khác B.

b) Hai phương trình $x^2 = 4$ và $|x| = 2$ đều có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -2$.

Do đó, $C = D = \{-2; 2\}$.

c) Ta biết rằng, một hình tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi nó có hai cặp cạnh đối song song. Do đó, nếu $x \in E$ thì $x \in F$ và ngược lại. Bởi vậy, $E = F$.

d) Giả sử $x \in H$, tức x là bội của 6. Khi đó có số $k \in \mathbb{N}$ sao cho $x = 6k = 3 \,.\, 2k$. Suy ra x cũng là bội của 3 hay $x \in G$. Vậy $H \subset G$. Mặt khác, có $3 \in G$ nhưng $3 \notin H$. Do đó, G khác H.

4 Trong mỗi cặp tập hợp sau đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại? Chúng có bằng nhau không?

a) $A = \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 = 0\}$;

b) C là tập hợp các tam giác đều và D là tập hợp các tam giác cân;

c) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 12\}$ và $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 24\}$.

5 Viết tất cả các tập con của tập hợp $A = \{a; b\}$.

Bạn An khẳng định rằng: Với các tập hợp A, B, C bất kì, nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$. Khẳng định của bạn An có đúng không? Hãy giải thích bằng cách sử dụng biểu đồ Ven.

3. Một số tập con của tập hợp số thực

Sau này ta thường sử dụng các tập con của tập số thực sau đây (a và b là các số thực, $a < b$):

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số
Tập số thực $(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng $(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng $[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng $(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng $[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Khoảng $(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng $(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	

Trong các kí hiệu trên, kí hiệu $-\infty$ đọc là *âm vô cực* (*âm vô cùng*), kí hiệu $+\infty$ đọc là *dương vô cực* (*dương vô cùng*).

6 Dùng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết các tập hợp sau đây:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 10\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq \sqrt{3}\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \leq x < 4\}$;

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4}\}$;

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{\pi}{2}\}$.

BÀI TẬP

1. Viết các tập hợp sau đây dưới dạng liệt kê các phần tử:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - x - 1 = 0\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ có hai chữ số$\}$.

2. Viết các tập hợp sau đây dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử:

a) Tập hợp $A = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$;

b) Tập hợp B các nghiệm của bất phương trình $2x + 1 > 0$;

c) Tập hợp C các nghiệm của phương trình $2x - y = 6$.

3. Trong mỗi cặp tập hợp sau đây, tập hợp nào là tập con của tập còn lại? Chúng có bằng nhau không?

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x = 0\}$;

b) C là tập hợp các hình thoi và D là tập hợp các hình vuông;

c) $E = (-1; 1]$ và $F = (-\infty; 2]$.

4. Hãy viết tất cả các tập con của tập hợp $B = \{0; 1; 2\}$.

5. Dùng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng, viết các tập hợp sau đây:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2\pi < x \leq 2\pi\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \sqrt{3}\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 - 3x \leq 0\}$.

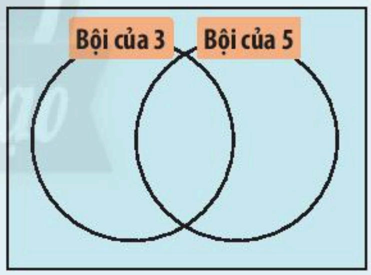
Bài 3. Các phép toán trên tập hợp

Từ khoá: Hợp; Giao; Hiệu; Phần bù.

Có hai đường tròn chia một hình chữ nhật thành các miền như hình bên.
Hãy đặt mỗi thẻ số sau đây vào miền thích hợp trên hình chữ nhật và giải thích cách làm.

65 **75** **78** **82** **90**

94 **100** **120** **231**



1. Hợp và giao của các tập hợp

1 Bảng sau đây cho biết kết quả vòng phỏng vấn tuyển dụng vào một công ty (dấu "+" là đạt, dấu "–" là không đạt):

Mã số ứng viên	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
Chuyên môn	+	+	–	–	+	+	+	+	–	+
Ngoại ngữ	+	–	+	–	+	+	–	+	–	+

a) Xác định tập hợp A gồm các ứng viên đạt yêu cầu về chuyên môn, tập hợp B gồm các ứng viên đạt yêu cầu về ngoại ngữ.

b) Xác định tập hợp C gồm các ứng viên đạt yêu cầu cả về chuyên môn và ngoại ngữ.

c) Xác định tập hợp D gồm các ứng viên đạt ít nhất một trong hai yêu cầu về chuyên môn và ngoại ngữ.

Hình 1

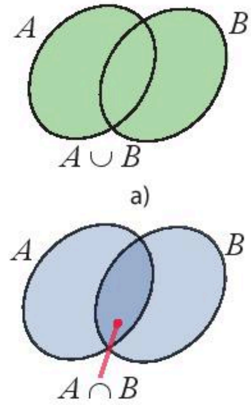
Cho hai tập hợp A và B.

Tập hợp các phần tử thuộc A hoặc thuộc B gọi là ***hợp*** của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Tập hợp các phần tử thuộc cả hai tập hợp A và B gọi là ***giao*** của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$



Hình 2

Ví dụ 1

Xác định $A \cup B$ và $A \cap B$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \{2; 3; 5; 7\}$, $B = \{1; 3; 5; 15\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x + 2) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$;

c) A là tập hợp các hình bình hành, B là tập hợp các hình thoi.

Giải

a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 15\}$, $A \cap B = \{3; 5\}$.

b) Phương trình $x(x + 2) = 0$ có hai nghiệm là 0 và -2, nên $A = \{-2; 0\}$.

Phương trình $x^2 + 2 = 0$ vô nghiệm, nên $B = \varnothing$.

Từ đó, $A \cup B = A \cup \varnothing = A = \{-2; 0\}$, $A \cap B = A \cap \varnothing = \varnothing$.

c) Vì mỗi hình thoi cũng là hình bình hành nên $B \subset A$. Từ đó, $A \cup B = A$, $A \cap B = B$.

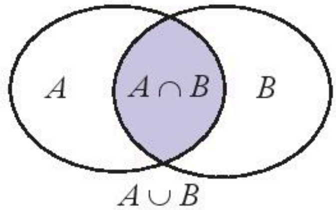
Ví dụ 2

Lớp 10D có 22 bạn chơi bóng đá, 25 bạn chơi cầu lông và 15 bạn chơi cả hai môn thể thao này. Hỏi lớp 10D có bao nhiêu học sinh chơi ít nhất một trong hai môn thể thao bóng đá và cầu lông?

Giải

Kí hiệu A, B lần lượt là tập hợp các học sinh của lớp 10D chơi bóng đá, chơi cầu lông.

Theo giả thiết, $n(A) = 22$, $n(B) = 25$, $n(A \cap B) = 15$.



Hình 3

Nhận thấy rằng, nếu tính tổng $n(A) + n(B)$ thì ta được số học sinh lớp 10D chơi bóng đá hoặc cầu lông, nhưng số bạn chơi cả hai môn được tính hai lần. Do đó, số bạn chơi ít nhất một trong hai môn là:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 22 + 25 - 15 = 32.$$

Vậy lớp 10D có 32 học sinh chơi ít nhất một trong hai môn thể thao bóng đá và cầu lông.

Nhận xét:

• Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

• Đặc biệt, nếu A và B không có phần tử chung, tức $A \cap B = \varnothing$, thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

1 Xác định các tập hợp $A \cup B$ và $A \cap B$, biết:

a) $A = \{a; b; c; d; e\}$, $B = \{a; e; i; u\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$.

2 Cho $A = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, 3x - y = 9\}$, $B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x - y = 1\}$.

Hãy xác định $A \cap B$.

Tại vòng chung kết của một trò chơi trên truyền hình, có 100 khán giả tại trường quay có quyền bình chọn cho hai thí sinh A và B. Biết rằng có 85 khán giả bình chọn cho thí sinh A, 72 khán giả bình chọn cho thí sinh B và 60 khán giả bình chọn cho cả hai thí sinh này. Có bao nhiêu khán giả đã tham gia bình chọn? Có bao nhiêu khán giả không tham gia bình chọn?

2. Hiệu của hai tập hợp, phần bù của tập con

2 Trở lại bảng thông tin về kết quả phỏng vấn tuyển dụng ở 1.

a) Xác định tập hợp E gồm những ứng viên đạt yêu cầu về chuyên môn nhưng không đạt yêu cầu về ngoại ngữ.

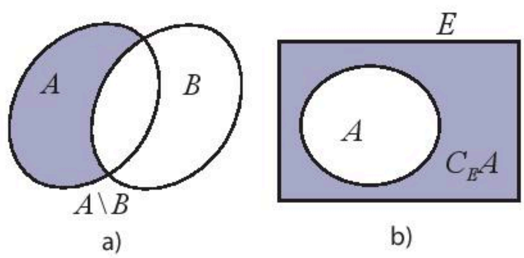
b) Xác định tập hợp F gồm những ứng viên không đạt yêu cầu về chuyên môn.

Cho hai tập hợp A và B.

Tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là ***hiệu*** của A và B, kí hiệu $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Nếu A là tập con của E thì hiệu $E \setminus A$ gọi là ***phần bù*** của A trong E, kí hiệu $C_E A$.



Hình 4

Ví dụ 3

Cho $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$, $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$, $B = \{0; 3; 6; 9\}$.

Xác định các tập hợp $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_E A$, $C_E B$.

Giải

Ta có: $A \setminus B = \{2; 4; 8\}$, $B \setminus A = \{3; 9\}$, $C_E A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $C_E B = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$.

3 Cho các tập hợp $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 8\}$, $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$.

Xác định các tập hợp sau đây:

a) $A \setminus B$, $B \setminus A$ và $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$;

b) $C_E(A \cap B)$ và $(C_E A) \cup (C_E B)$;

c) $C_E(A \cup B)$ và $(C_E A) \cap (C_E B)$.

Chú ý: Trong các chương sau, để tìm các tập hợp là hợp, giao, hiệu, phần bù của những tập con của tập số thực, ta thường vẽ sơ đồ trên trục số.

Ví dụ 4

Xác định các tập hợp sau đây:

a) $A = [-2; 1) \cup (0; 3]$;

b) $B = (-\infty; 1] \cup (-2; 2)$;

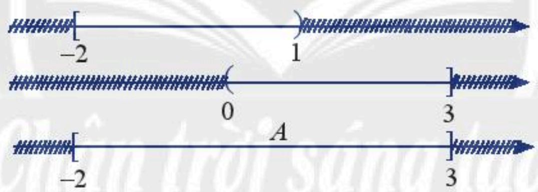
c) $C = (-1; 4] \cap (-3; 2)$;

d) $D = (-3; 2) \setminus (1; 4)$;

e) $E = C_{\mathbb{R}}(-\infty; 2)$.

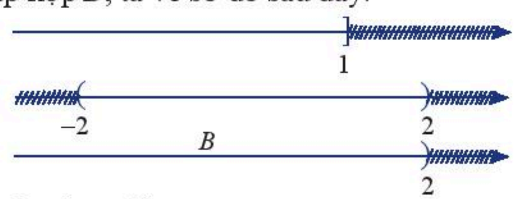
Giải

a) Để xác định tập hợp A, ta vẽ sơ đồ sau đây:



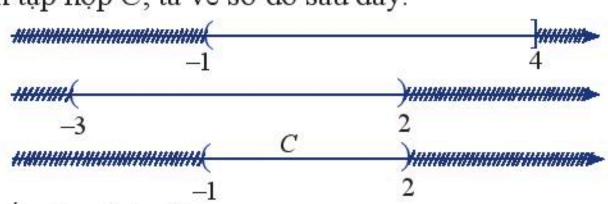
Từ sơ đồ, ta thấy $A = [-2; 3]$.

b) Để xác định tập hợp B, ta vẽ sơ đồ sau đây:



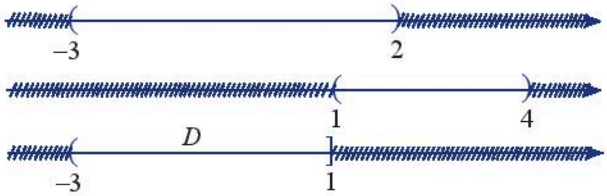
Từ sơ đồ, ta thấy $B = (-\infty; 2)$.

c) Để xác định tập hợp C, ta vẽ sơ đồ sau đây:



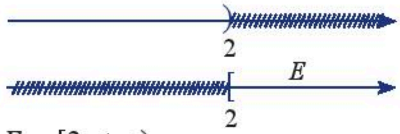
Từ sơ đồ, ta thấy $C = (-1; 2)$.

d) Để xác định tập hợp D, ta vẽ sơ đồ sau đây:



Từ sơ đồ, ta thấy $D = (-3; 1]$.

e) Để xác định tập hợp E, ta vẽ sơ đồ sau đây:



Từ sơ đồ, ta thấy $E = [2; +\infty)$.

4 Xác định các tập hợp sau đây:

a) $(1; 3) \cup [-2; 2]$; b) $(-\infty; 1) \cap [0; \pi]$; c) $[\frac{1}{2}; 3) \setminus (1; +\infty)$; d) $C_{\mathbb{R}}[-1; +\infty)$.

BÀI TẬP

1. Xác định các tập hợp $A \cup B$ và $A \cap B$ với

a) A = {đỏ; cam; vàng; lục; lam}, B = {lục; lam; chàm; tím};

b) A là tập hợp các tam giác đều, B là tập hợp các tam giác cân.

2. Xác định tập hợp $A \cap B$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 < 0\}$;

b) $A = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = 2x - 1\}$, $B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = -x + 5\}$;

c) A là tập hợp các hình thoi, B là tập hợp các hình chữ nhật.

3. Cho $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$, $A = \{x \in E \mid x \text{ là bội của } 3\}$, $B = \{x \in E \mid x \text{ là ước của } 6\}$. Xác định các tập hợp $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_E A$, $C_E B$, $C_E(A \cup B)$, $C_E(A \cap B)$.

4. Cho A và B là hai tập hợp bất kì. Trong mỗi cặp tập hợp sau đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại? Hãy giải thích bằng cách sử dụng biểu đồ Ven.

a) A và $A \cup B$; b) A và $A \cap B$.

5. Trong số 35 học sinh của lớp 10H, có 20 học sinh thích môn Toán, 16 học sinh thích môn Tiếng Anh và 12 học sinh thích cả hai môn này. Hỏi lớp 10H:

a) có bao nhiêu học sinh thích ít nhất một trong hai môn Toán và Tiếng Anh?

b) có bao nhiêu học sinh không thích cả hai môn này?

6. Xác định các tập hợp sau đây:

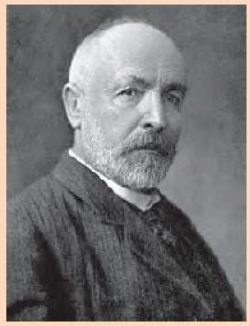
a) $(-\infty; 0] \cup [-\pi; \pi]$; b) $[-3{,}5; 2] \cap (-2; 3{,}5)$;

c) $(-\infty; \sqrt{2}] \cap [1; +\infty)$; d) $(-\infty; \sqrt{2}] \setminus [1; +\infty)$.

Bạn có biết?

Cantor và lí thuyết tập hợp

Các bạn học sinh đã được làm quen với khái niệm tập hợp từ lớp 6, và đã được tìm hiểu kĩ hơn về nó trong chương này. Tới đây, chúng ta sẽ thường xuyên sử dụng khái niệm này trong các chủ đề tiếp theo của chương trình toán học phổ thông.



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
(1845 – 1918)

Có hẳn một lí thuyết nghiên cứu về các tập hợp, gọi là lí thuyết tập hợp. Cha đẻ của lí thuyết này là Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, một nhà toán học người Đức, sinh ra ở Nga. Các công trình nghiên cứu của ông về các tập hợp vô hạn trong khoảng những năm 1874 đến 1897 đã khai sinh ra lí thuyết tập hợp.

Lí thuyết tập hợp ra đời đã có ảnh hưởng sâu sắc đến sự phát triển của toán học. Một mặt, nó đặt nền tảng cho các ngành toán học phát triển. Mặt khác, nó đặt ra yêu cầu rà soát lại toàn bộ cơ sở logic cho toán học. Đây chính là tiền đề cho ngành logic toán và cơ sở toán học đạt bước tiến dài trong nửa đầu của thế kỉ XX, có tác động lớn đến nhận thức của con người về các lí thuyết khoa học nói chung.

Nếu coi toán học hiện đại là một toà lâu đài nguy nga, thì lí thuyết tập hợp là nền móng của toà lâu đài đó.

(Theo Britannica)

Chân trời sáng tạo

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

1. Xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau:

a) $\{a\} \in \{a; b; c; d\}$;

b) $\varnothing = \{0\}$;

c) $\{a; b; c; d\} = \{b; a; d; c\}$;

d) $\{a; b; c\} \not\subset \{a; b; c\}$.

2. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau:

a) Nếu $2a - 1 > 0$ thì $a > 0$ (a là số thực cho trước);

b) $a - 2 > b$ nếu và chỉ nếu $a > b + 2$ (a, b là hai số thực cho trước).

3. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ", phát biểu lại các định lí sau:

a) Nếu $B \subset A$ thì $A \cup B = A$ (A, B là hai tập hợp);

b) Nếu hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau thì nó là hình thoi.

4. Cho định lí:

"$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Z}$ nếu và chỉ nếu $x + 1 \in \mathbb{Z}$".

Phát biểu lại định lí này, sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ".

5. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{N}, x^3 > x$;

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, x \notin \mathbb{N}$;

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, nếu $x \in \mathbb{Z}$ thì $x \in \mathbb{Q}$.

6. Xét quan hệ bao hàm giữa các tập hợp dưới đây. Vẽ biểu đồ Ven để thể hiện các quan hệ bao hàm đó.

A là tập hợp các hình tứ giác;

B là tập hợp các hình bình hành;

C là tập hợp các hình chữ nhật;

D là tập hợp các hình vuông;

E là tập hợp các hình thoi.

7. a) Hãy viết tất cả các tập con của tập hợp $A = \{a; b; c\}$.

b) Tìm tất cả các tập hợp B thoả mãn điều kiện $\{a; b\} \subset B \subset \{a; b; c; d\}$.

8. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x - 6 = 0\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$.

Tìm $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

9. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - 2x \le 0\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 < 0\}$.

Tìm $A \cap B$, $A \cup B$.

10. Lớp 10C có 45 học sinh, trong đó có 18 học sinh tham gia cuộc thi vẽ đồ hoạ trên máy tính, 24 học sinh tham gia cuộc thi tin học văn phòng cấp trường và 9 học sinh không tham gia cả hai cuộc thi này. Hỏi có bao nhiêu học sinh của lớp 10C tham gia đồng thời hai cuộc thi?

Chân trời sáng tạo

Chương II BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Trong chương II, chúng ta sẽ tìm hiểu về bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta sẽ học cách nhận biết nghiệm và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong mặt phẳng toạ độ và ứng dụng những kiến thức học được vào giải quyết các bài toán thực tiễn.

Bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác có thể giúp tối ưu hoá sản xuất.

Học xong chương này, bạn có thể:

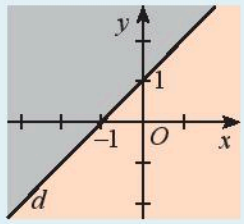
– Nhận biết được bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
– Biểu diễn được miền nghiệm của bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ.
– Vận dụng được kiến thức về bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vào giải quyết các bài toán thực tiễn (ví dụ: bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác, ...).

Bài 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Từ khoá: Bất phương trình bậc nhất hai ẩn; Nghiệm; Miền nghiệm.

Đường thẳng d: $y = x + 1$ chia mặt phẳng toạ độ thành hai miền (không tính đường thẳng d) như hình bên. Dùng các nhãn dưới đây đặt vào miền phù hợp để đặt tên cho miền đó.

$y > x + 1$ $\quad$ $y < x + 1$



1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1 Bạn Nam để dành được 700 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ các bạn học sinh ở vùng bị bão lụt, Nam đã ủng hộ x tờ tiền có mệnh giá 20 nghìn đồng, y tờ tiền có mệnh giá 50 nghìn đồng từ tiền để dành của mình.

a) Biểu diễn tổng số tiền bạn Nam đã ủng hộ theo x và y.

b) Giải thích tại sao ta lại có bất đẳng thức $20x + 50y \leq 700$.

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax + by + c < 0;\ ax + by + c > 0;\ ax + by + c \leq 0;\ ax + by + c \geq 0,$$

trong đó a, b, c là những số cho trước; a, b không đồng thời bằng 0 và x, y là các ẩn.

Ví dụ 1

Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau đây:

a) $x - 5y + 2 < 0$; $\quad$ b) $9x^2 + 8y - 7 \geq 0$;

c) $3x - 2 > 0$; $\quad$ d) $4y + 11 \leq 0$.

Giải

Các bất phương trình a), c), d) là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bất phương trình b) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có chứa x^2.

1 Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $2x - 3y + 1 \leq 0$; $\quad$ b) $x - 3y + 1 \geq 0$;

c) $y - 5 > 0$; $\quad$ d) $x - y^2 + 1 > 0$.

2. Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Trường hợp nào sau đây thoả mãn tình huống được nêu trong 1 ?

Trường hợp 1: Nam ủng hộ 2 tờ tiền có mệnh giá 20 nghìn đồng và 3 tờ tiền có mệnh giá 50 nghìn đồng.

Trường hợp 2: Nam ủng hộ 15 tờ tiền có mệnh giá 20 nghìn đồng và 10 tờ tiền có mệnh giá 50 nghìn đồng.

Xét bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thoả mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là một ***nghiệm*** của bất phương trình đã cho.

Chú ý: Nghiệm của các bất phương trình $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \leq 0$, $ax + by + c \geq 0$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 2

Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $20x + 50y - 700 < 0$?

a) $(5; 6)$; b) $(9; 11)$.

Giải

a) Vì $20 . 5 + 50 . 6 - 700 = -300 < 0$ nên $(5; 6)$ là nghiệm của bất phương trình $20x + 50y - 700 < 0$.

b) Vì $20 . 9 + 50 . 11 - 700 = 30 > 0$ nên $(9; 11)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $20x + 50y - 700 < 0$.

Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $4x - 7y - 28 \geq 0$?

a) $(9; 1)$; b) $(2; 6)$; c) $(0; -4)$.

Cho biết mỗi 100 g thịt bò chứa khoảng 26,1 g protein, một quả trứng nặng 44 g chứa khoảng 5,7 g protein (*nguồn:* https://www.vinmec.com). Giả sử có một người mỗi ngày cần không quá 60 g protein. Gọi số gam thịt bò và số quả trứng mà người đó ăn trong một ngày lần lượt là x và y.

a) Lập bất phương trình theo x, y diễn tả giới hạn về lượng protein trong khẩu phần ăn hằng ngày của người đó.

b) Dùng bất phương trình ở câu a) để trả lời hai câu hỏi sau:

– Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng (mỗi quả 44 g) trong một ngày thì có phù hợp không?

– Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng (mỗi quả 44 g) trong một ngày thì có phù hợp không?

3. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Cho bất phương trình $2x - y + 1 < 0$.

a) Vẽ đường thẳng $y = 2x + 1$.

b) Các cặp số $(-2; 0)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$ có là nghiệm của bất phương trình đã cho không?

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là ***miền nghiệm*** của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Người ta chứng minh được: Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ (a, b không đồng thời bằng 0) xác định một đường thẳng Δ. Đường thẳng Δ chia mặt phẳng Oxy thành hai nửa mặt phẳng, trong đó một nửa (không kể bờ Δ) là tập hợp các điểm $(x; y)$ thoả mãn $ax + by + c > 0$, nửa còn lại (không kể bờ Δ) là tập hợp các điểm $(x; y)$ thoả mãn $ax + by + c < 0$.

Ta có thể biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by + c < 0$ như sau:

Bước 1: Trên mặt phẳng Oxy, vẽ đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$.

Bước 2: Lấy một điểm $(x_0; y_0)$ không thuộc Δ. Tính $ax_0 + by_0 + c$.

Bước 3: Kết luận

– Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) chứa điểm $(x_0; y_0)$.

– Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) không chứa điểm $(x_0; y_0)$.

Chú ý: Đối với các bất phương trình bậc nhất hai ẩn dạng $ax + by + c \leq 0$ (hoặc $ax + by + c \geq 0$) thì miền nghiệm là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ (hoặc $ax + by + c > 0$) kể cả bờ.

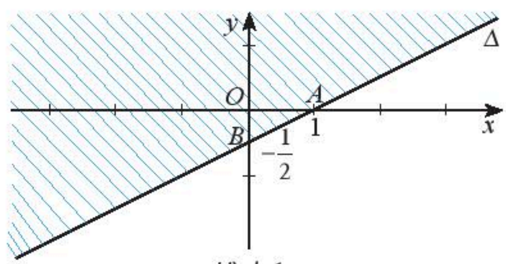
Ví dụ 3

Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $x - 2y - 1 > 0$; b) $x + y - 1 \leq 0$.

Giải

a) Vẽ đường thẳng Δ: $x - 2y - 1 = 0$ đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.



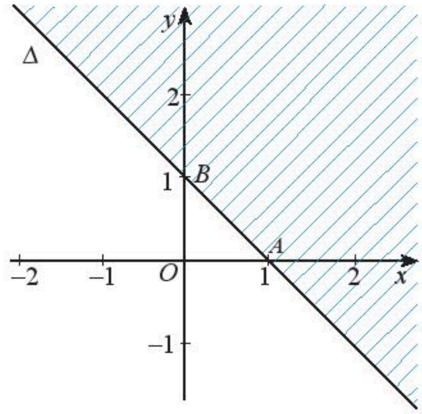
Hình 1

Xét gốc toạ độ $O(0; 0)$. Ta thấy $O \notin \Delta$ và $0 - 2.0 - 1 < 0$. Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không kể bờ Δ, không chứa gốc toạ độ O (*miền không gạch chéo trên Hình 1*).

b) Vẽ đường thẳng Δ: $x + y - 1 = 0$ đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; 1)$.

Xét gốc toạ độ $O(0; 0)$. Ta thấy $O \notin \Delta$ và $0 + 0 - 1 < 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ, chứa gốc toạ độ O (*miền không gạch chéo trên Hình 2*).



Hình 2

3 Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $2x + y - 2 \leq 0$; b) $x - y - 2 \geq 0$.

2 Biểu diễn miền nghiệm của hai bất phương trình sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy:

a) $y \geq 2$; b) $x \leq 4$.

BÀI TẬP

1. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x - 2y + 6 > 0$.

a) $(0; 0)$ có phải là một nghiệm của bất phương trình đã cho không?

b) Chỉ ra ba cặp số $(x; y)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng Oxy.

2. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ Oxy:

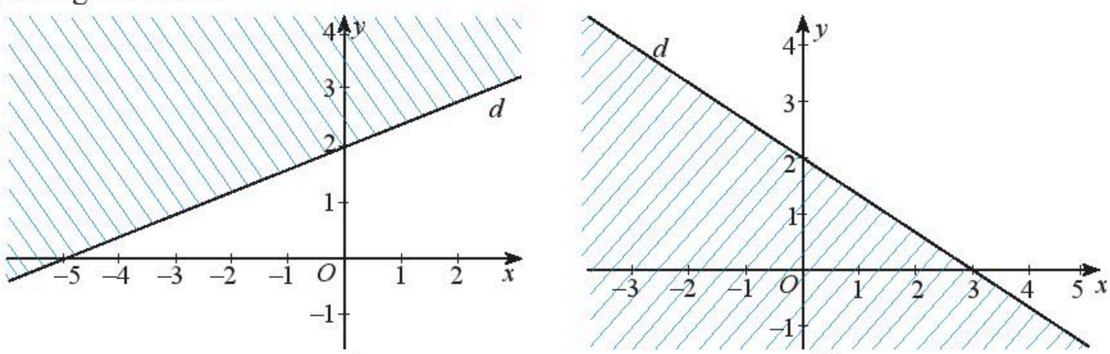
a) $-x + y + 2 > 0$; b) $y + 2 \geq 0$; c) $-x + 2 \leq 0$.

3. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ Oxy:

a) $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$; b) $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$.

4. Bạn Cúc muốn pha hai loại nước cam. Để pha một lít nước cam loại I cần 30 g bột cam, còn một lít nước cam loại II cần 20 g bột cam. Gọi x và y lần lượt là số lít nước cam loại I và II pha chế được. Biết rằng Cúc chỉ có thể dùng không quá 100 g bột cam. Hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước cam loại I và II mà bạn Cúc có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đó trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy.

5. Miền không gạch chéo (không kể bờ d) trong mỗi hình dưới đây là miền nghiệm của bất phương trình nào?



Hình 3

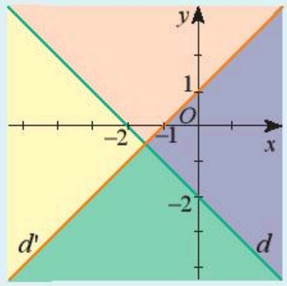
Bài 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Từ khoá: **Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn; Nghiệm; Miền nghiệm; Điều kiện ràng buộc; Giá trị lớn nhất; Giá trị nhỏ nhất.**

Hai đường thẳng d: $y = -x - 2$ và d': $y = x + 1$ chia mặt phẳng toạ độ thành bốn miền khác nhau (không tính hai đường thẳng d và d') như hình bên. Để kí hiệu một trong bốn miền đó, người ta đã tạo nhãn:

$$\begin{array}{l} y < -x - 2 \\ y < x + 1 \end{array}$$

Hãy đặt nhãn này vào miền phù hợp.



1. Khái niệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1 Một người nông dân dự định quy hoạch x sào đất trồng cà tím và y sào đất trồng cà chua. Biết rằng người đó chỉ có tối đa 9 triệu đồng để mua hạt giống và giá tiền hạt giống cho mỗi sào đất trồng cà tím là 200 000 đồng, mỗi sào đất trồng cà chua là 100 000 đồng.

a) Viết các bất phương trình mô tả các điều kiện ràng buộc đối với x, y.

b) Cặp số nào sau đây thoả mãn đồng thời tất cả các bất phương trình nêu trên?

(20; 40), (40; 20), (–30; 10).

Bài toán tìm nghiệm chung của ba bất phương trình $0{,}2x + 0{,}1y - 9 \le 0$; $x \ge 0$ và $y \ge 0$ là bài toán tìm nghiệm của hệ sau:

$$\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}1y - 9 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một ***nghiệm*** của hệ bất phương trình đã cho.

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ có toạ độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là ***miền nghiệm*** của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 1

Tìm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các hệ sau:

a) $\begin{cases} 3x + y - 1 \le 0 \\ 2x - y + 2 \ge 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y - 9 = 0 \\ 4x - 7y + 3 = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y - 1 < 0 \\ x + 2 \ge 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y - 3 \le 0 \\ -2x + y + 3 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

Chân trời sáng tạo

Giải

Các hệ a), c), d) là các hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

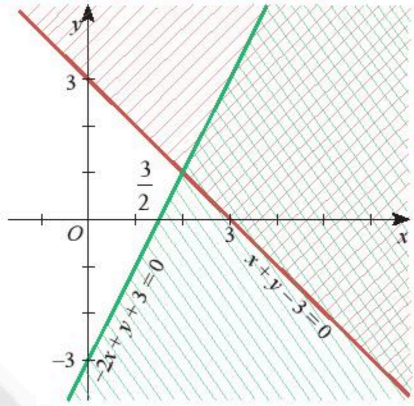
Hệ b) không phải hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì hệ này chỉ gồm các phương trình.

1 Hãy chỉ ra hai nghiệm của mỗi hệ bất phương trình trong Ví dụ 1.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

2 Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} x+y-3\le 0 \\ -2x+y+3\ge 0. \end{cases}$

Miền nào trong Hình 1 biểu diễn phần giao các miền nghiệm của hai bất phương trình trong hệ đã cho?



Hình 1

Miền không gạch chéo trong Hình 1 là miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.

Để ***biểu diễn miền nghiệm*** của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ *Oxy*, ta thực hiện như sau:

– Trên cùng mặt phẳng toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.

– Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

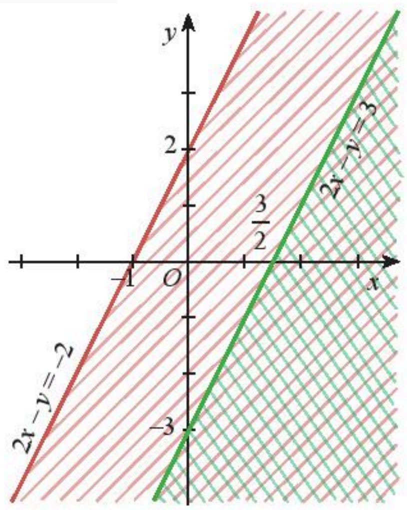
Ví dụ 2

Biểu diễn miền nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x-y-3\le 0 \\ 2x-y+2\le 0. \end{cases}$

Giải

Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng *Oxy*.

Miền không gạch chéo (kể cả bờ) trong Hình 2 là phần giao của hai miền nghiệm của hai bất phương trình và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



Hình 2

Ví dụ 3

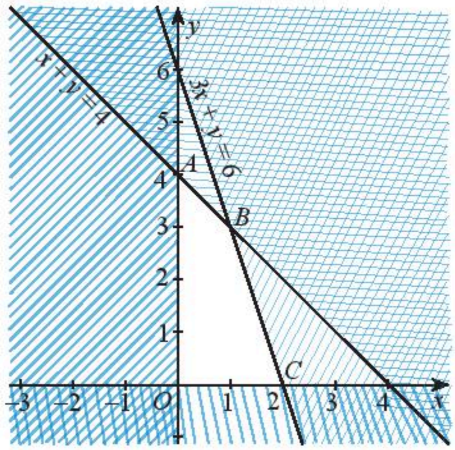
Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 3x + y \le 6 \\ x + y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Giải

Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng Oxy.

Miền không gạch chéo (miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) trong Hình 3 là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



Hình 3

Chú ý: Miền mặt phẳng toạ độ bao gồm một đa giác lồi và phần nằm bên trong đa giác đó được gọi là một ***miền đa giác***. Chẳng hạn, ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình trong Ví dụ 3 là miền tứ giác $OABC$.

2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + y \le 8 \\ 2x + 3y \le 18 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác

Hệ bất phương trình giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu. Chúng thường được đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác.

Người ta chứng minh được F đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác.

Ví dụ 4

Bác Năm dự định trồng ngô và đậu xanh trên một mảnh đất có diện tích 8 ha. Nếu trồng 1 ha ngô thì cần 20 ngày công và thu được 40 triệu đồng. Nếu trồng 1 ha đậu xanh thì cần 30 ngày công và thu được 50 triệu đồng. Bác Năm cần trồng bao nhiêu hecta cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác Năm chỉ có thể sử dụng không quá 180 ngày công cho việc trồng ngô và đậu xanh.

Giải

Gọi x là số hecta đất trồng ngô và y là số hecta đất trồng đậu xanh.

Chân trời sáng tạo

Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

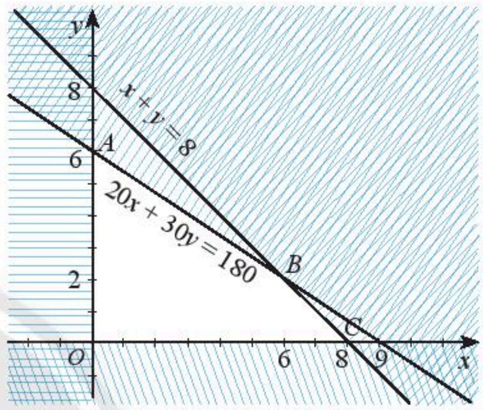
– Hiển nhiên $x \geq 0$, $y \geq 0$.

– Diện tích canh tác không vượt quá 8 ha nên $x + y \leq 8$.

– Số ngày công sử dụng không vượt quá 180 nên $20x + 30y \leq 180$.

Từ đó, ta có hệ bất phương trình mô tả các điều kiện ràng buộc: $\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình này trên hệ trục toạ độ Oxy, ta được miền tứ giác $OABC$ (Hình 4).



Hình 4

Toạ độ các đỉnh của tứ giác đó là: $O(0; 0)$; $A(0; 6)$; $B(6; 2)$; $C(8; 0)$.

Gọi F là số tiền (đơn vị: triệu đồng) bác Năm thu được, ta có: $F = 40x + 50y$.

Ta phải tìm x, y thoả mãn hệ bất phương trình sao cho F đạt giá trị lớn nhất, nghĩa là tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 40x + 50y$ trên miền tứ giác $OABC$.

Tính các giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của đa giác, ta có:

Tại $O(0; 0)$: $F = 40.0 + 50.0 = 0$; Tại $A(0; 6)$: $F = 40.0 + 50.6 = 300$;

Tại $B(6; 2)$: $F = 40.6 + 50.2 = 340$; Tại $C(8; 0)$: $F = 40.8 + 50.0 = 320$.

F đạt giá trị lớn nhất bằng 340 tại $B(6; 2)$.

Vậy để thu được nhiều tiền nhất, bác Năm cần trồng 6 ha ngô và 2 ha đậu xanh.

Ví dụ 5

Một người dùng ba loại nguyên liệu A, B, C để sản xuất ra hai loại sản phẩm P và Q. Để sản xuất 1 kg mỗi loại sản phẩm P hoặc Q phải dùng một số kilôgam nguyên liệu khác nhau. Tổng số kilôgam nguyên liệu mỗi loại mà người đó có và số kilôgam từng loại nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra 1 kg sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	**Số kilôgam nguyên liệu đang có**	**Số kilôgam từng loại nguyên liệu cần để sản xuất 1 kg sản phẩm**	
		P	Q
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

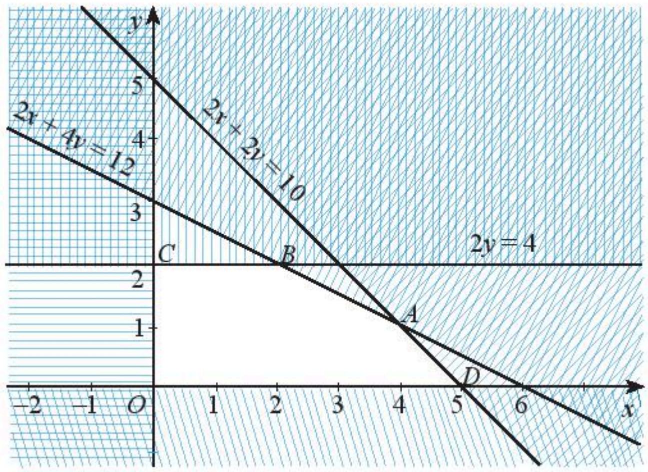
Biết 1 kg sản phẩm P có lợi nhuận 3 triệu đồng và 1 kg sản phẩm Q có lợi nhuận 5 triệu đồng. Hãy lập phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất.

Giải

Gọi x là số kilôgam sản phẩm P, y là số kilôgam sản phẩm Q cần sản xuất. Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y \le 10 \\ 2y \le 4 \\ 2x + 4y \le 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục toạ độ Oxy, ta được như Hình 5.



Hình 5

Miền nghiệm là miền ngũ giác $OCBAD$ (Hình 5) với các đỉnh: $O(0; 0)$; $C(0; 2)$; $B(2; 2)$; $A(4; 1)$; $D(5; 0)$.

Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) thu được, ta có: $F = 3x + 5y$.

Tính giá trị của F tại các đỉnh của ngũ giác:

Tại $O(0; 0)$: $F = 3.0 + 5.0 = 0$; Tại $C(0; 2)$: $F = 3.0 + 5.2 = 10$;

Tại $B(2; 2)$: $F = 3.2 + 5.2 = 16$; Tại $A(4; 1)$: $F = 3.4 + 5.1 = 17$;

Tại $D(5; 0)$: $F = 3.5 + 5.0 = 15$.

F đạt giá trị lớn nhất bằng 17 tại $A(4; 1)$.

Vậy người đó cần sản xuất 4 kg sản phẩm P và 1 kg sản phẩm Q để có lãi cao nhất là 17 triệu đồng.

Một người bán nước giải khát đang có 24 g bột cam, 9 l nước và 210 g đường để pha chế hai loại nước cam A và B. Để pha chế 1 l nước cam loại A cần 30 g đường, 1 l nước và 1 g bột cam; để pha chế 1 l nước cam loại B cần 10 g đường, 1 l nước và 4 g bột cam. Mỗi lít nước cam loại A bán được 60 nghìn đồng, mỗi lít nước cam loại B bán được 80 nghìn đồng. Người đó nên pha chế bao nhiêu lít nước cam mỗi loại để có doanh thu cao nhất?

BÀI TẬP

1. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y - 3 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 4 \\ x + y - 5 \le 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

2. Một nhà máy sản xuất hai loại thuốc trừ sâu nông nghiệp là A và B. Cứ sản xuất mỗi thùng loại A thì nhà máy thải ra 0,25 kg khí carbon dioxide (CO_2) và 0,6 kg khí sulfur dioxide (SO_2), sản xuất mỗi thùng loại B thì thải ra 0,5 kg CO_2 và 0,2 kg SO_2. Biết rằng, quy định hạn chế sản lượng CO_2 của nhà máy tối đa là 75 kg và SO_2 tối đa là 90 kg mỗi ngày.

Hình 6

a) Tìm hệ bất phương trình mô tả số thùng của mỗi loại thuốc trừ sâu mà nhà máy có thể sản xuất mỗi ngày để đáp ứng các điều kiện hạn chế trên. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó trên mặt phẳng toạ độ.

b) Việc nhà máy sản xuất 100 thùng loại A và 80 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?

c) Việc nhà máy sản xuất 60 thùng loại A và 160 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?

3. Bạn Lan thu xếp được không quá 10 giờ để làm hai loại đèn trung thu tặng cho các trẻ em khuyết tật. Loại đèn hình con cá cần 2 giờ để làm xong 1 cái, còn loại đèn ông sao chỉ cần 1 giờ để làm xong 1 cái. Gọi x, y lần lượt là số đèn hình con cá và đèn ông sao bạn Lan sẽ làm. Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

4. Một học sinh dự định vẽ các tấm thiệp xuân làm bằng tay để bán trong một hội chợ Tết. Cần 2 giờ để vẽ một tấm thiệp loại nhỏ có giá 10 nghìn đồng và 3 giờ để vẽ một tấm thiệp loại lớn có giá 20 nghìn đồng. Học sinh này chỉ có 30 giờ để vẽ và ban tổ chức hội chợ yêu cầu phải vẽ ít nhất 12 tấm. Hãy cho biết bạn ấy cần vẽ bao nhiêu tấm thiệp mỗi loại để có được nhiều tiền nhất.

5. Trong một tuần, bạn Mạnh có thể thu xếp được tối đa 12 giờ để tập thể dục giảm cân bằng hai môn: đạp xe và tập cử tạ tại phòng tập. Cho biết mỗi giờ đạp xe sẽ tiêu hao 350 calo và không tốn chi phí, mỗi giờ tập cử tạ sẽ tiêu hao 700 calo với chi phí 50 000 đồng / giờ. Mạnh muốn tiêu hao nhiều calo nhưng không được vượt quá 7 000 calo một tuần. Hãy giúp bạn Mạnh tính số giờ đạp xe và số giờ tập tạ một tuần trong hai trường hợp sau:

a) Mạnh muốn chi phí luyện tập là ít nhất.

b) Mạnh muốn số calo tiêu hao là nhiều nhất.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

1. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ Oxy:

a) $-2x+y-1\le 0$; b) $-x+2y>0$;

c) $x-5y<2$; d) $-3x+y+2\le 0$;

e) $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ Oxy:

$$\begin{cases} x-2y>0 \\ x+3y<3. \end{cases}$$

3. Một công ty dự định sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số kilôgam dự trữ từng loại nguyên liệu và số kilôgam từng loại nguyên liệu cần dùng để sản xuất ra 1 kg sản phẩm được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số kilôgam nguyên liệu dự trữ	Số kilôgam nguyên liệu cần dùng sản xuất 1 kg sản phẩm	
		A	B
I	8	2	1
II	24	4	4
III	8	1	2

Công ty đó nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để tiền lãi thu về lớn nhất? Biết rằng, mỗi kilôgam sản phẩm loại A lãi 30 triệu đồng, mỗi kilôgam sản phẩm loại B lãi 50 triệu đồng.

4. Một công ty cần mua các tủ đựng hồ sơ. Có hai loại tủ: Tủ loại A chiếm 3 m² sàn, loại này có sức chứa 12 m³ và có giá 7,5 triệu đồng; tủ loại B chiếm 6 m² sàn, loại này có sức chứa 18 m³ và có giá 5 triệu. Cho biết công ty chỉ thu xếp được nhiều nhất là 60 m² mặt bằng cho chỗ đựng hồ sơ và ngân sách mua tủ không quá 60 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch mua sắm để công ty có được thể tích đựng hồ sơ lớn nhất.

5. Một nông trại thu hoạch được 180 kg cà chua và 15 kg hành tây. Chủ nông trại muốn làm các hũ tương cà để bán. Biết rằng, để làm ra một hũ tương cà loại A cần 10 kg cà chua cùng với 1 kg hành tây và khi bán lãi được 200 nghìn đồng, còn để làm được một hũ tương cà loại B cần 5 kg cà chua cùng với 0,25 kg hành tây và khi bán lãi được 150 nghìn đồng. Thăm dò thị hiếu của khách hàng cho thấy cần phải làm số hũ tương loại A ít nhất gấp 3,5 lần số hũ tương loại B. Hãy giúp chủ nông trại lập kế hoạch làm tương cà để có được nhiều tiền lãi nhất.

6. Một xưởng sản xuất có hai máy đặc chủng A, B sản xuất hai loại sản phẩm X, Y. Để sản xuất một tấn sản phẩm X cần dùng máy A trong 6 giờ và dùng máy B trong 2 giờ. Để sản xuất một tấn sản phẩm Y cần dùng máy A trong 2 giờ và dùng máy B trong 2 giờ. Cho biết mỗi máy không thể sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy A làm việc không quá 12 giờ một ngày, máy B làm việc không quá 8 giờ một ngày. Một tấn sản phẩm X lãi 10 triệu đồng và một tấn sản phẩm Y lãi 8 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất mỗi ngày sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

Chương III HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ

Trong chương này, chúng ta sẽ học cách nhận biết hàm số, sự biến thiên và đồ thị của hàm số bậc hai cũng như tìm hiểu các ứng dụng của hàm số để giải quyết một số vấn đề trong thực tiễn.

Chân trời sáng tạo

Nước được phun ra từ đài hoa sen ở phố đi bộ Nguyễn Huệ, Thành phố Hồ Chí Minh có dạng một đường parabol.

Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết được những mô hình thực tế dẫn đến khái niệm hàm số. Mô tả được các khái niệm cơ bản về hàm số và các đặc trưng hình học của đồ thị hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến.
– Thiết lập được bảng giá trị và vẽ được đồ thị hàm số bậc hai (parabol).
– Nhận biết được các tính chất cơ bản của parabol như đỉnh, trục đối xứng. Nhận biết và giải thích được các tính chất của hàm số bậc hai thông qua đồ thị.
– Vận dụng được những kiến thức về hàm số, hàm số bậc hai và đồ thị vào giải quyết bài toán thực tiễn.

Bài 1. Hàm số và đồ thị

Từ khoá: Hàm số; Tập xác định; Tập giá trị; Đồ thị hàm số; Hàm số đồng biến; Hàm số nghịch biến.

Nhiệt độ có mối liên hệ gì với thời gian?

Nguồn: meta.vn

1. Hàm số. Tập xác định và tập giá trị của hàm số

1 Bản tin dự báo thời tiết cho biết nhiệt độ ở một số thời điểm trong ngày 01/5/2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh đã được ghi lại thành bảng kèm với biểu đồ bên.

Sử dụng bảng hoặc biểu đồ, hãy:

a) Viết tập hợp các mốc giờ đã có dự báo nhiệt độ.

b) Viết tập hợp các số đo nhiệt độ đã dự báo.

c) Cho biết nhiệt độ dự báo tại Thành phố Hồ Chí Minh vào lúc 7 giờ sáng ngày 01/5/2021.

Bảng 1. Dự báo thời tiết ngày 01/5/2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh

Giờ	1	4	7	10	13	16	19	22
Nhiệt độ (°C)	28	27	28	32	31	29	28	27

Hình 1. Dự báo thời tiết ngày 01/5/2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh

Trong 1, nhiệt độ dự báo là một đại lượng phụ thuộc vào thời điểm (giờ). Mối liên hệ giữa hai đại lượng này (nhiệt độ và thời gian) có các đặc trưng của một hàm số.

Giả sử x và y là hai đại lượng biến thiên và x nhận giá trị thuộc tập số D.

Nếu với mỗi giá trị x thuộc D, ta xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một ***hàm số***.

Ta gọi x là ***biến số*** và y là ***hàm số*** của x.

Tập hợp D được gọi là ***tập xác định*** của hàm số.

Tập hợp T gồm tất cả các giá trị y (tương ứng với x thuộc D) gọi là ***tập giá trị*** của hàm số.

Chân trời sáng tạo

Ta thường dùng kí hiệu $f(x)$ để chỉ giá trị y tương ứng với x, nên hàm số còn được viết là $y = f(x)$.

Một hàm số có thể được cho bằng bảng (như Bảng 1), bằng biểu đồ (như Hình 1) hoặc bằng công thức như đã học ở cấp Trung học cơ sở, chẳng hạn $y = 2x - 3$, $y = -x^2$.

Ví dụ 1

a) Vì sao có thể nói bảng dữ liệu dự báo thời tiết (Bảng 1) biểu thị một hàm số? Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số này.

b) Biểu đồ "Dự báo nhiệt độ ngày 01/5/2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh" (Hình 1) có biểu thị hàm số không? Tại sao?

Giải

a) Từ bảng dữ liệu dự báo thời tiết (Bảng 1) trong 1, ta thấy ứng với mỗi thời điểm (giờ) trong bảng đều có một giá trị dự báo nhiệt độ duy nhất. Vì vậy, bảng này biểu thị một hàm số. Hàm số đó có tập xác định $D = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22\}$ và có tập giá trị $T = \{27; 28; 29; 31; 32\}$.

b) Tương tự, biểu đồ "Dự báo nhiệt độ ngày 01/5/2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh" (Hình 1) cũng là một hàm số, ta cũng có tập xác định và tập giá trị như trên câu a.

Chú ý:

a) Khi một hàm số được cho bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định thì ta quy ước:

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

b) Một hàm số có thể được cho bởi hai hay nhiều công thức. Chẳng hạn, xét hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{với } x \le 1 \\ 2x^2 & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

nghĩa là với $x \le 1$ thì $f(x) = -3x + 5$; với $x > 1$ thì $f(x) = 2x^2$.

Ví dụ 2

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{5 - x}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{2x - 6}$.

Giải

a) Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $5 - x \ge 0$, tức là khi $x \le 5$.

Vậy tập xác định của hàm số này là $D = (-\infty; 5]$.

b) Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $2x - 6 \ne 0$, tức là khi $x \ne 3$.

Vậy tập xác định của hàm số này là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Chân trời sáng tạo

Một thiết bị đã ghi lại vận tốc v (mét/giây) ở thời điểm t (giây) của một vật chuyển động như trong bảng sau:

t (giây)	0,5	1	1,2	1,8	2,5
v (mét/giây)	1,5	3	0	5,4	7,5

Vì sao bảng này biểu thị một hàm số? Tìm tập xác định của hàm số này.

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{2x+7}$; b) $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-3x+2}$.

Ở góc của miếng đất hình chữ nhật, người ta làm một bồn hoa có dạng một phần tư hình tròn với bán kính r (Hình 2). Bán kính bồn hoa có kích thước từ 0,5 m đến 3 m.

a) Viết công thức của hàm số biểu thị diện tích bồn hoa theo bán kính r và tìm tập xác định của hàm số này.

b) Bán kính bồn hoa bằng bao nhiêu thì nó có diện tích là $0{,}5\pi$ m²?

Hình 2

2. Đồ thị hàm số

Xét hàm số $y = f(x)$ cho bởi bảng sau:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	8	3	0	–1	0	3	8

a) Tìm tập xác định D của hàm số trên.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ tất cả các điểm có toạ độ $(x; y)$ với $x \in D$ và $y = f(x)$.

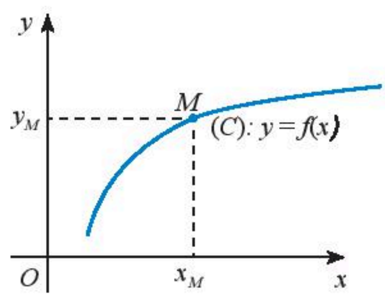
Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D.

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, ***đồ thị*** (C) của hàm số là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ với $x \in D$ và $y = f(x)$.

Vậy $(C) = \{M(x; f(x)) \mid x \in D\}$.

Chú ý:

Điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi $x_M \in D$ và $y_M = f(x_M)$.



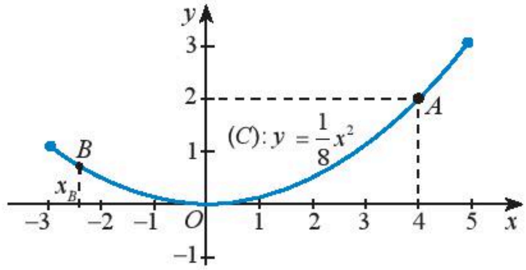
Hình 3

Ví dụ 3

a) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{8}x^2$ xác định trên $D = [-3; 5]$ có đồ thị (C) như Hình 4.

– Điểm $A(4; f(4))$ có thuộc đồ thị (C) không?

– Lấy điểm B tuỳ ý trên đồ thị (C). Nêu nhận xét về hoành độ của điểm B.



Hình 4

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau:

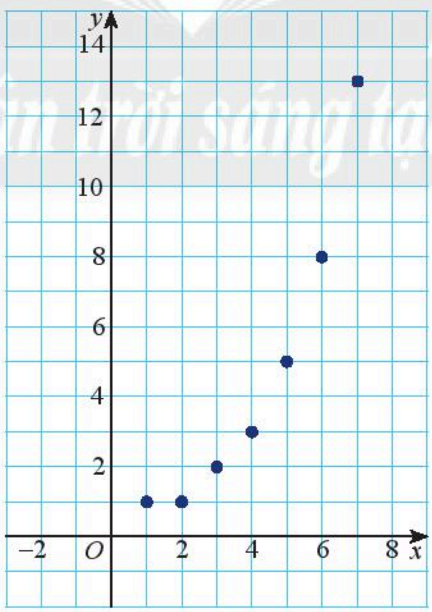
x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1	1	2	3	5	8	13

Giải

a) Vì $4 \in [-3; 5]$ nên điểm A có hoành độ bằng 4 và có tung độ $y = \frac{1}{8}.4^2 = 2$ là điểm thuộc đồ thị (C).

Khi lấy điểm B tuỳ ý trên đồ thị (C) thì hoành độ x_B của điểm này thuộc tập xác định D, nghĩa là $-3 \le x_B \le 5$.

b) Đồ thị của hàm số gồm 7 điểm như Hình 5.

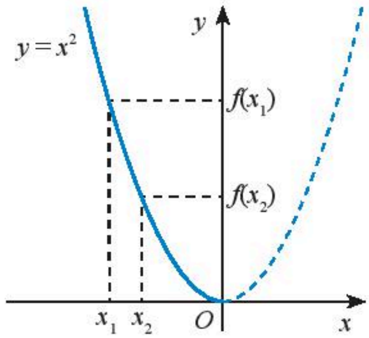


Hình 5

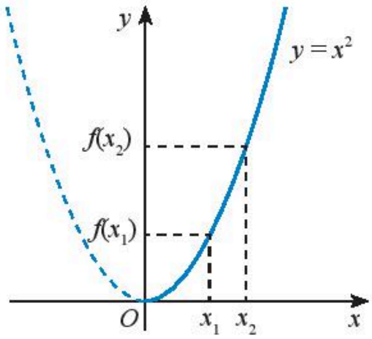
3 Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = 3x + 8$.

3. Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2$ rồi so sánh $f(x_1)$ và $f(x_2)$ (với $x_1 < x_2$) trong từng trường hợp sau:



a) $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$



b) $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$

Hình 6

Đối với hàm số trên, khi x tăng và thuộc khoảng $(-\infty; 0)$, ta thấy giá trị hàm số giảm. Ngược lại, khi x tăng và thuộc khoảng $(0; +\infty)$, giá trị hàm số tăng.

Một cách tổng quát, ta có:

Với hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, ta nói:

- Hàm số ***đồng biến*** trên khoảng $(a; b)$ nếu

  $\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

- Hàm số ***nghịch biến*** trên khoảng $(a; b)$ nếu

  $\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Chân trời sáng tạo

Nhận xét:

Khi hàm số *đồng biến* (tăng) trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị của nó có dạng đi lên từ trái sang phải. Ngược lại, khi hàm số *nghịch biến* (giảm) trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị của nó có dạng đi xuống từ trái sang phải.

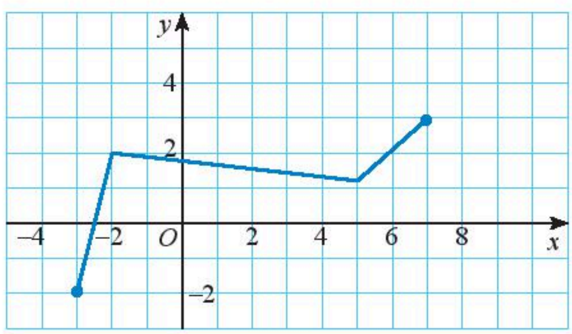
Ví dụ 4

Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau trên tập xác định hoặc trên khoảng được chỉ định:

a) $y = 3x - 1$;

b) $y = x^2$ trên khoảng $(-\infty; 0)$;

c) Hàm số có đồ thị như Hình 7.



Hình 7

Giải

a) Xét hàm số $y = f(x) = 3x - 1$. Hàm số này xác định trên $\mathbb{R}$.

Lấy x_1, x_2 là hai số tuỳ ý sao cho $x_1 < x_2$, ta có:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Vậy hàm số đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R}$.

b) Xét hàm số $y = x^2$ trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lấy x_1, x_2 tuỳ ý sao cho $x_1 < x_2$, ta có: $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$.

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 - x_2 < 0$ và do $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ nên $x_1 + x_2 < 0$. Từ đây suy ra $f(x_1) - f(x_2) > 0$ hay $f(x_1) > f(x_2)$.

Vậy hàm số nghịch biến (giảm) trên khoảng $(-\infty; 0)$.

c) Từ đồ thị, ta thấy hàm số xác định trên $[-3; 7]$.

– Trên khoảng $(-3; -2)$, đồ thị có dạng đi lên từ trái sang phải nên hàm số này đồng biến trên khoảng $(-3; -2)$.

– Trên khoảng $(-2; 5)$, đồ thị có dạng đi xuống từ trái sang phải nên hàm số này nghịch biến trên khoảng $(-2; 5)$.

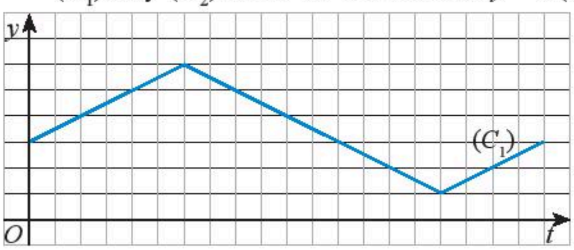
– Trên khoảng $(5; 7)$, đồ thị có dạng đi lên từ trái sang phải nên hàm số này đồng biến trên khoảng $(5; 7)$.

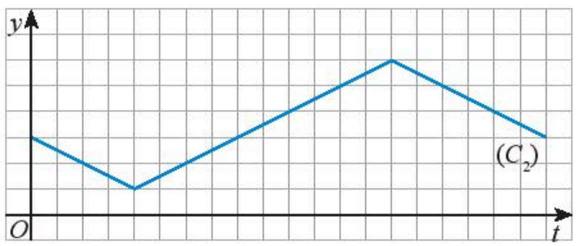
Ví dụ 5

Gia đình bạn Sơn sống ở tầng ba, bà ngoại của Sơn sống ở tầng sáu thuộc cùng một chung cư cao tầng. Sơn đi bộ từ nhà mình xuống tầng một để lấy thư và đưa lên nhà bà ngoại. Đưa thư cho bà xong, Sơn quay về nhà mình.

Đặt $y = h(t)$ là hàm số biểu thị khoảng cách từ vị trí của Sơn đến mặt đất theo thời gian t từ khi bạn ấy bắt đầu đi cho đến khi về lại nhà mình (chọn gốc thời gian là lúc Sơn bắt đầu đi lấy thư).

(C_1) hay (C_2) là đồ thị của hàm số $y = h(t)$? Tại sao?





Hình 8

Giải

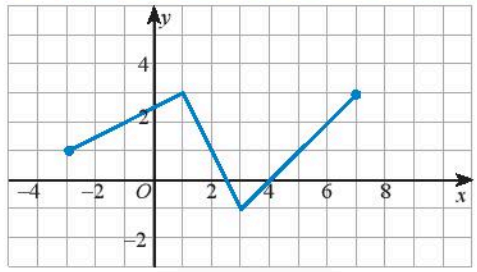
Khi bắt đầu đi từ tầng ba xuống tầng một, Sơn ngày càng gần mặt đất nên khoảng cách từ vị trí của Sơn đến mặt đất giảm dần, hay hàm số giảm, vậy đồ thị phải có dạng đi xuống.

Khi đi từ tầng một lên tầng sáu để đưa thư cho bà ngoại, Sơn ngày càng xa mặt đất nên khoảng cách từ vị trí của Sơn đến mặt đất tăng dần, hay hàm số tăng, vậy đồ thị phải có dạng đi lên.

Khi đi từ tầng sáu về nhà mình, Sơn ngày càng gần mặt đất nên khoảng cách từ vị trí của Sơn đến mặt đất giảm dần, hay hàm số giảm, vậy đồ thị phải có dạng đi xuống.

Đồ thị (C_2) có dạng tương ứng như mô tả ở trên. Do đó, (C_2) là đồ thị của hàm số $y = h(t)$ này.

4 a) Tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số có đồ thị sau:



Hình 9

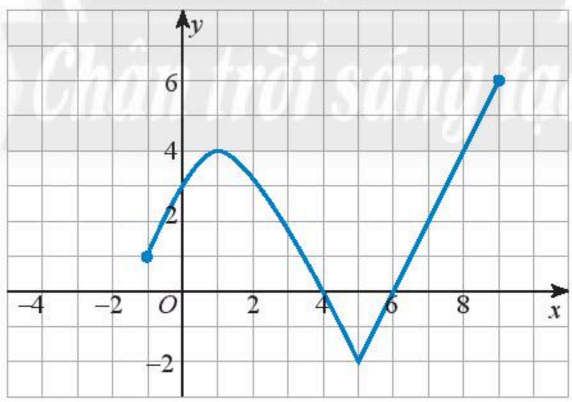
b) Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x) = 5x^2$ trên khoảng $(2; 5)$.

BÀI TẬP

1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{-5x+3}$; b) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+3}$.

2. Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số có đồ thị như Hình 10.



Hình 10

3. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $f(x) = -5x + 2$; b) $f(x) = -x^2$.

4. Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = |x|$, biết rằng hàm số này còn được viết như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{với } x \geq 0 \\ -x & \text{với } x < 0. \end{cases}$$

5. Tìm tập xác định, tập giá trị và vẽ đồ thị hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{với } x < 0 \\ 1 & \text{với } x > 0. \end{cases}$$

6. Một hãng taxi có bảng giá như sau:

	Giá mở cửa (0,5 km)	**Giá cước các kilômét tiếp theo**	**Giá cước từ kilômét thứ 31**
Taxi 4 chỗ	11 000 đồng	14 500 đồng	11 600 đồng
Taxi 7 chỗ	11 000 đồng	15 500 đồng	13 600 đồng

a) Xem số tiền đi taxi là một hàm số phụ thuộc số kilômét di chuyển, hãy viết công thức của các hàm số dựa trên thông tin từ bảng giá đã cho theo từng yêu cầu:

i) Hàm số $f(x)$ để tính số tiền hành khách phải trả khi di chuyển x km bằng xe taxi 4 chỗ.

ii) Hàm số $g(x)$ để tính số tiền hành khách phải trả khi di chuyển x km bằng xe taxi 7 chỗ.

b) Nếu cần đặt xe taxi cho 30 hành khách, nên đặt toàn bộ xe 4 chỗ hay xe 7 chỗ thì có lợi hơn?

7. **Đố vui**

Số 2 đã trải qua một hành trình thú vị và bị biến đổi sau khi đi qua chiếc hộp đen.

Điều gì đã xảy ra bên trong HỘP ĐEN?

Bác thợ máy đã giải mã hộp đen cho một số x bất kì như sau:

Thì ra số x đã biến đổi sau khi đi qua 3 chiếc máy bên trong HỘP ĐEN

Bên trong HỘP ĐEN là một đoạn chương trình được cài đặt sẵn. Ta xem đoạn chương trình này như một hàm số $f(x)$. Hãy viết biểu thức của $f(x)$ để mô tả sự biến đổi đã tác động lên x.

Bài 2. Hàm số bậc hai

Từ khoá: Hàm số bậc hai; Tập giá trị của hàm số bậc hai; Biến thiên; Parabol; Đỉnh; Trục đối xứng; Quỹ đạo parabol.

$y = ax^2$ $\qquad$ $y = a(x - m)(x - n)$

$y = ax^2 + bx$ $\qquad$ $y = a(x - h)^2 + k$

$y = ax^2 + bx + c$

Các hàm số này có chung đặc điểm gì?

1. Hàm số bậc hai

1 Khai triển biểu thức của các hàm số sau và sắp xếp theo thứ tự luỹ thừa của x giảm dần (nếu có thể). Hàm số nào có luỹ thừa bậc cao nhất của x là bậc hai?

a) $y = 2x(x - 3)$; $\qquad$ b) $y = x(x^2 + 2) - 5$; $\qquad$ c) $y = -5(x + 1)(x - 4)$.

Hàm số bậc hai theo biến x là hàm số cho bởi công thức có dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực và a khác 0.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1

Hàm số nào trong các hàm số sau đây là hàm số bậc hai?

a) $y = 2x^2 + x$; $\quad$ b) $y = x^3 + x + 1$; $\quad$ c) $y = \dfrac{x+1}{x+2}$; $\quad$ d) $y = -3x^2 - 1$; $\quad$ e) $y = \sqrt{5 - 2x}$.

Giải

Hàm số $y = 2x^2 + x$ và hàm số $y = -3x^2 - 1$ đều là hàm số bậc hai.

Các hàm số $y = x^3 + x + 1$; $y = \dfrac{x+1}{x+2}$; $y = \sqrt{5 - 2x}$ không phải là hàm số bậc hai.

1 Hàm số nào trong các hàm số được cho ở 1 là hàm số bậc hai?

2. Đồ thị hàm số bậc hai

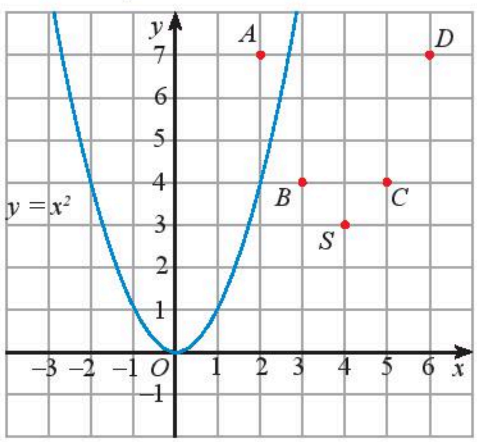
2 a) Xét hàm số:

$$y = f(x) = x^2 - 8x + 19 = (x - 4)^2 + 3$$

có bảng giá trị:

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	7	4	3	4	7

Trên mặt phẳng toạ độ, ta có các điểm $(x; f(x))$ với x thuộc bảng giá trị đã cho (Hình 1).



Hình 1

Hãy vẽ đường cong đi qua các điểm A, B, S, C, D và nêu nhận xét về hình dạng của đường cong này so với đồ thị của hàm số $y = x^2$ trên Hình 1.

b) Tương tự, xét hàm số:

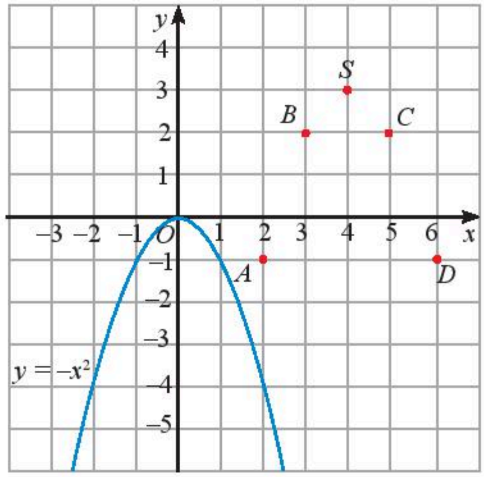
$$y = g(x) = -x^2 + 8x - 13 = -(x-4)^2 + 3$$

có bảng giá trị:

x	2	3	4	5	6
$g(x)$	–1	2	3	2	–1

Trên mặt phẳng toạ độ, ta có các điểm $(x; g(x))$ với x thuộc bảng giá trị đã cho (Hình 2).

Hãy vẽ đường cong đi qua các điểm A, B, S, C, D và nêu nhận xét về hình dạng của đường cong này so với đồ thị của hàm số $y = -x^2$ trên Hình 2.



Hình 2

Từ 2, ta thấy hai dạng cơ bản của đồ thị hàm số bậc hai ứng với hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$.

Một cách tổng quát, sau khi biến đổi $y = ax^2 + bx + c = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$, với $a \neq 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac$ người ta chứng minh được rằng trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có hình dạng là một parabol và có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ***đồ thị hàm số bậc hai*** $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$) là một parabol (P):

– Có ***đỉnh*** S với hoành độ $x_S = -\frac{b}{2a}$, tung độ $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$;

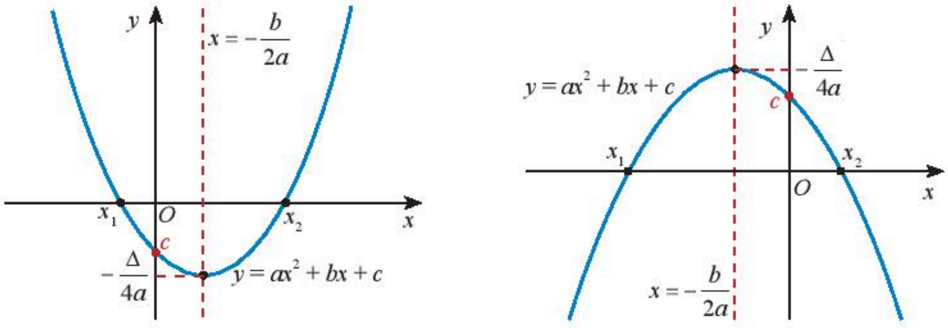
– Có ***trục đối xứng*** là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy nếu $b \neq 0$, trùng với trục Oy nếu $b = 0$);

– Có bề lõm quay lên trên nếu $a > 0$, quay xuống dưới nếu $a < 0$;

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng c, tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ $(0; c)$.

Chú ý: a) Nếu $b = 2b'$ thì (P) có đỉnh $S\left(-\frac{b'}{a}; -\frac{\Delta'}{a}\right)$.

b) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ cắt trục hoành tại hai điểm lần lượt có hoành độ là hai nghiệm này (xem Hình 3).



a) $a > 0$ b) $a < 0$

Hình 3

Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$):

1) *Xác định toạ độ đỉnh* $S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

2) *Vẽ trục đối xứng d* là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

3) *Tìm toạ độ giao điểm* của đồ thị với trục tung (điểm $A(0; c)$) và giao điểm của đồ thị với trục hoành (nếu có).

Xác định thêm điểm đối xứng với A qua trục đối xứng d, là điểm $B\left(\dfrac{-b}{a}; c\right)$.

4) *Vẽ parabol* có đỉnh S, có trục đối xứng d, đi qua các điểm tìm được.

Chân trời sáng tạo

Ví dụ 2

Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$; b) $y = f(x) = x^2 + 2x + 2$.

Giải

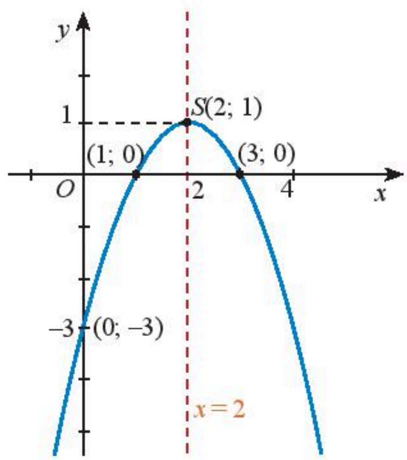
a) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$ là một parabol (P):

– Có đỉnh S với hoành độ $x_S = 2$, tung độ $y_S = 1$;

– Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy);

– Có bề lõm quay xuống dưới vì $a < 0$;

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3, tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ $(0; -3)$.



Hình 4

Ngoài ra, phương trình $-x^2 + 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có toạ độ (1; 0) và (3; 0).

Ta vẽ được đồ thị như Hình 4.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x) = x^2 + 2x + 2$ là một parabol (P):

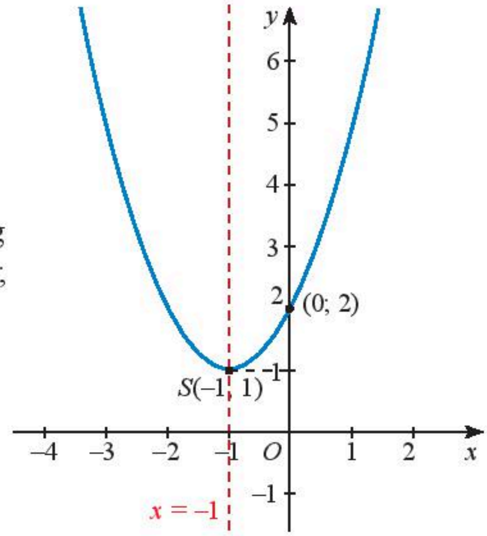
– Có đỉnh S với hoành độ $x_S = -1$, tung độ $y_S = 1$;

– Có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy);

– Bề lõm quay lên trên vì $a > 0$;

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2, tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ (0; 2).

Ta vẽ được đồ thị như Hình 5.

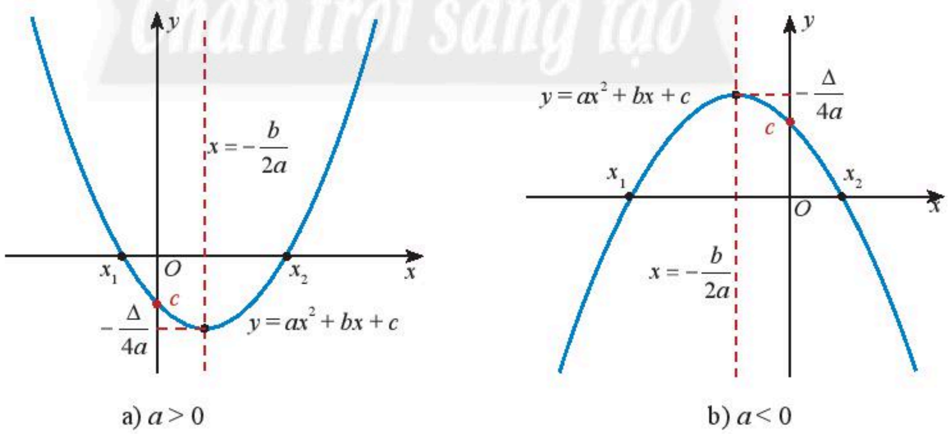


Hình 5

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ rồi so sánh đồ thị hàm số này với đồ thị hàm số trong Ví dụ 2a. Nêu nhận xét về hai đồ thị này.

3. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

Từ đồ thị của hàm số bậc hai cho ở hai hình sau, tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số trong mỗi trường hợp.



Hình 6

Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$), ta có bảng tóm tắt về sự biến thiên của hàm số này như sau:

$a > 0$	$a < 0$
Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a}; +\infty\right)$.	Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a}; +\infty\right)$.
Bảng biến thiên:	Bảng biến thiên:

Bảng biến thiên ($a > 0$):

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên ($a < 0$):

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Chú ý:

Từ bảng biến thiên của hàm số bậc hai, ta thấy:

– Khi $a > 0$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{-\Delta}{4a}$ tại $x = \frac{-b}{2a}$ và hàm số có tập giá trị là $T = \left[-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$.

– Khi $a < 0$, hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{-\Delta}{4a}$ tại $x = \frac{-b}{2a}$ và hàm số có tập giá trị là $T = \left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

Ví dụ 3

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$. Hàm số này có giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị đó.

Giải

Đỉnh S có toạ độ: $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2.(-1)} = 2$; $y_S = -2^2 + 4 \,.\, 2 - 3 = 1$.

Hay $S(2; 1)$.

Vì hàm số bậc hai có $a = -1 < 0$ nên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

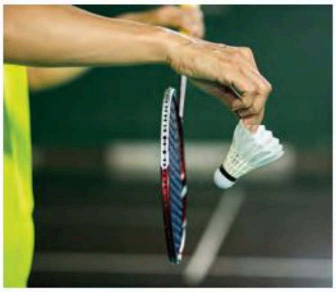
Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi $x = 2$.

3 Tìm khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = 2x^2 - 6x + 11$. Hàm số này có thể đạt giá trị bằng -1 không? Tại sao?

Chân trời sáng tạo

4. Ứng dụng của hàm số bậc hai

Tầm bay cao và tầm bay xa



Hình 7

Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

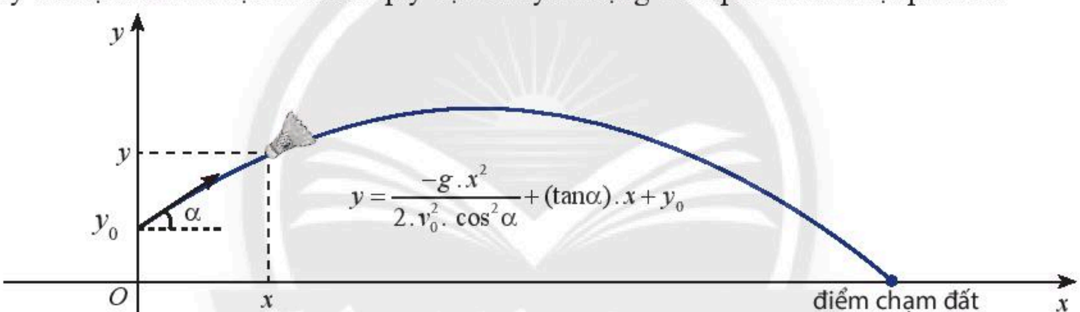
Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, chọn điểm có toạ độ $(0; y_0)$ là điểm phát cầu thì phương trình quỹ đạo của quả cầu khi rời khỏi mặt vợt là:

$$y = \frac{-g.x^2}{2.v_0^2.\cos^2\alpha} + (\tan\alpha).x + y_0$$

trong đó:

- g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là 9,8 m/s^2);
- α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;
- y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của quả cầu là một parabol.



Hình 8

Xét trường hợp lặng gió, với vận tốc ban đầu và góc phát cầu đã biết, cầu chuyển động theo quỹ đạo parabol nên sẽ:

– Đạt vị trí cao nhất tại đỉnh parabol, gọi là *tầm bay cao*;

– Rơi chạm đất ở vị trí cách nơi đứng phát cầu một khoảng, gọi là *tầm bay xa*.

Bài toán ứng dụng

Một người đang tập chơi cầu lông có khuynh hướng phát cầu với góc 30° (so với mặt đất).

a) Hãy tính khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa), biết cầu rời mặt vợt ở độ cao 0,7 m so với mặt đất và vận tốc ban đầu của cầu là 8 m/s (bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng).

b) Giữ giả thiết như câu a) và cho biết khoảng cách từ vị trí phát cầu đến lưới là 4 m. Lần phát cầu này có bị xem là hỏng không? Tại sao?

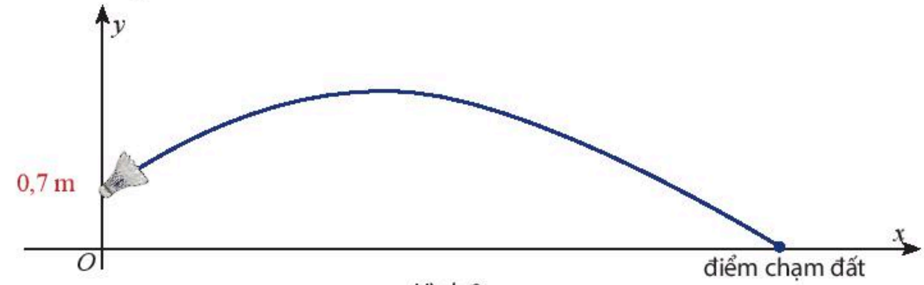
(*Thông tin bổ sung:*

– Mép trên của lưới cầu lông cách mặt đất 1,524 m;

– Gia tốc trọng trường được chọn là 9,8 m/s^2.)

Giải

a) Chọn hệ trục toạ độ như Hình 9 (vị trí rơi của cầu thuộc trục hoành và vị trí cầu rời mặt vợt thuộc trục tung).



Hình 9

Với $g = 9{,}8$ m/s^2, góc phát cầu $\alpha = 30^\circ$, vận tốc ban đầu $v_0 = 8$ m/s, phương trình quỹ đạo của cầu là:

$$y = -\frac{4,9}{48}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x + 0,7 \quad (\text{với } x \geq 0).$$

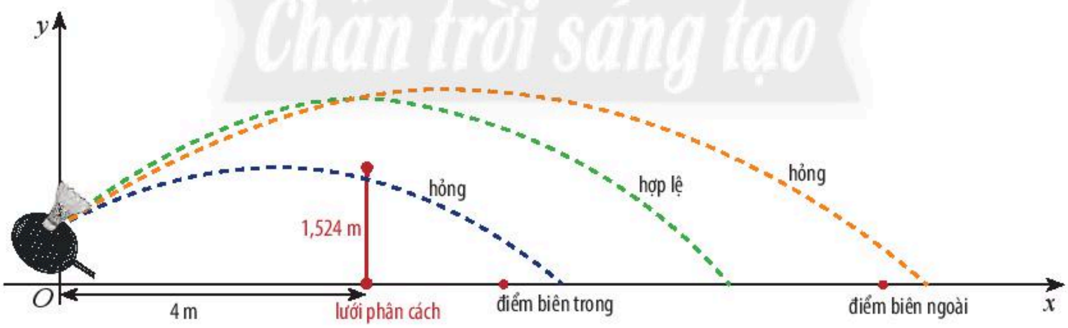
Vị trí cầu rơi chạm đất là giao điểm của parabol và trục hoành nên giải phương trình $-\frac{4,9}{48}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x + 0,7 = 0$ ta được $x_1 \approx -1{,}03$ và $x_2 \approx 6{,}68$.

Giá trị nghiệm dương cho ta khoảng cách từ vị trí người chơi cầu lông đến vị trí cầu rơi chạm đất là 6,68 m.

b) Khi cầu bay tới vị trí lưới phân cách, nếu nó ở bên trên mặt lưới và điểm rơi không ra khỏi đường biên phía bên sân đối phương thì lần phát cầu mới được xem là hợp lệ.

Ta cần so sánh tung độ của điểm trên quỹ đạo (có hoành độ bằng khoảng cách từ gốc toạ độ đến chân lưới phân cách) với chiều cao mép trên của lưới để tìm câu trả lời.

Chân trời sáng tạo



Hình 10

Khi $x = 4$, ta có $y = -\frac{4,9}{48} \cdot 4^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 + 0,7 \approx 1{,}38$. Suy ra $y < 1{,}524$.

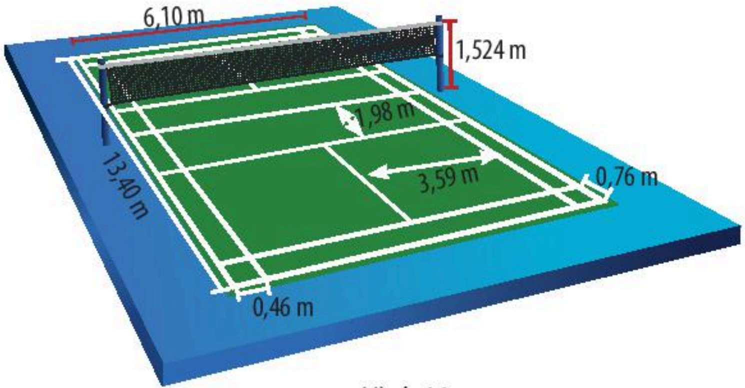
Như vậy lần phát cầu đã bị hỏng vì điểm trên quỹ đạo của cầu thấp hơn mép trên của lưới.

Trong bài toán ứng dụng, khi chơi trên sân cầu lông đơn, các lần phát cầu với thông tin như sau có được xem là hợp lệ không? (Các thông tin không được đề cập thì vẫn giữ như trong giả thiết bài toán trên).

a) Vận tốc ban đầu của cầu là 12 m/s.

b) Vị trí phát cầu cách mặt đất 1,3 m.

Lưu ý: Các thông số về sân cầu lông đơn được cho trong Hình 11.



Hình 11

BÀI TẬP

1. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc hai?

a) $y = 9x^2 + 5x + 4$;   b) $y = 3x^3 + 2x + 1$;

c) $y = -4(x + 2)^3 + 2(2x^3 + 1) + 5$;   d) $y = 5x^2 + \sqrt{x} + 2$.

2. Tìm điều kiện của m để mỗi hàm số sau là hàm số bậc hai.

a) $y = mx^4 + (m + 1)x^2 + x + 3$;   b) $y = (m - 2)x^3 + (m - 1)x^2 + 5$.

3. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 + 2x + 3$. Hàm số này có giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị đó.

4. Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 5$.

a) Hãy xác định giá trị của các hệ số a, b và c.

b) Xác định tập giá trị và khoảng biến thiên của hàm số.

5. Cho hàm số $y = 2x^2 + x + m$. Hãy xác định giá trị của m để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5.

6. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 2x^2 + 4x - 1$;   b) $y = -x^2 + 2x + 3$;

c) $y = -3x^2 + 6x$;   d) $y = 2x^2 - 5$.

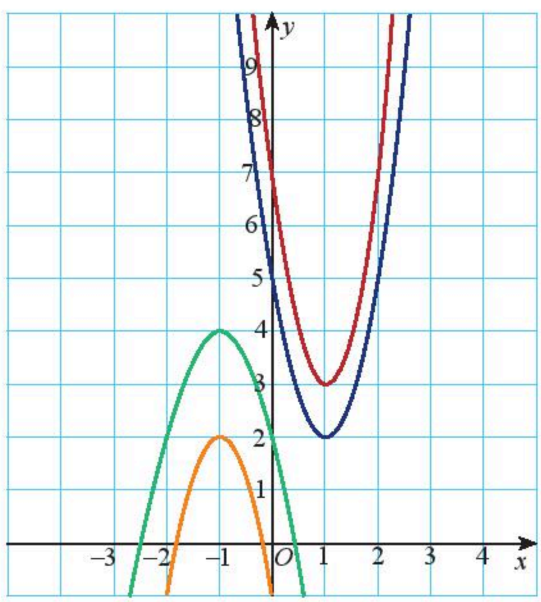
7. Hãy xác định đúng đồ thị của mỗi hàm số sau trên Hình 12.

(P_1): $y = -2x^2 - 4x + 2$;

(P_2): $y = 3x^2 - 6x + 5$;

(P_3): $y = 4x^2 - 8x + 7$;

(P_4): $y = -3x^2 - 6x - 1$.



Hình 12

8. Tìm công thức của hàm số bậc hai có đồ thị như Hình 13.

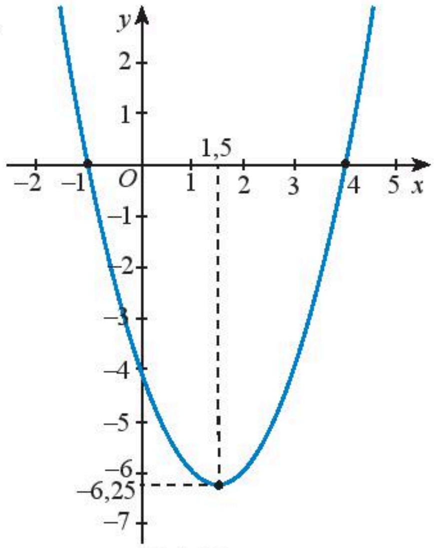
9. Chiếc cầu dây văng một nhịp được thiết kế hai bên thành cầu có dạng parabol và được cố định bằng các dây cáp song song.

Dựa vào bản vẽ ở Hình 14, hãy tính chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai bên thành cầu. Biết:

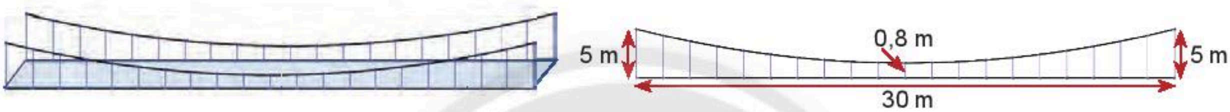
– Dây dài nhất là 5 m, dây ngắn nhất là 0,8 m. Khoảng cách giữa các dây bằng nhau.

– Nhịp cầu dài 30 m.

– Cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định.



Hình 13



a) Hình vẽ cầu dây văng

b) Hình chiếu đứng của cầu dây văng

Hình 14

Bạn có biết?

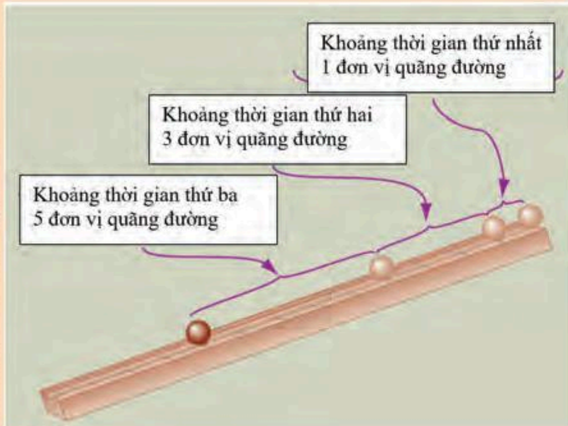
Quy luật tự nhiên và hình dạng parabol

Vật chuyển động bởi ném xiên hay ném ngang có quỹ đạo là một phần của parabol. Hiện tượng này quan sát được khi ném bóng, nhảy xa, trượt tuyết nhảy trên không, vòi nước phun, …

Hình 15

Trong khi đó, chuyển động rơi tự do hoặc chuyển động lăn trên mặt phẳng nghiêng có độ dài quãng đường tuân theo quy luật một hàm số bậc hai theo thời gian t, mặc dù quỹ đạo chuyển động là đường thẳng. Nhà vật lí học Galilei, đồng thời cũng là một nhạc sĩ, đã thiết kế bộ dụng cụ đo quãng đường lăn của vật nặng trên mặt phẳng nghiêng sau những khoảng thời gian như nhau để chứng minh kết quả này. Thời đó chưa có thiết bị phù hợp nên ông đã dùng những chiếc chuông để phát ra âm thanh cách đều thời gian mỗi khi viên bi lăn tới. Thật khó tin nhưng Galilei nhạy bén với âm thanh và ông nhận ra quãng đường lại không như nhau dù các khoảng thời gian là đều nhau.

Hình 16. Dụng cụ "mặt phẳng nghiêng" đo quãng đường di chuyển sau mỗi khoảng thời gian đều nhau của Galilei tại Bảo tàng Galileo, nước Ý

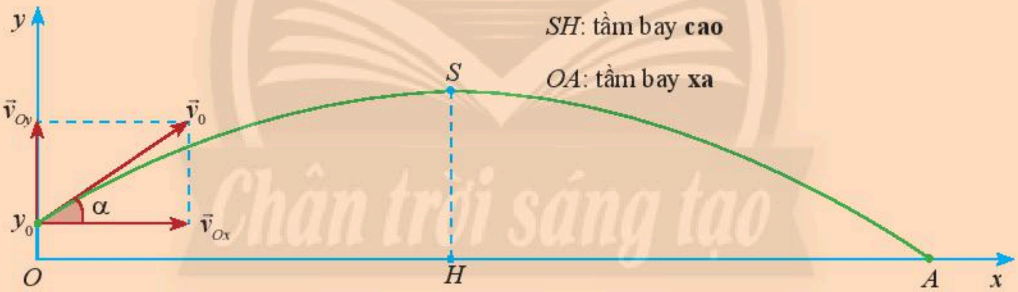


Hình 17. Mô phỏng mặt phẳng nghiêng Galilei

Quỹ đạo parabol

Khi một vật từ vị trí y_0 bị ném xiên lên cao theo góc α (so với phương ngang) với vận tốc ban đầu v_0 thì phương trình quỹ đạo của vật này là: $y = \dfrac{-g.x^2}{2.v_0^2.\cos^2\alpha} + (\tan\alpha).x + y_0$.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động là một parabol.



Hình 18. Vật được ném từ độ cao y_0, với góc ném α bay lên đến điểm cao nhất là *S* và rơi xuống điểm *A*

Khoảng cách *SH* được gọi là *tầm bay cao*, còn khoảng cách *OA* được gọi là *tầm bay xa*.

Nếu vận tốc ban đầu có độ lớn không đổi, thì góc ném α ảnh hưởng đến tầm bay cao và tầm bay xa.

– Trong thể thao, vận động viên môn ném lao, ném đĩa hay nhảy xa, … có lực ném hay lực bật gần như ổn định. Do vậy, việc điều chỉnh góc ném α chính là kĩ thuật để đạt mục tiêu xa nhất.

– Binh chủng Pháo binh Việt Nam có câu khẩu hiệu "Chân đồng, vai sắt, đánh giỏi, bắn trúng" gắn liền với kĩ thuật điều chỉnh vận tốc ban đầu v_0 và góc α để đạn pháo trúng mục tiêu.

(*Nguồn:* https://www.researchgate.net)

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = 4x^2 - 1$;

b) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;

c) $y = 2 + \dfrac{1}{x}$.

2. Tìm điều kiện của m để mỗi hàm số sau đây là một hàm số bậc hai:

a) $y = (1 - 3m)x^2 + 3$;

b) $y = (4m - 1)(x - 7)^2$;

c) $y = 2(x^2 + 1) + 11 - m$.

3. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^2 - 4x + 3$; b) $y = -x^2 - 4x + 5$;

c) $y = x^2 - 4x + 5$; d) $y = -x^2 - 2x - 1$.

4. Một vận động viên chạy xe đạp trong 1 giờ 30 phút đầu với vận tốc trung bình là 42 km/h. Sau đó người này nghỉ tại chỗ 15 phút và tiếp tục đạp xe 2 giờ liền với vận tốc 30 km/h.

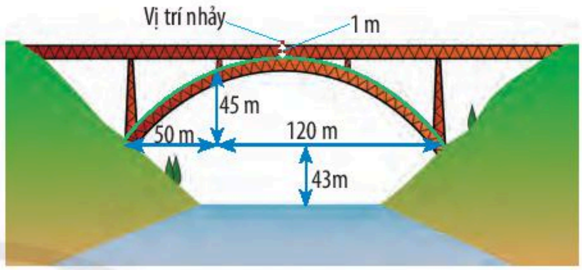
a) Hãy biểu thị quãng đường s (tính bằng kilômét) mà người này đi được sau t phút bằng một hàm số.

b) Vẽ đồ thị biểu diễn hàm số s theo t.

5. Biết rằng hàm số $y = 2x^2 + mx + n$ giảm trên khoảng $(-\infty; 1)$, tăng trên khoảng $(1; +\infty)$ và có tập giá trị là $[9; +\infty)$. Xác định giá trị của m và n.

6. Nhảy bungee là một trò chơi mạo hiểm. Trong trò chơi này, người chơi đứng ở vị trí trên cao, thắt dây an toàn và nhảy xuống. Sợi dây này có tính đàn hồi và được tính toán chiều dài để nó kéo người chơi lại khi gần chạm đất (hoặc mặt nước).

Chiếc cầu trong Hình 1 có bộ phận chống đỡ dạng parabol. Một người muốn thực hiện một cú nhảy bungee từ giữa cầu xuống với dây an toàn. Người này cần trang bị sợi dây an toàn dài bao nhiêu mét? Biết rằng chiều dài của sợi dây đó bằng một phần ba khoảng cách từ vị trí bắt đầu nhảy đến mặt nước.



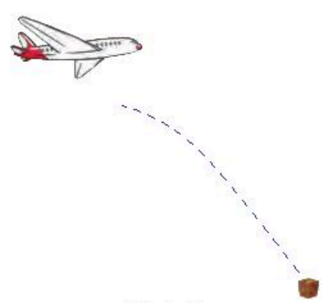
Hình 1

7. Giả sử một máy bay cứu trợ đang bay theo phương ngang và bắt đầu thả hàng từ độ cao 80 m, lúc đó máy bay đang bay với vận tốc 50 m/s. Để thùng hàng cứu trợ rơi đúng vị trí được chọn, máy bay cần bắt đầu thả hàng từ vị trí nào? Biết rằng nếu chọn gốc toạ độ là hình chiếu trên mặt đất của vị trí hàng cứu trợ bắt đầu được thả, thì toạ độ của hàng cứu trợ được cho bởi hệ sau:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = h - \dfrac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Trong đó, v_0 là vận tốc ban đầu và h là độ cao tính từ khi hàng rời máy bay.

Lưu ý: Chuyển động này được xem là chuyển động ném ngang.



Hình 2

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương IV HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Trong chương IV, chúng ta sẽ mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác của góc nhọn qua việc thiết lập các giá trị lượng giác của các góc từ 0° đến 180°. Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu về các hệ thức lượng cơ bản trong tam giác, cụ thể là: định lí côsin, định lí sin, các công thức tính diện tích tam giác, đồng thời vận dụng các định lí, công thức nói trên vào các bài toán giải tam giác cũng như giải quyết một số tình huống thực tiễn.

Cầu Cần Thơ bắc ngang sông Hậu.

Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết và tính được giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°.
– Tính được giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° bằng máy tính cầm tay.
– Giải thích được hệ thức liên hệ giữa giá trị lượng giác của các góc phụ nhau, bù nhau.
– Giải thích được các hệ thức lượng cơ bản trong tam giác: định lí côsin, định lí sin, công thức tính diện tích tam giác.
– Mô tả được cách giải tam giác và vận dụng được vào việc giải một số bài toán có nội dung thực tiễn.

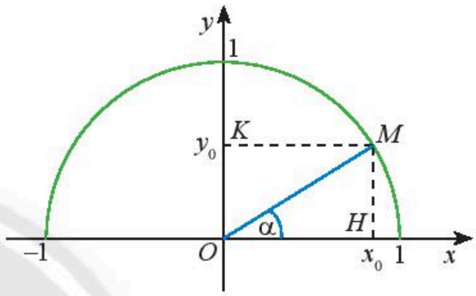
Bài 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°

Từ khoá: **Giá trị lượng giác; sin; côsin; tang; côtang.**

Làm thế nào để mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác của góc nhọn cho các góc từ 0° đến 180°?

1. Giá trị lượng giác

1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nửa đường tròn tâm O bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành được gọi là nửa đường tròn đơn vị. Cho trước một góc nhọn α, lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có toạ độ $(x_0; y_0)$.



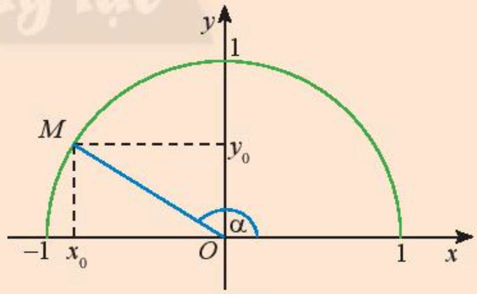
Hình 1

Trong tam giác vuông OHM, áp dụng cách tính các tỉ số lượng giác của một góc nhọn đã học ở lớp 9, chứng tỏ rằng:

$$\sin\alpha = y_0;\ \cos\alpha = x_0;\ \tan\alpha = \frac{y_0}{x_0};\ \cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}.$$

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác đối với góc nhọn cho những góc α bất kì với $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$, ta có định nghĩa sau đây:

Với mỗi góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$) ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ điểm M, ta có:



Hình 2

– Tung độ y_0 của M là ***sin*** của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha = y_0$;

– Hoành độ x_0 của M là ***côsin*** của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha = x_0$;

– Tỉ số $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$) là ***tang*** của góc α, kí hiệu là $\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0}$;

– Tỉ số $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$) là ***côtang*** của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

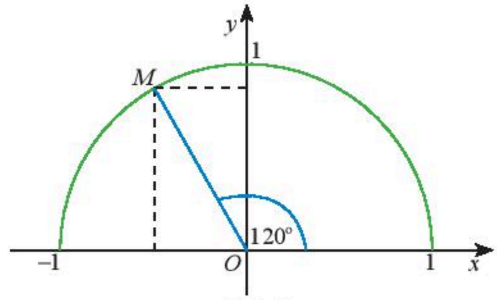
Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác của góc* α.

Chân trời sáng tạo

Ví dụ 1

Tìm các giá trị lượng giác của góc 120°.

Giải



Hình 3

Lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 120^\circ$. Ta có $\widehat{MOy} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Ta tính được toạ độ điểm M là $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy theo định nghĩa ta có:

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 120^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}; \cot 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chú ý:

a) Nếu α là góc nhọn thì các giá trị lượng giác của α đều dương.
Nếu α là góc tù thì $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$.

b) $\tan\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^\circ$.
$\cot\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$.

1 Tìm các giá trị lượng giác của góc 135°.

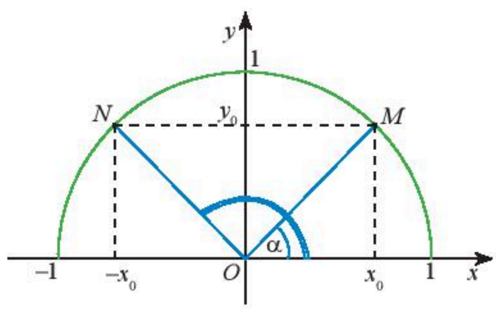
2. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

Từ lớp dưới ta đã biết hai góc ***phụ nhau*** thì các tỉ số lượng giác của chúng có mối liên hệ:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha;$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha;$
$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha;$	$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha.$

Sau đây ta sẽ tìm hiểu về mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc ***bù nhau***.

2 Trên nửa đường tròn đơn vị, cho hai điểm M, N đối xứng nhau qua trục Oy (Hình 4). Tính tổng số đo của hai góc $\widehat{xOM}$ và $\widehat{xON}$.



Hình 4

Nếu $\widehat{xOM} = \alpha$ thì ta có $\widehat{xON} = 180^\circ - \alpha$.

Giả sử điểm M có toạ độ $(x_0; y_0)$. Do $x_N = -x_M = -x_0$; $y_N = y_M = y_0$ nên ta có các tính chất sau:

Với mọi góc α thoả mãn $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$, ta luôn có:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$; $\qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$ $(\alpha \ne 90^\circ)$; $\qquad \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$.

Ví dụ 2

Cho biết $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$; $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Tính $\sin 150^\circ$; $\cos 135^\circ$; $\tan 120^\circ$.

Giải

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$; $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$.

2 Tính các giá trị lượng giác: $\sin 120^\circ$; $\cos 150^\circ$; $\cot 135^\circ$.

1 Cho biết $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, tìm góc α $(0^\circ \le \alpha \le 180^\circ)$ bằng cách vẽ nửa đường tròn đơn vị.

3. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Giá trị lượng giác của các góc bất kì có thể tính bằng máy tính cầm tay.

Dưới đây là bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt.

α / Giá trị lượng giác	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	‖

Chú ý: Trong bảng, kí hiệu "‖" để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

3 Tính: $A = \sin 150^\circ + \tan 135^\circ + \cot 45^\circ$; $\qquad B = 2\cos 30^\circ - 3\tan 150^\circ + \cot 135^\circ$.

2 Tìm góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$) trong mỗi trường hợp sau:

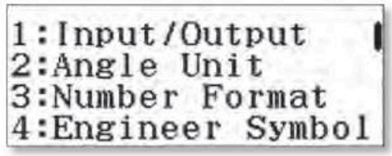
a) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$; c) $\tan\alpha = -1$; d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$.

4. Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của một góc

Có nhiều loại máy tính cầm tay có thể giúp tính nhanh chóng giá trị lượng giác của một góc. Chẳng hạn, ta có thể thực hiện trên một loại máy tính cầm tay như sau:

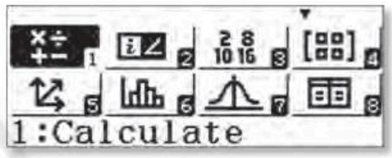
Sau khi mở máy, ấn liên tiếp các phím [SHIFT] [MENU] để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.

Ấn phím [2] để vào chế độ cài đặt đơn vị đo góc.



Ấn tiếp phím [1] để xác định đơn vị đo góc là "độ".

Ấn các phím [MENU] [1] để vào chế độ tính toán.



a) Tính các giá trị lượng giác của góc

Ví dụ 3

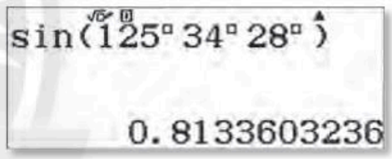
Sử dụng máy tính cầm tay, tính sin125°34'28".

Giải

Để tính sin125°34'28", ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

[sin] [1] [2] [5] [°'"] [3] [4] [°'"] [2] [8] [°'"] [)] [=]

và được kết quả sin125°34'28" ≈ 0,8133603236, với hiển thị trên màn hình như hình bên.



Để tính cosα, tanα ta cũng làm như trên, chỉ thay phím [sin] bằng phím [cos], [tan].

Trường hợp muốn tính cotα, ta tính $\dfrac{1}{\tan\alpha}$.

b) Xác định số đo của góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó

Ví dụ 4

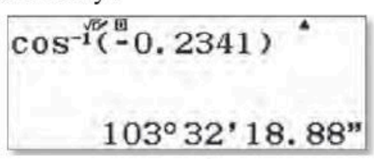
Sử dụng máy tính cầm tay, tìm α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$) biết cosα = –0,2341.

Giải

Để tìm α khi biết cosα = –0,2341, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

[SHIFT] [cos] [(–)] [0] [•] [2] [3] [4] [1] [)] [=] [°'"]

và được kết quả α ≈ 103°32'19", với hiển thị trên màn hình như hình bên.



Để tìm α khi biết sinα, tanα ta cũng làm tương tự như trên, chỉ thay phím [cos] bằng các phím [sin], [tan].

Để tìm α khi biết cotα, ta tính $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$ trước rồi tính α sau.

a) Tính $\cos 80^\circ 43'51''$; $\tan 147^\circ 12'25''$; $\cot 99^\circ 9'19''$.

b) Tìm α $(0^\circ \le \alpha \le 180^\circ)$, biết $\cos\alpha = -0,723$.

BÀI TẬP

1. Cho biết $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$; $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 45^\circ = 1$. Sử dụng mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau, phụ nhau để tính giá trị của $E = 2\cos 30^\circ + \sin 150^\circ + \tan 135^\circ$.

2. Chứng minh rằng:

a) $\sin 20^\circ = \sin 160^\circ$;   b) $\cos 50^\circ = -\cos 130^\circ$.

3. Tìm góc α $(0^\circ \le \alpha \le 180^\circ)$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;   b) $\sin\alpha = 0$;

c) $\tan\alpha = 1$;   d) $\cot\alpha$ không xác định.

4. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin A = \sin(B + C)$;   b) $\cos A = -\cos(B + C)$.

5. Chứng minh rằng với mọi góc α $(0^\circ \le \alpha \le 180^\circ)$, ta đều có:

a) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;   b) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ, \alpha \ne 90^\circ)$;

c) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \ne 90^\circ)$;   d) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$.

6. Cho góc α với $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 2\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha$.

7. Dùng máy tính cầm tay, hãy thực hiện các yêu cầu dưới đây:

a) Tính: $\sin 168^\circ 45'33''$; $\cos 17^\circ 22'35''$; $\tan 156^\circ 26'39''$; $\cot 56^\circ 36'42''$.

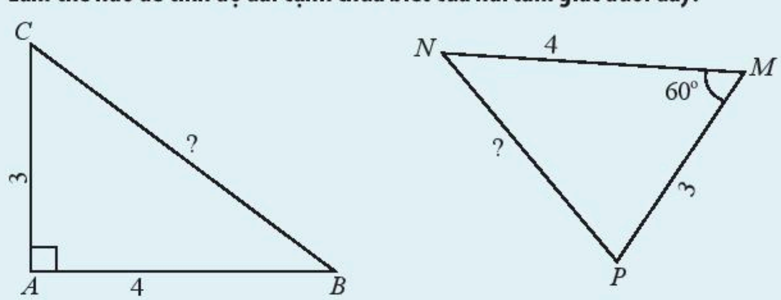
b) Tìm α $(0^\circ \le \alpha \le 180^\circ)$ trong các trường hợp sau:

i) $\sin\alpha = 0,862$;   ii) $\cos\alpha = -0,567$;   iii) $\tan\alpha = 0,334$.

Bài 2. Định lí côsin và định lí sin

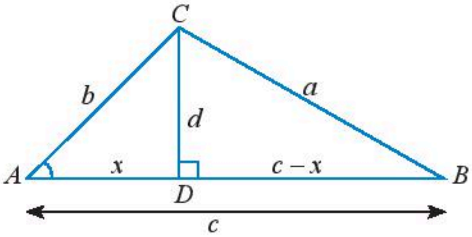
Từ khoá: Định lí côsin; Định lí sin; Diện tích tam giác; Công thức tính diện tích tam giác.

Làm thế nào để tính độ dài cạnh chưa biết của hai tam giác dưới đây?



1. Định lí côsin trong tam giác

a) Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông với góc A nhọn và $\widehat{C} \geq \widehat{B}$. Vẽ đường cao CD và đặt tên các độ dài như trong Hình 1. Hãy thay $\boxed{?}$ bằng chữ cái thích hợp để chứng minh công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ theo gợi ý sau:



Hình 1

Xét tam giác vuông BCD, ta có: $a^2 = d^2 + (c - x)^2 = d^2 + x^2 + c^2 - 2xc$. (1)

Xét tam giác vuông ACD, ta có: $b^2 = d^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = b^2 - x^2$. (2)

$$\cos A = \frac{\boxed{?}}{b} \Rightarrow \boxed{?} = b\cos A. \quad (3)$$

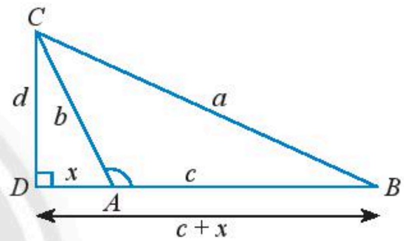
Thay (2) và (3) vào (1), ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Lưu ý: Nếu $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì ta vẽ đường cao BD và chứng minh tương tự.

b) Cho tam giác ABC với góc A tù. Làm tương tự như trên, chứng minh rằng ta cũng có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Lưu ý: Vì A là góc tù nên $\cos A = -\frac{x}{b}$.



Hình 2

c) Cho tam giác ABC vuông tại A. Hãy chứng tỏ công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ có thể viết là $a^2 = b^2 + c^2$.

Định lí côsin

Trong tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Từ định lí côsin, ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả

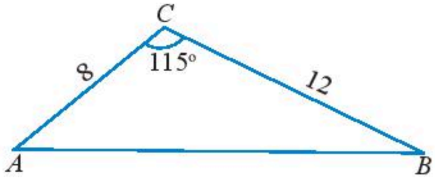
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 115^\circ$, $AC = 8$ và $BC = 12$. Tính độ dài cạnh AB và các góc A, B của tam giác đó.

Giải

Theo định lí côsin, ta có:



Hình 3

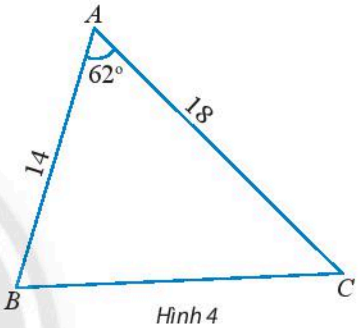
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\,.\,BC\,.\,AC\,.\cos C$$
$$= 12^2 + 8^2 - 2\,.\,12\,.\,8\,.\cos 115^\circ$$
$$\approx 289{,}14.$$

Vậy $AB \approx \sqrt{289{,}14} \approx 17$.

Theo hệ quả của định lí côsin, ta có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,.\,AB\,.\,AC} \approx \dfrac{17^2 + 8^2 - 12^2}{2.17.8} \approx 0{,}7684.$

Suy ra $\widehat{A} \approx 39^\circ 47'$, $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 25^\circ 13'$.

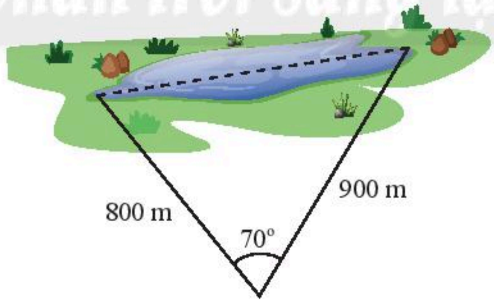
1 Tính các cạnh và các góc chưa biết của tam giác ABC trong Hình 4.



Hình 4

1 Tính khoảng cách giữa hai điểm ở hai đầu của một hồ nước. Biết từ một điểm cách hai đầu hồ lần lượt là 800 m và 900 m người quan sát nhìn hai điểm này dưới một góc 70° (Hình 5).

Chân trời sáng tạo



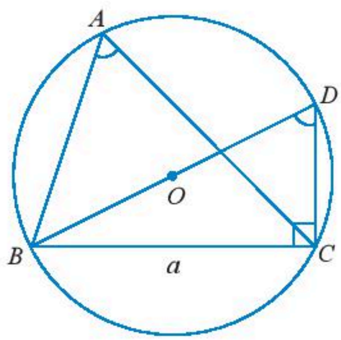
Hình 5

2. Định lí sin trong tam giác

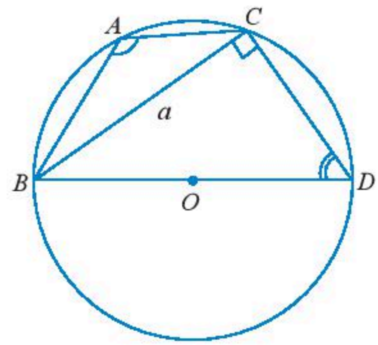
2 a) Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Vẽ đường kính BD.

i) Tính $\sin \widehat{BDC}$ theo a và R.

ii) Tìm mối liên hệ giữa hai góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BDC}$. Từ đó chứng minh rằng $2R = \dfrac{a}{\sin A}$.



Hình 6a. Tam giác *ABC* có góc *A* nhọn



Hình 6b. Tam giác *ABC* có góc *A* tù

b) Cho tam giác ABC với góc A vuông. Tính $\sin A$ và so sánh a với $2R$ để chứng tỏ ta vẫn có công thức $2R = \dfrac{a}{\sin A}$.

Từ 2, ta có định lí sau:

Định lí sin

Trong tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ định lí sin, ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả

$a = 2R\sin A$; $\quad b = 2R\sin B$; $\quad c = 2R\sin C$;

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$; $\quad \sin B = \dfrac{b}{2R}$; $\quad \sin C = \dfrac{c}{2R}$.

Chân trời sáng tạo

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 72^\circ$, $\widehat{B} = 83^\circ$, $BC = 18$. Tính độ dài các cạnh AC, AB và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Giải

Đặt $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Ta có: $a = 18$, $\widehat{C} = 180^\circ - (72^\circ + 83^\circ) = 25^\circ$.

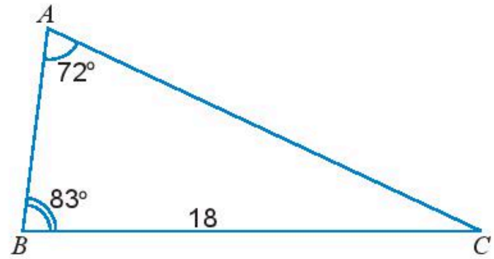
Áp dụng định lí sin, ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Suy ra:

$$AC = b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{18.\sin 83^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 18,8;$$

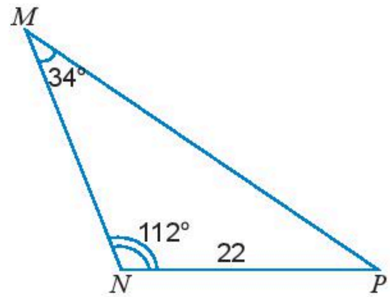
$$AB = c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{18.\sin 25^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 8;$$

$$R = \frac{a}{2.\sin A} = \frac{18}{2.\sin 72^\circ} \approx 9,5.$$



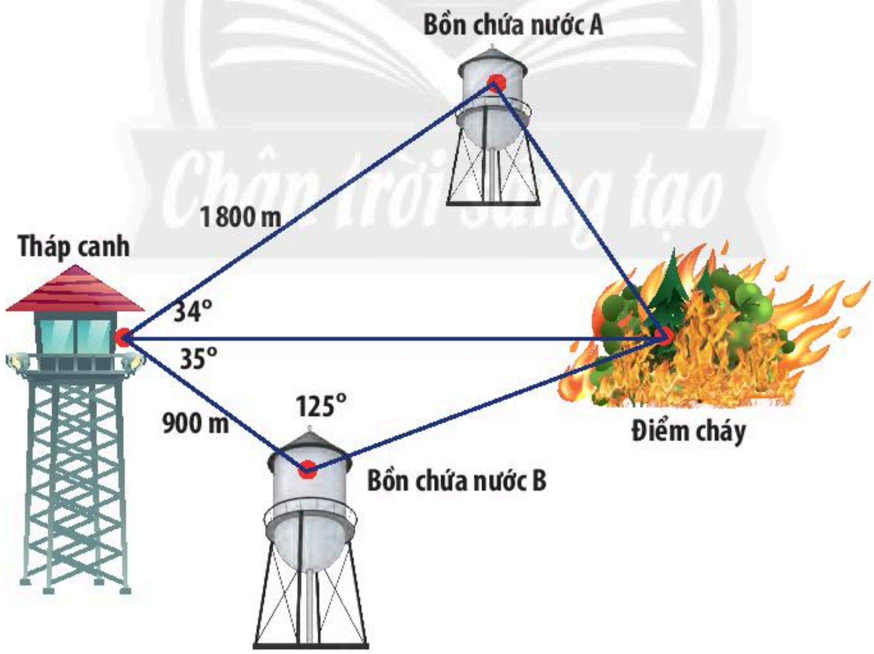
Hình 7

Tính các cạnh và các góc chưa biết của tam giác *MNP* trong Hình 8.



Hình 8

Trong một khu bảo tồn, người ta xây dựng một tháp canh và hai bồn chứa nước *A*, *B* để phòng hoả hoạn. Từ tháp canh, người ta phát hiện đám cháy và số liệu đưa về như Hình 9. Nên dẫn nước từ bồn chứa *A* hay *B* để dập tắt đám cháy nhanh hơn?



Hình 9

3. Các công thức tính diện tích tam giác

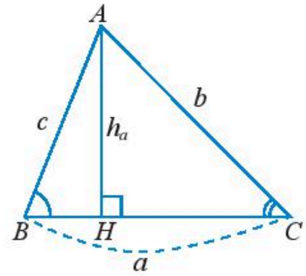
3 Cho tam giác ABC như Hình 10.

a) Viết công thức tính diện tích S của tam giác ABC theo a và h_a.

b) Tính h_a theo b và $\sin C$.

c) Dùng hai kết quả trên để chứng minh công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin C$.

d) Dùng định lí sin và kết quả ở câu c) để chứng minh công thức $S = \frac{abc}{4R}$.



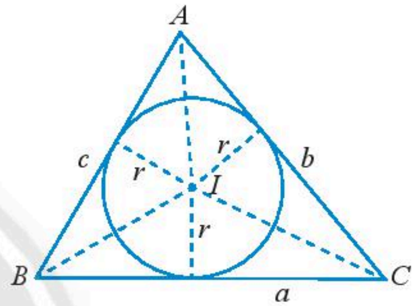
Hình 10

4 Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$ và $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác (Hình 11).

a) Tính diện tích các tam giác IBC, IAC, IAB theo r và a, b, c.

b) Dùng kết quả trên để chứng minh công thức tính diện tích tam giác ABC:

$$S = \frac{r(a+b+c)}{2}.$$



Hình 11

Bằng cách áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác, ta có thể tìm thêm được nhiều công thức tính diện tích tam giác. Ví dụ: Thay $h_a = c\,.\sin B$ vào công thức tính diện tích $S = \frac{1}{2}ah_a$, ta được $S = \frac{1}{2}ac\sin B$.

Chân trời sáng tạo

Cho tam giác ABC. Ta kí hiệu:

- h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB.
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- p là nửa chu vi tam giác.
- S là diện tích tam giác.

Ta có các ***công thức tính diện tích tam giác*** sau:

1) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$; 2) $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$;

3) $S = \frac{abc}{4R}$; 4) $S = pr$;

5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (***công thức Heron***).

Ví dụ 3

Cho tam giác *ABC* có $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$ và $\widehat{C} = 30^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác *ABC*.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Giải

a) Áp dụng công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, ta có:

$$S = \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.2.\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.2.\frac{1}{2} = \sqrt{3} \approx 1{,}7.$$

b) Áp dụng định lí côsin, ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 12 + 4 - 2\ .\ 2\sqrt{3}.\ 2.\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$

Suy ra $c = 2$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $R = \frac{c}{2.\sin C} = \frac{2}{2.\sin 30^\circ} = \frac{2}{2.\frac{1}{2}} = 2.$

Ví dụ 4

Cho tam giác *ABC* có các cạnh $a = 30$, $b = 26$, $c = 28$.

a) Tính diện tích tam giác *ABC*.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.

Giải

a) Ta có $p = \frac{1}{2}.(30 + 26 + 28) = 42.$

Áp dụng công thức Heron, ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{42(42-30)(42-26)(42-28)} = 336.$$

b) Ta có $S = \frac{abc}{4R}$, suy ra $R = \frac{abc}{4S} = \frac{30.26.28}{4.336} = 16{,}25.$

Ta lại có $S = pr$, suy ra $r = \frac{S}{p} = \frac{336}{42} = 8.$

3 Tính diện tích tam giác *ABC* và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* trong các trường hợp sau:

a) Các cạnh $b = 14$, $c = 35$ và $\widehat{A} = 60^\circ$;

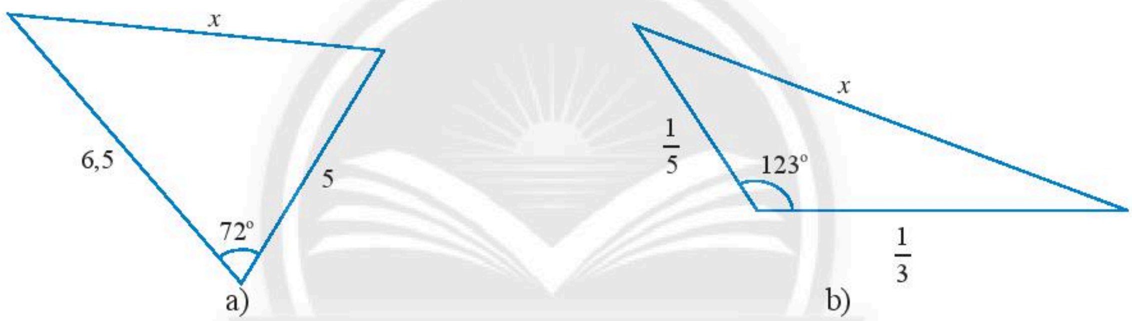
b) Các cạnh $a = 4$, $b = 5$, $c = 3$.

3 Tính diện tích một cánh buồm hình tam giác. Biết cánh buồm đó có chiều dài một cạnh là 3,2 m và hai góc kề cạnh đó có số đo là 48° và 105° (Hình 12).

Hình 12

BÀI TẬP

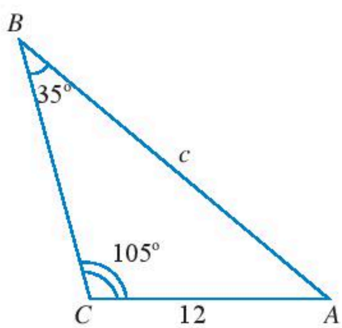
1. Tính độ dài cạnh x trong các tam giác sau:



Hình 13

Chân trời sáng tạo

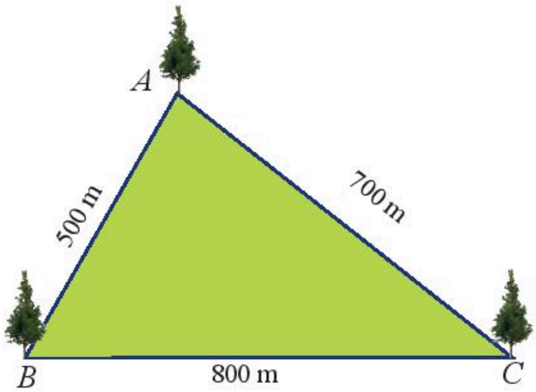
2. Tính độ dài cạnh c trong tam giác ABC ở Hình 14.



Hình 14

3. Cho tam giác ABC, biết cạnh $a = 152$, $\widehat{B} = 79^\circ$, $\widehat{C} = 61^\circ$. Tính các góc, các cạnh còn lại và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

4. Một công viên có dạng hình tam giác với các kích thước như Hình 15. Tính số đo các góc của tam giác đó.



Hình 15

5. Tính diện tích một lá cờ hình tam giác cân có độ dài cạnh bên là 90 cm và góc ở đỉnh là 35°.

Hình 16

6. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 8$ và $\widehat{A} = 60°$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính diện tích tam giác IBC.

7. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và độ dài ba cạnh AB, BC, CA lần lượt là 15, 18, 27.

a) Tính diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác GBC.

8. Cho h_a là đường cao vẽ từ đỉnh A, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh hệ thức: $h_a = 2R\sin B\sin C$.

9. Cho tam giác ABC có góc B nhọn, AD và CE là hai đường cao.

a) Chứng minh $\dfrac{S_{BDE}}{S_{BAC}} = \dfrac{BD\,.\,BE}{BA\,.\,BC}$.

b) Biết rằng $S_{ABC} = 9S_{BDE}$ và $DE = 2\sqrt{2}$. Tính $\cos B$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

10. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các đường chéo $AC = x$, $BD = y$ và góc giữa AC và BD bằng α. Gọi S là diện tích của tứ giác $ABCD$.

a) Chứng minh $S = \dfrac{1}{2}xy\sin\alpha$.

b) Nêu kết quả trong trường hợp $AC \perp BD$.

Bài 3. Giải tam giác và ứng dụng thực tế

Từ khoá: **Giải tam giác; Các yếu tố xác định tam giác.**

Với số liệu đo được từ một bên bờ sông như hình vẽ bên, bạn hãy giúp nhân viên đo đạc tính khoảng cách giữa hai cái cây bên kia bờ sông.

1. Giải tam giác

Giải tam giác là tìm số đo các cạnh và các góc còn lại của tam giác khi ta biết được các yếu tố đủ để xác định tam giác đó.

Để giải tam giác, ta thường sử dụng một cách hợp lí các hệ thức lượng như: định lí sin, định lí côsin và các công thức tính diện tích tam giác.

Ví dụ 1

Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $AB = 85$, $AC = 95$ và $\widehat{A} = 40^\circ$;

b) $AB = 15$, $AC = 25$ và $BC = 30$.

Giải

Đặt $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

a) Ta cần tính cạnh a và hai góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

Áp dụng định lí côsin, ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 95^2 + 85^2 - 2.95.85.\cos 40^\circ \approx 3\,878{,}38$.

Suy ra $a \approx \sqrt{3878{,}38} \approx 62{,}3$.

Áp dụng hệ quả định lí côsin, ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx \frac{62{,}3^2 + 85^2 - 95^2}{2.62{,}3.85} \approx 0{,}197.$$

Suy ra $\widehat{B} \approx 78^\circ 38'$, $\widehat{C} \approx 180^\circ - 40^\circ - 78^\circ 38' = 61^\circ 22'$.

b) Ta cần tính số đo ba góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

Áp dụng hệ quả của định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25^2 + 15^2 - 30^2}{2.25.15} = -\frac{1}{15} \Rightarrow \widehat{A} \approx 93^\circ 49'.$$

Áp dụng định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{30}{\sin 93^\circ 49'} = \dfrac{25}{\sin B} \Rightarrow \sin B \approx 0{,}8315$

$$\Rightarrow \widehat{B} \approx 56^\circ 15',\ \widehat{C} \approx 180^\circ - 93^\circ 49' - 56^\circ 15' = 29^\circ 56'.$$

Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a = 17{,}4$; $\widehat{B} = 44^\circ 30'$; $\widehat{C} = 64^\circ$.

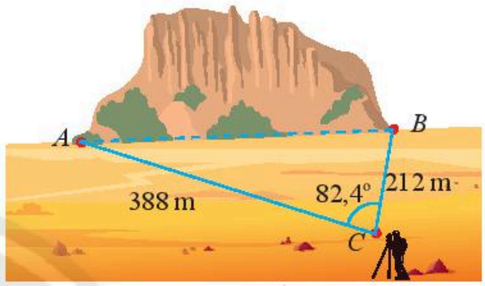
b) $a = 10$; $b = 6$; $c = 8$.

2. Áp dụng giải tam giác vào thực tế

Vận dụng giải tam giác giúp ta giải quyết rất nhiều bài toán trong thực tế, đặc biệt là trong thiết kế và xây dựng.

Ví dụ 2

Một đường hầm được dự kiến xây dựng xuyên qua một ngọn núi. Để ước tính chiều dài của đường hầm, một kĩ sư đã thực hiện các phép đo và cho ra kết quả như Hình 1. Tính chiều dài của đường hầm từ các số liệu đã khảo sát được.



Hình 1

Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

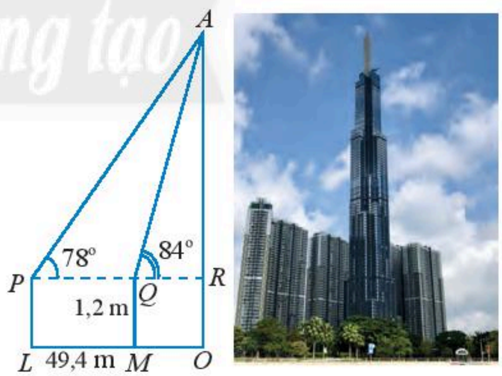
$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \,.\, CA \,.\, CB \,.\, \cos C = 388^2 + 212^2 - 2 \,.\, 388 \,.\, 212 \,.\, \cos 82{,}4^\circ \approx 173\,730.$

Suy ra $AB \approx \sqrt{173730} \approx 417$ (m).

Vậy đường hầm dài khoảng 417 m.

Ví dụ 3

Để xác định chiều cao của một toà nhà cao tầng, một người đứng tại điểm M, sử dụng giác kế nhìn thấy đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RQA} = 84^\circ$, người đó lùi ra xa một khoảng cách $LM = 49{,}4$ m thì nhìn thấy đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RPA} = 78^\circ$. Tính chiều cao của toà nhà, biết rằng khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kế đó là $PL = QM = 1{,}2$ m (Hình 2).



Hình 2

Giải thích: Góc nâng là góc tạo bởi tia ngắm nhìn lên và đường nằm ngang.

Giải

Ta có $\widehat{PAQ} = \widehat{AQR} - \widehat{APR} = 84^\circ - 78^\circ = 6^\circ$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác APQ, ta có:

$$\frac{AQ}{\sin P} = \frac{PQ}{\sin A} \Rightarrow \frac{AQ}{\sin 78^\circ} = \frac{PQ}{\sin 6^\circ} \Rightarrow AQ = \frac{PQ \,.\, \sin 78^\circ}{\sin 6^\circ}.$$

Chân trời sáng tạo

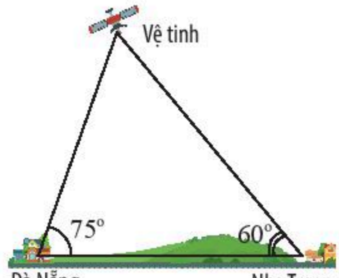
Trong tam giác vuông AQR, ta có:

$$AR = AQ.\sin 84^\circ = \frac{PQ.\sin 78^\circ.\sin 84^\circ}{\sin 6^\circ} = \frac{49,4.\sin 78^\circ.\sin 84^\circ}{\sin 6^\circ} \approx 460 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của toà nhà là: $AO = AR + RO \approx 460 + 1,2 = 461,2$ (m).

Ví dụ 4

Hai trạm quan sát ở hai thành phố Đà Nẵng và Nha Trang đồng thời nhìn thấy một vệ tinh với góc nâng lần lượt là 75° và 60° (Hình 3). Vệ tinh cách trạm quan sát tại thành phố Đà Nẵng bao nhiêu kilômét? Biết rằng khoảng cách giữa hai trạm quan sát là 520 km.



Hình 3

Giải

Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn vị trí của thành phố Đà Nẵng, Nha Trang và vệ tinh.

Ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$.

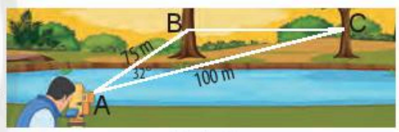
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$AC = \frac{AB.\sin B}{\sin C} = \frac{520.\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 637 \text{ (km)}.$$

Vậy vệ tinh cách trạm quan sát tại thành phố Đà Nẵng khoảng 637 km.

Ví dụ 5

Hãy giải bài toán nêu ra trong hoạt động khởi động của bài.



Hình 4

Giải

Gọi vị trí của người đo đạc đứng là điểm A và gọi B, C lần lượt là vị trí hai cái cây bên kia sông. Ta có tam giác ABC với $AC = 100$ m; $AB = 75$ m và $\widehat{A} = 32^\circ$.

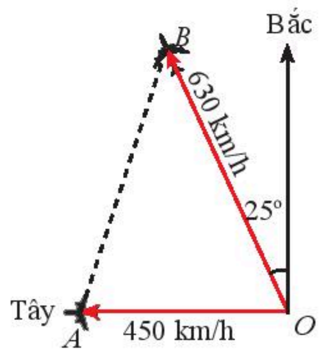
Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2.AC.AB.\cos A = 100^2 + 75^2 - 2.100.75.\cos 32^\circ \approx 2\,904,3$.

Suy ra $BC \approx \sqrt{2\,904,3} \approx 53,9$ (m).

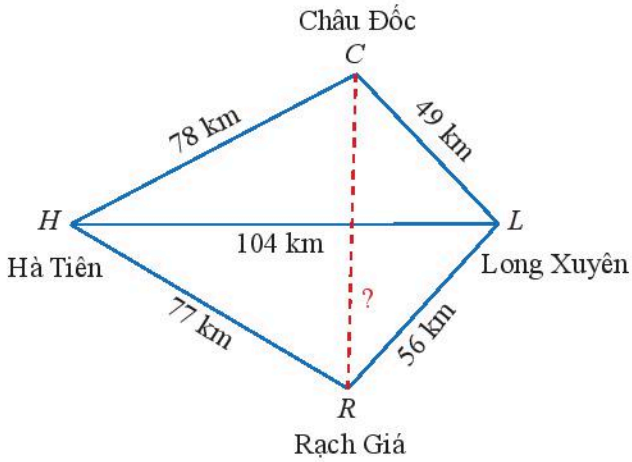
Vậy hai cái cây bên kia sông cách nhau khoảng 53,9 m.

1 Hai máy bay cùng cất cánh từ một sân bay nhưng bay theo hai hướng khác nhau. Một chiếc di chuyển với tốc độ 450 km/h theo hướng tây và chiếc còn lại di chuyển theo hướng lệch so với hướng bắc 25° về phía tây với tốc độ 630 km/h (Hình 5). Sau 90 phút, hai máy bay cách nhau bao nhiêu kilômét? Giả sử chúng đang ở cùng độ cao.



Hình 5

Trên bản đồ địa lí, người ta thường gọi tứ giác với bốn đỉnh lần lượt là các thành phố Hà Tiên, Châu Đốc, Long Xuyên, Rạch Giá là tứ giác Long Xuyên. Dựa theo các khoảng cách đã cho trên Hình 6, tính khoảng cách giữa Châu Đốc và Rạch Giá.



Hình 6

BÀI TẬP

1. Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

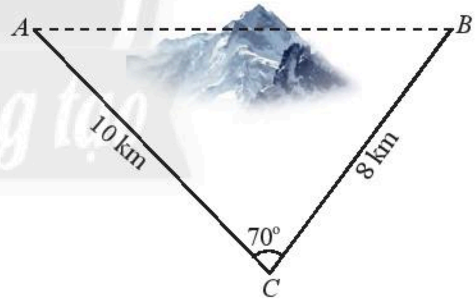
a) $AB = 14, AC = 23, \widehat{A} = 125^\circ$;

b) $BC = 22, \widehat{B} = 64^\circ, \widehat{C} = 38^\circ$;

c) $AC = 22, \widehat{B} = 120^\circ, \widehat{C} = 28^\circ$;

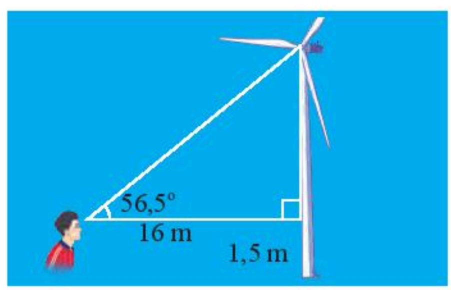
d) $AB = 23, AC = 32, BC = 44$.

2. Để lắp đường dây điện cao thế từ vị trí A đến vị trí B, do phải tránh một ngọn núi nên người ta phải nối đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 10 km, sau đó nối đường dây từ vị trí C đến vị trí B dài 8 km. Góc tạo bởi hai đoạn dây AC và CB là 70°. Tính chiều dài tăng thêm vì không thể nối trực tiếp từ A đến B.



Hình 7

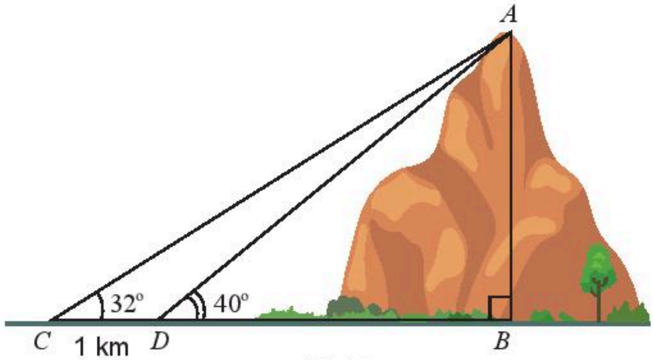
3. Một người đứng cách thân một cái quạt gió 16 m và nhìn thấy tâm của cánh quạt với góc nâng $56,5^\circ$ (Hình 8). Tính khoảng cách từ tâm của cánh quạt đến mặt đất. Cho biết khoảng cách từ mắt của người đó đến mặt đất là 1,5 m.



Hình 8

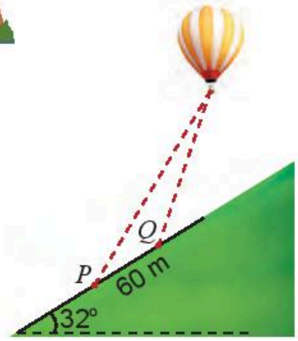
Chân trời sáng tạo

4. Tính chiều cao AB của một ngọn núi. Biết tại hai điểm C, D cách nhau 1 km trên mặt đất (B, C, D thẳng hàng), người ta nhìn thấy đỉnh A của núi với góc nâng lần lượt là 32° và 40° (Hình 9).



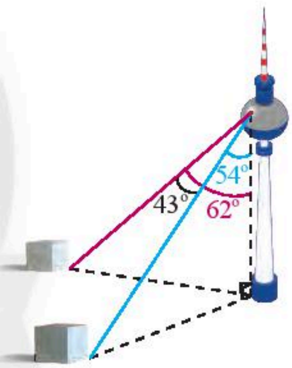
Hình 9

5. Hai người quan sát khinh khí cầu tại hai địa điểm P và Q nằm ở sườn đồi nghiêng 32° so với phương ngang, cách nhau 60 m (Hình 10). Người quan sát tại P xác định góc nâng của khinh khí cầu là 62°. Cùng lúc đó, người quan sát tại Q xác định góc nâng của khinh khí cầu đó là 70°. Tính khoảng cách từ Q đến khinh khí cầu.



Hình 10

6. Một người đứng ở trên một tháp truyền hình cao 352 m so với mặt đất, muốn xác định khoảng cách giữa hai cột mốc trên mặt đất bên dưới. Người đó quan sát thấy góc được tạo bởi hai đường ngắm tới hai mốc này là 43°, góc giữa phương thẳng đứng và đường ngắm tới một điểm mốc trên mặt đất là 62° và đến điểm mốc khác là 54° (Hình 11). Tính khoảng cách giữa hai cột mốc này.



Hình 11

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

1. Cho tam giác ABC. Biết $a = 49,4$; $b = 26,4$; $\widehat{C} = 47^{\circ}20'$. Tính hai góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ và cạnh c.

2. Cho tam giác ABC. Biết $a = 24$, $b = 13$, $c = 15$. Tính các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

3. Cho tam giác ABC có $a = 8$, $b = 10$, $c = 13$.

a) Tam giác ABC có góc tù không?

b) Tính độ dài trung tuyến AM, diện tích tam giác và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

c) Lấy điểm D đối xứng với A qua C. Tính độ dài BD.

4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $b = 8$, $c = 5$. Tính:

a) Cạnh a và các góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$;

b) Diện tích tam giác ABC;

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường cao AH của tam giác.

5. Cho hình bình hành $ABCD$.

a) Chứng minh $2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$.

b) Cho $AB = 4$, $BC = 5$, $BD = 7$. Tính AC.

6. Cho tam giác ABC có $a = 15$, $b = 20$, $c = 25$.

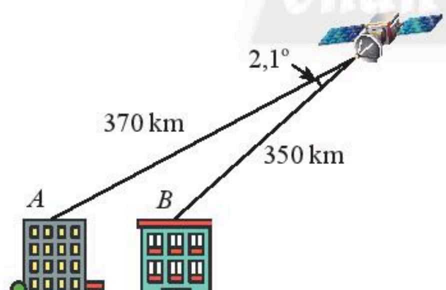
a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

7. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

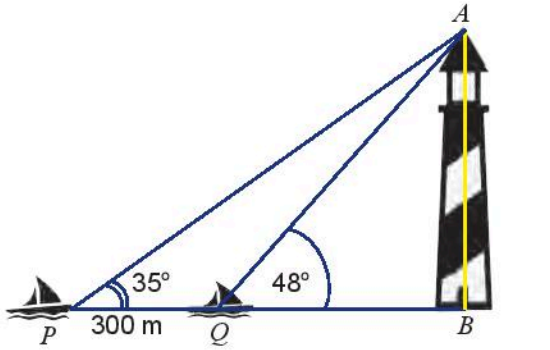
$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{R\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{abc}.$$

8. Tính khoảng cách AB giữa hai nóc toà cao ốc. Cho biết khoảng cách từ hai điểm đó đến một vệ tinh viễn thông lần lượt là 370 km, 350 km và góc nhìn từ vệ tinh đến A và B là 2,1°.



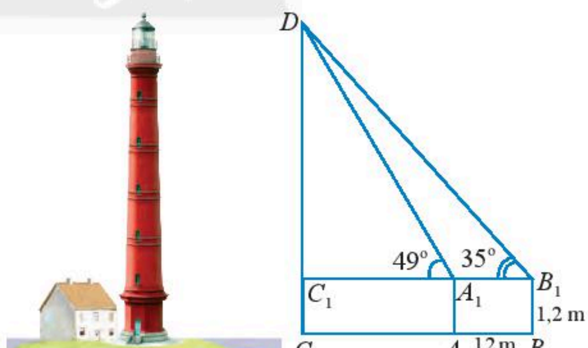
Hình 1

9. Hai chiếc tàu thuỷ P và Q cách nhau 300 m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển (Hình 2). Từ P và Q, người ta nhìn thấy tháp hải đăng AB dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^\circ$ và $\widehat{BQA} = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp hải đăng đó.



Hình 2

10. Muốn đo chiều cao của một ngọn tháp, người ta lấy hai điểm A, B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12$ m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của hai giác kế có chiều cao là $h = 1,2$ m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$, $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.



Hình 3

Chương V VECTƠ

Trong chương V, chúng ta sẽ tìm hiểu về vectơ và các phép toán liên quan đến vectơ như: tổng và hiệu hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ. Chúng ta cũng sẽ học cách vận dụng các phép toán về vectơ vào việc giải toán cũng như trong các hoạt động thực tiễn và các môn học có liên quan.

Trong một máy đo vận tốc gió (Anemometer), độ lớn của vận tốc được đo bằng số vòng quay thiết bị hình chảo và hướng gió được biểu diễn bởi hướng của mũi tên.

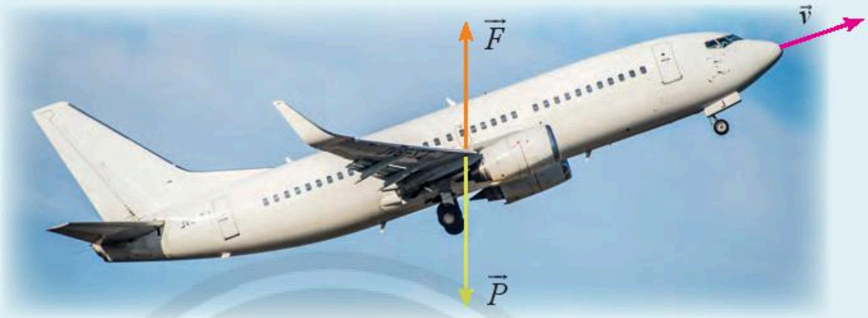
Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết được khái niệm vectơ, vectơ bằng nhau, vectơ-không. Biểu thị được một số đại lượng trong thực tiễn bằng vectơ.
– Thực hiện được các phép toán trên vectơ (tổng và hiệu hai vectơ, tích của một số với một vectơ) và mô tả được những tính chất hình học (ba điểm thẳng hàng, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác, ...) bằng vectơ.
– Thực hiện được phép toán tính tích vô hướng của hai vectơ và mô tả được những tính chất hình học bằng tích vô hướng.
– Sử dụng được vectơ và các phép toán trên vectơ để giải thích một số hiện tượng có liên quan đến Vật lí và Hoá học. Vận dụng được kiến thức về vectơ để giải một số bài toán hình học và một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Bài 1. Khái niệm vectơ

Từ khoá: **Đại lượng vô hướng; Đại lượng có hướng; Điểm đầu; Điểm cuối; Giá; Độ lớn; Vectơ đối.**

Chúng ta cần vectơ để biểu diễn các đại lượng có hướng.



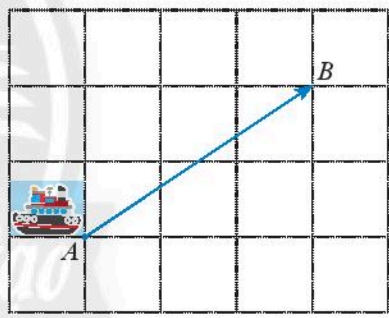
1. Định nghĩa vectơ

1 Trong thông báo: Có một con tàu chở 500 tấn hàng từ cảng A đến cảng B cách nhau 500 km.

Bạn hãy tìm sự khác biệt giữa hai đại lượng sau:

– Khối lượng của hàng: 500 tấn.

– Độ dịch chuyển của tàu: 500 km từ A đến B.



Hình 1

Đại lượng vô hướng là đại lượng chỉ có độ lớn. Ví dụ: khối lượng, khoảng cách, nhiệt độ, ...

Đại lượng có hướng là đại lượng bao gồm cả độ lớn và hướng. Ví dụ: độ dịch chuyển, lực, vận tốc, gia tốc, ...

Khi xác định một đại lượng vô hướng, ta chỉ cần mô tả độ lớn của nó. Ví dụ: Hàng trên tàu có khối lượng 500 tấn.

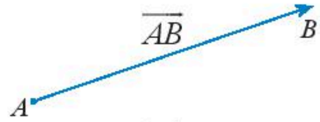
Khi xác định một đại lượng có hướng, ta phải đề cập đến cả độ lớn và hướng của nó. Ví dụ: Con tàu có độ dịch chuyển dài 500 km theo hướng từ A đến B.

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là đã chỉ ra điểm đầu và điểm cuối.

• Vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là vectơ $\overrightarrow{AB}$ (Hình 2).

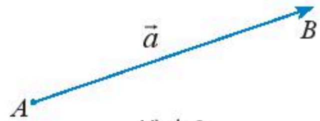
• Đường thẳng đi qua hai điểm A và B gọi là ***giá*** của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

• Độ dài của đoạn thẳng AB gọi là ***độ dài*** của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$. Như vậy ta có: $|\overrightarrow{AB}| = AB$.



Hình 2

Chú ý: Một vectơ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối có thể viết là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

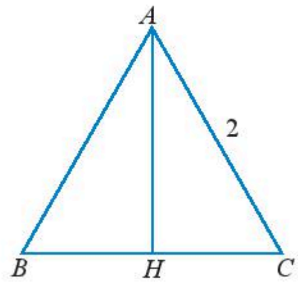


Hình 3

Ví dụ 1

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2 (Hình 4). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Tìm điểm đầu, điểm cuối, giá và độ dài của các vectơ: $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BH}$.



Hình 4

Giải

Vectơ $\overrightarrow{CA}$ có điểm đầu là C, điểm cuối là A và có giá là đường thẳng AC.

Vectơ $\overrightarrow{AH}$ có điểm đầu là A, điểm cuối là H và có giá là đường thẳng AH.

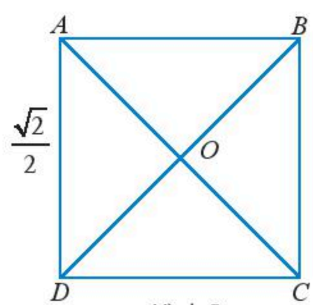
Vectơ $\overrightarrow{BH}$ có điểm đầu là B, điểm cuối là H và có giá là đường thẳng BH.

Ta có: $CA = 2$, $BH = 1$, $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Suy ra $|\overrightarrow{CA}| = 2$, $|\overrightarrow{BH}| = 1$, $|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{3}$.

1 Tìm điểm đầu, điểm cuối, giá và độ dài của các vectơ $\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{HA}$ trong Ví dụ 1.

2 Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$, hai đường chéo cắt nhau tại O (Hình 5). Tìm độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AO}$.

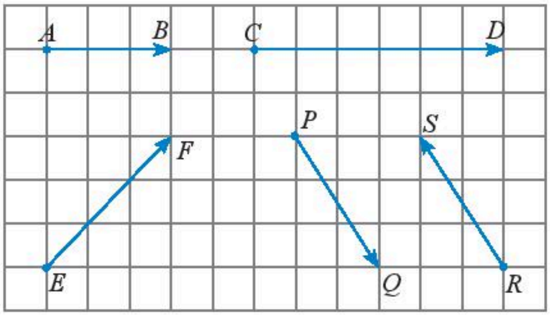


Hình 5

Chân trời sáng tạo

2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng

Bạn có nhận xét gì về giá của các cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ trong Hình 6?



Hình 6

Hai vectơ được gọi là ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Ví dụ 2

Tìm các cặp vectơ cùng phương trong Hình 6.

Giải

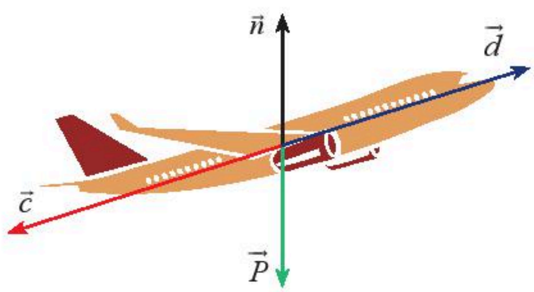
Trong Hình 6, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương vì có giá trùng nhau; $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ cùng phương vì có giá song song.

Chú ý: Trong Hình 6, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương và có cùng hướng đi từ trái sang phải. Ta nói $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là *hai vectơ cùng hướng*. Hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ cùng phương nhưng có hướng ngược nhau. Ta nói hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ là *hai vectơ ngược hướng*.

Nhận xét: Hai vectơ cùng phương chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Ví dụ 3

Tìm các cặp lực ngược hướng trong số các lực tác động vào máy bay trong Hình 7.



Hình 7

Giải

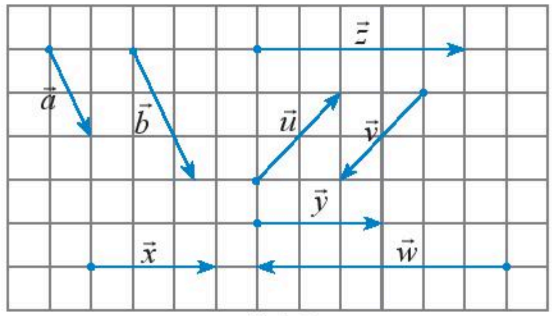
Quan sát Hình 7, ta thấy lực nâng $\vec{n}$ ngược hướng với trọng lực $\vec{P}$; lực cản $\vec{c}$ ngược hướng với lực đẩy $\vec{d}$.

Quan sát Hình 8 và gọi tên các vectơ:

a) Cùng phương với vectơ $\vec{x}$;

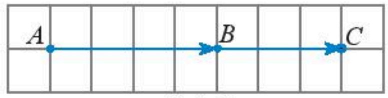
b) Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$;

c) Ngược hướng với vectơ $\vec{u}$.



Hình 8

Nhận xét: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.



Hình 9

Thật vậy, ta thấy nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá trùng nhau nên chúng cùng phương. Ngược lại, nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương thì hai đường thẳng AB và AC phải song song hoặc trùng nhau, hơn nữa hai đường thẳng này lại có chung điểm A nên chúng phải trùng nhau. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

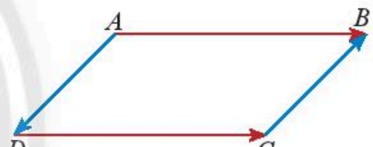
Khẳng định sau đúng hay sai? Hãy giải thích.

Nếu ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

3. Vectơ bằng nhau – Vectơ đối nhau

Cho hình bình hành $ABCD$ (Hình 10), hãy so sánh độ dài và hướng của hai vectơ:

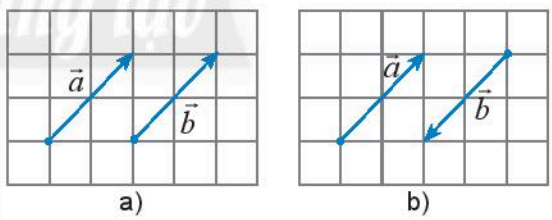
a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$;   b) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$.



Hình 10

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = -\vec{b}$. Khi đó, vectơ $\vec{b}$ được gọi là ***vectơ đối*** của vectơ $\vec{a}$.

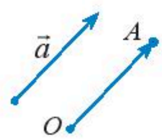


Hình 11

Chú ý:

a) Cho vectơ $\vec{a}$ và điểm O, ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Khi đó độ dài của vectơ $\vec{a}$ là độ dài đoạn OA, kí hiệu là $|\vec{a}|$.

b) Cho đoạn thẳng MN, ta luôn có $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$.



Hình 12

Ví dụ 4

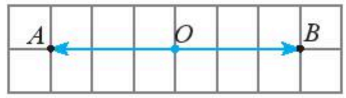
a) Tìm trong Hình 10 hai cặp vectơ bằng nhau và hai cặp vectơ đối nhau.

b) Cho điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tìm hai vectơ đối nhau.

Giải

a) Trong Hình 10, ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$,

$$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}.$$



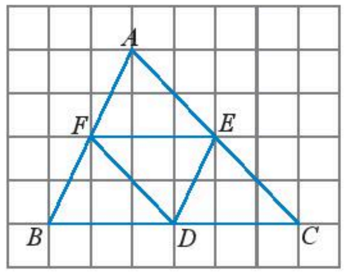
Hình 13

b) Ta có $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ (Hình 13).

5 Cho D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC (Hình 14).

a) Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{EF}$.

b) Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{EC}$.



Hình 14

4. Vectơ-không

Ta biết rằng mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó. Với một điểm A bất kì, ta quy ước có một vectơ đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là A. Vectơ đó được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là vectơ-không (có gạch nối giữa hai từ).

Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là ***vectơ-không***, kí hiệu là $\vec{0}$.

Chú ý:

– Quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0.

– Vectơ-không luôn cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

– Mọi vectơ-không đều bằng nhau: $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots$ với mọi điểm $A, B, C, \ldots$

– Vectơ đối của vectơ-không là chính nó.

Ví dụ 5

Cho đoạn thẳng EF có độ dài bằng 2 và nhận M là trung điểm.

a) Tìm vectơ-không trong số các vectơ: $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EE}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{MM}$, $\overrightarrow{FF}$.

b) Dùng kí hiệu $\vec{0}$ để biểu diễn các vectơ-không đó.

Chân trời sáng tạo

Giải

a) Ta có các vectơ $\overrightarrow{EE}$, $\overrightarrow{MM}$, $\overrightarrow{FF}$ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau nên chúng là vectơ-không.

b) Ta viết $\vec{0} = \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{FF} = \overrightarrow{MM}$.

6 Tìm độ dài của các vectơ $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EE}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{MM}$, $\overrightarrow{FF}$ trong Ví dụ 5.

BÀI TẬP

1. a) Bạn hãy tìm sự khác biệt giữa hai đại lượng sau:

– Bác Ba có số tiền là 20 triệu đồng.

– Một cơn bão di chuyển với vận tốc 20 km/h theo hướng đông bắc.

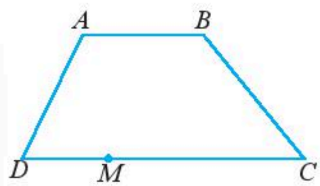
b) Trong các đại lượng sau, đại lượng nào cần được biểu diễn bởi vectơ?

Giá tiền, lực, thể tích, tuổi, độ dịch chuyển, vận tốc.

2. Cho hình thang $ABCD$ có hai cạnh đáy là AB và DC (Hình 15). Điểm M nằm trên đoạn DC.

a) Gọi tên các vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Gọi tên các vectơ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{DM}$.

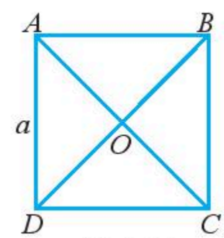


Hình 15

3. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và có cạnh bằng a (Hình 16).

a) Tìm trong hình hai vectơ bằng nhau và có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

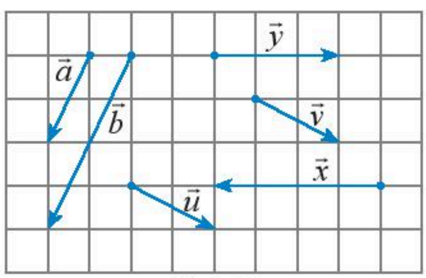
b) Tìm trong hình hai vectơ đối nhau và có độ dài bằng $a\sqrt{2}$.



Hình 16

4. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng tứ giác đó là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

5. Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng hướng, ngược hướng, bằng nhau trong Hình 17.



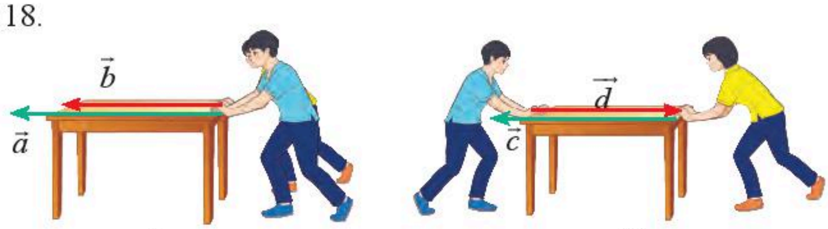
Hình 17

6. Gọi O là tâm hình lục giác đều $ABCDEF$.

a) Tìm các vectơ khác vectơ $\vec{0}$ và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{OA}$.

b) Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.

7. Tìm các lực cùng hướng và ngược hướng trong số các lực đẩy được biểu diễn bằng các vectơ trong Hình 18.

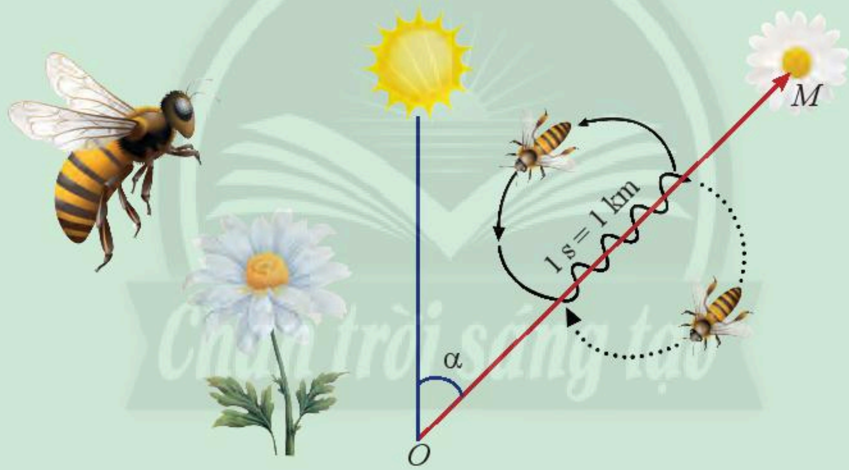


a) *b)*

Hình 18

Bạn có biết?

VECTƠ TRONG VŨ ĐIỆU LOÀI ONG



Vũ điệu loài ong hay *điệu nhảy lúc lắc* là một vũ điệu đặc biệt hình số 8 của ong mật. Những con ong đã tìm được nguồn thức ăn thành công sẽ thực hiện vũ điệu này để chia sẻ thông tin cho các thành viên khác trong tổ. Thông tin đó là một vectơ $\overrightarrow{OM}$ chỉ độ dịch chuyển từ tổ đến nơi có hoa.

– Tia OM phân đôi đường số 8 trong vũ điệu chỉ hướng của vectơ.

– Thời gian múa sẽ tỉ lệ thuận với độ lớn của vectơ (khoảng cách từ tổ đến nơi có hoa).

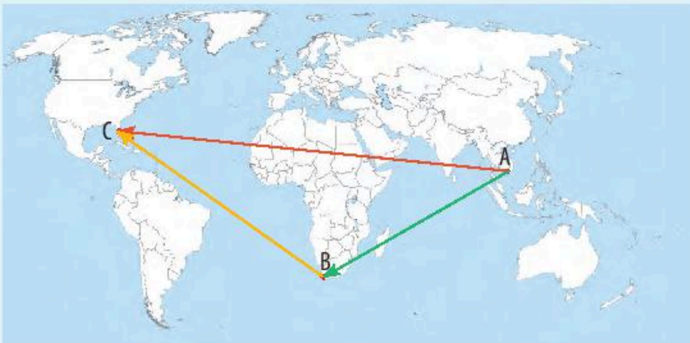
Như vậy có thể nói loài ong cũng biết biểu diễn vectơ thông qua một điệu múa.

(*Nguồn:* https://en.wikipedia.org/wiki/Round_dance_honey_bee)

Bài 2. Tổng và hiệu của hai vectơ

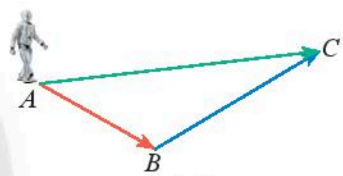
Từ khoá: **Tổng của hai vectơ; Hiệu của hai vectơ; Quy tắc ba điểm; Quy tắc hình bình hành.**

Một kiện hàng được vận chuyển từ điểm *A* đến điểm *B* rồi lại được vận chuyển từ điểm *B* đến điểm *C*. Tìm vectơ biểu diễn tổng của hai độ dịch chuyển: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.



1. Tổng của hai vectơ

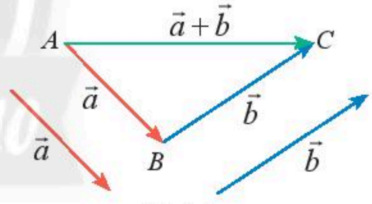
1 Một rô bốt thực hiện liên tiếp hai chuyển động có độ dịch chuyển lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ (Hình 1). Tìm vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của rô bốt sau hai chuyển động trên.



Hình 1

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A tuỳ ý, lấy hai điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC}$ được gọi là ***tổng của hai vectơ*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a}+\vec{b}$.

Vậy $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



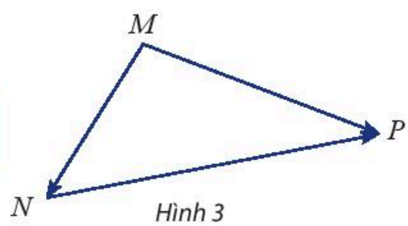
Hình 2

Phép toán tìm tổng của hai vectơ còn được gọi là ***phép cộng vectơ***.

Từ định nghĩa tổng của hai vectơ, ta suy ra quy tắc cộng vectơ sau đây:

Quy tắc ba điểm

Với ba điểm M, N, P, ta có: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.



Hình 3

Chú ý: Khi cộng hai vectơ theo quy tắc ba điểm, điểm cuối của vectơ thứ nhất phải là điểm đầu của vectơ thứ hai.

Ví dụ 1

Cho các điểm E, F, G, H, K. Thực hiện các phép cộng vectơ:

$$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FH};\ \overrightarrow{FK}+\overrightarrow{KG};\ \overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HE}.$$

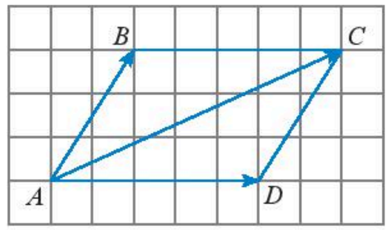
Giải

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{EH};\quad \overrightarrow{FK}+\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{FG};\quad \overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{EE}=\vec{0}.$$

2 Cho hình bình hành $ABCD$ (Hình 4).

Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

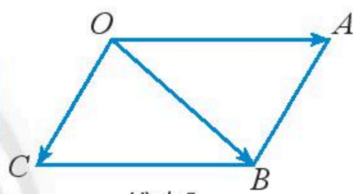


Hình 4

Từ 2, ta suy ra quy tắc cộng vectơ sau đây:

Quy tắc hình bình hành

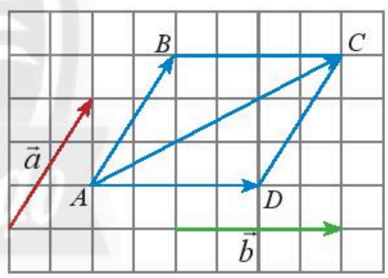
Nếu $OABC$ là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$.



Hình 5

Ví dụ 2

Tìm tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong Hình 6.



Hình 6

Giải

Ta có: $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, suy ra $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Vậy $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Chú ý: Để áp dụng quy tắc hình bình hành, ta cần đưa bài toán tìm tổng hai vectơ về bài toán tìm tổng của hai vectơ có chung điểm đầu.

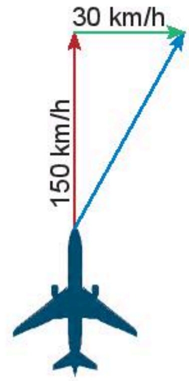
1 Cho hình thang $ABCD$ có hai cạnh đáy là AB và DC. Cho biết $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$.

Chứng minh hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

2 Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

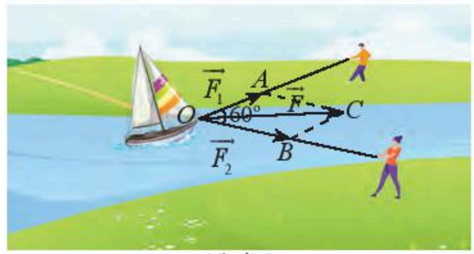
Chân trời sáng tạo

1 Một máy bay có vectơ vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vectơ theo hướng đông như Hình 7. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



Hình 7

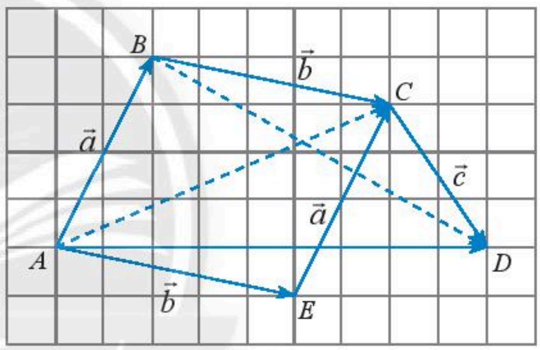
2 Hai người cùng kéo một con thuyền với hai lực $\vec{F_1} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{F_2} = \overrightarrow{OB}$ có độ lớn lần lượt là 400 N, 600 N (Hình 8). Cho biết góc giữa hai vectơ là 60°. Tìm độ lớn của vectơ hợp lực $\vec{F}$ là tổng của hai lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$.



Hình 8

2. Tính chất của phép cộng các vectơ

2 Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ được biểu diễn như Hình 9. Hãy hoàn thành các phép cộng vectơ sau và so sánh các kết quả tìm được:



Hình 9

a) $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boxed{?}$;

$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \boxed{?}$.

b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \boxed{?}$;

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \boxed{?}$.

Phép cộng vectơ có các tính chất sau:

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Chú ý: Từ tính chất kết hợp, ta có thể xác định được tổng của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ với $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Ví dụ 3

Cho tứ giác $ABCD$. Thực hiện các phép cộng vectơ sau:

a) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

Chân trời sáng tạo

Giải

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng vectơ, ta có:

a) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

3 Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Tính độ dài của các vectơ sau:

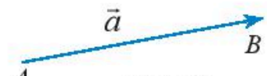
a) $\vec{a}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{CB}$;

b) $\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$.

Chú ý: Cho vectơ tuỳ ý $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

Ta có $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

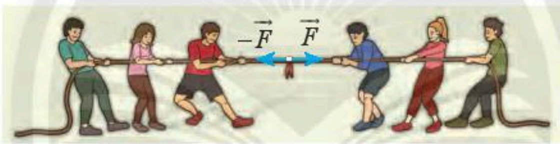
Tổng hai vectơ đối nhau luôn bằng vectơ-không: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.



Hình 10

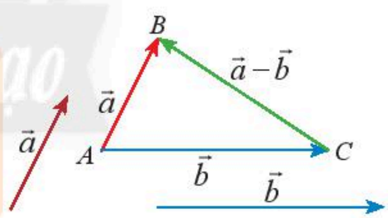
3. Hiệu của hai vectơ

3 Tìm hợp lực của hai lực đối nhau $\vec{F}$ và $-\vec{F}$ (Hình 11).



Hình 11

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. ***Hiệu của hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+(-\vec{b})$ và kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.



Hình 12

Phép toán tìm hiệu của hai vectơ còn được gọi là ***phép trừ vectơ***.

Ví dụ 4

Cho các điểm M, N, P, Q. Thực hiện các phép trừ vectơ sau: $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PQ}$.

Giải

Ta có:

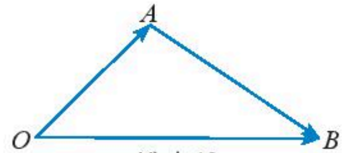
$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$;

$\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{QM}$.

Chân trời sáng tạo

Chú ý:

Cho ba điểm O, A, B, ta có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.



Hình 13

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1 và một điểm O tuỳ ý.
Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$; b) $\vec{b} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC})$.

4. Tính chất vectơ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

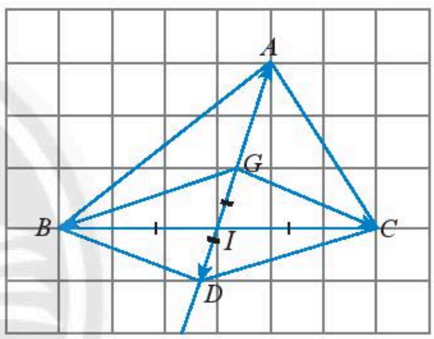
a) Cho điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Ta đã biết $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM}$.

Hoàn thành phép cộng vectơ sau: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MM} = \boxed{?}$.

Hình 14

b) Cho điểm G là trọng tâm của tam giác ABC có trung tuyến AI. Lấy D là điểm đối xứng với G qua I. Ta có $BGCD$ là hình bình hành và G là trung điểm của đoạn thẳng AD. Với lưu ý rằng $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$ và $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{DG}$, hoàn thành phép cộng vectơ sau:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DD} = \boxed{?}$$



Hình 15

Người ta chứng minh được các tính chất:

Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ví dụ 5

Cho tứ giác $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm của IJ. Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Giải

Do I, J, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và IJ nên:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0};\ \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0};\ \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}.$$

Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC}) + (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JD})$

$= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD})$

$= \vec{0}$.

5 Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Tìm ba điểm M, N, P thoả mãn:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$; c) $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}=\vec{0}$.

BÀI TẬP

1. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo và một điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

2. Cho tứ giác $ABCD$, thực hiện các phép cộng và trừ vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

3. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Tính độ dài của các vectơ:

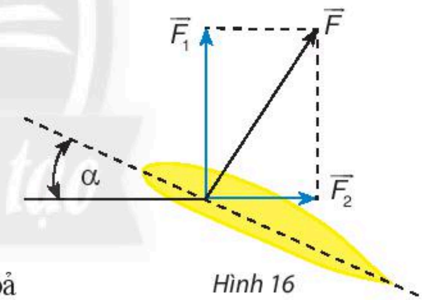
a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$.

4. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

5. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều là 10 N và $\widehat{AMB}=90^\circ$. Tìm độ lớn của lực $\overrightarrow{F_3}$.

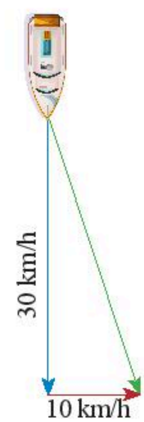
6. Khi máy bay nghiêng cánh một góc α, lực $\vec{F}$ của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng $\overrightarrow{F_1}$ và lực cản $\overrightarrow{F_2}$ (Hình 16). Cho biết $\alpha=30^\circ$ và $\left|\vec{F}\right|=a$. Tính $\left|\overrightarrow{F_1}\right|$ và $\left|\overrightarrow{F_2}\right|$ theo a.



Hình 16

7. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và ba điểm G, H, K thoả mãn: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AG}$.

8. Một con tàu có vectơ vận tốc chỉ theo hướng nam, vận tốc của dòng nước là một vectơ theo hướng đông như Hình 17. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.

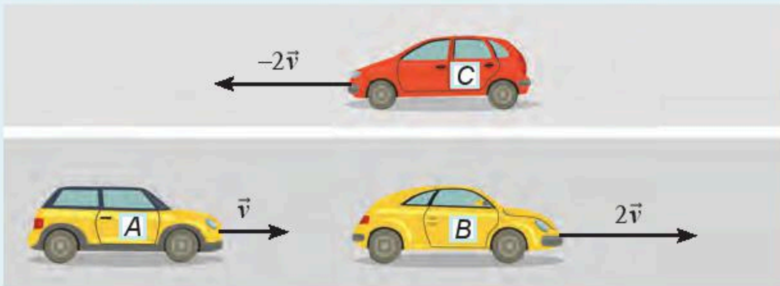


Hình 17

Bài 3. Tích của một số với một vectơ

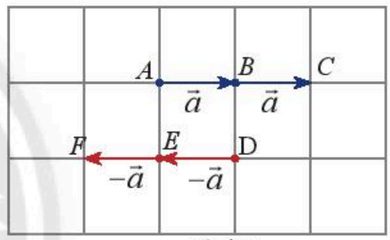
Từ khoá: Tích của một số với một vectơ; Tích của một vectơ với một số; Điều kiện cùng phương của hai vectơ.

Xe *B* đi cùng hướng với xe *A* và có tốc độ gấp 2 lần xe *A*.
Xe *C* đi ngược hướng với xe *A* và có tốc độ gấp 2 lần xe *A*.



1. Tích của một số với một vectơ và các tính chất

1 Cho vectơ $\vec{a}$. Hãy xác định độ dài và hướng của hai vectơ: $\vec{a}+\vec{a}$, $(-\vec{a})+(-\vec{a})$ (Hình 1).



Hình 1

Cho số k khác 0 và vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$.

Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

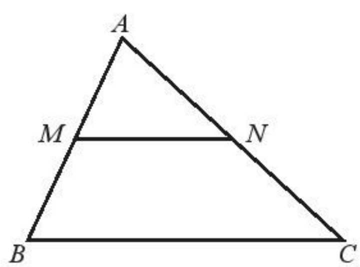
Ta quy ước $0\vec{a}=\vec{0}$ và $k\vec{0}=\vec{0}$.

Người ta còn gọi tích của một số với một vectơ là *tích của một vectơ với một số*.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC (Hình 2). Tìm trong hình các vectơ bằng:

$2\overrightarrow{MN}$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $-2\overrightarrow{CN}$.



Hình 2

Giải

Ta có: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$; $-2\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}$.

Cũng như phép nhân và phép cộng các số thực, người ta chứng minh được các phép toán trên vectơ có các tính chất sau:

Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số thực h và k, ta có:

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; $\quad (h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$; $\quad h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$;

$1.\vec{a}=\vec{a}$; $\quad (-1).\vec{a}=-\vec{a}$.

Ví dụ 2

Thực hiện các phép toán vectơ sau:

a) $5(\vec{u}+\vec{v})$; b) $(x+2)\vec{a}$; c) $-3(4\vec{e})$; d) $\vec{c}-2\vec{c}$.

Giải

a) $5(\vec{u}+\vec{v})=5\vec{u}+5\vec{v}$; b) $(x+2)\vec{a}=x\vec{a}+2\vec{a}$;

c) $-3(4\vec{e})=(-3\ .\ 4)\vec{e}=-12\vec{e}$; d) $\vec{c}-2\vec{c}=(1-2)\vec{c}=(-1)\ \vec{c}=-\vec{c}$.

Ví dụ 3

Cho đoạn thẳng AB và một điểm M tuỳ ý. Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Giải

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

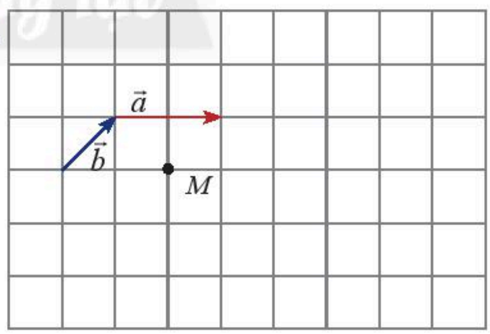
$\Leftrightarrow$ I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

1 Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và một điểm M như Hình 3.

a) Hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{MN}=3\vec{a}$, $\overrightarrow{MP}=-3\vec{b}$.

b) Cho biết mỗi ô vuông có cạnh bằng 1.

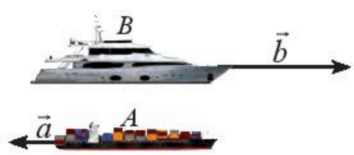
Tính: $|3\vec{b}|$, $|-3\vec{b}|$, $|2\vec{a}+2\vec{b}|$.



Hình 3

2 Cho tam giác ABC và một điểm M tuỳ ý. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Một con tàu chở hàng A đang đi về hướng tây với tốc độ 20 hải lí/giờ. Cùng lúc đó, một con tàu chở khách B đang đi về hướng đông với tốc độ 50 hải lí/giờ. Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{b}$ của tàu B theo vectơ vận tốc $\vec{a}$ của tàu A.



Hình 4

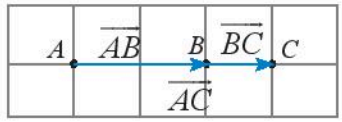
2. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và cho $\vec{c} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$. So sánh độ dài và hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Nhận xét:

Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.



Hình 5

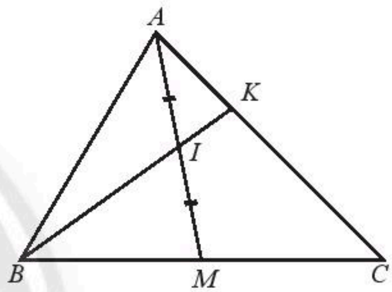
Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$.

a) Tính $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.

b) Tính $\overrightarrow{BK}$ theo $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.

c) Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.



Hình 6

Giải

a) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. (1)

b) $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. (2)

c) Ta có: (1) $\Rightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

(2) $\Rightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

nên $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$. (3)

Từ (3) ta suy ra ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Chú ý: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vectơ $\vec{c}$ luôn tồn tại duy nhất cặp số thực $(m; n)$ sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Cho tứ giác $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Cho điểm G thoả mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm I, G, J thẳng hàng.

BÀI TẬP

1. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Với M là điểm tuỳ ý, chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

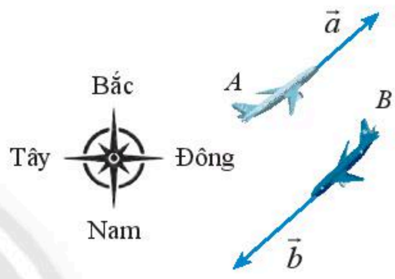
2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$; b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

3. Cho hai điểm phân biệt A và B. Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, EF. Lấy điểm M tuỳ ý, chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.

5. Máy bay A đang bay về hướng đông bắc với tốc độ 600 km/h. Cùng lúc đó, máy bay B đang bay về hướng tây nam với tốc độ 800 km/h. Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B theo vectơ vận tốc $\vec{a}$ của máy bay A.



Hình 7

6. Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Xác định điểm O sao cho $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MO}$.

7. Cho tam giác ABC.

a) Xác định các điểm M, N, P thoả mãn: $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}$.

b) Biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$.

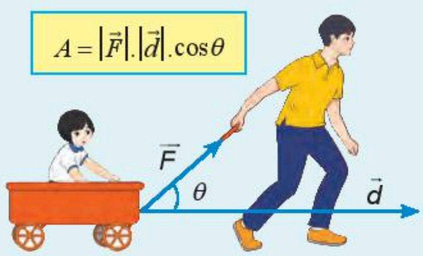
c) Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Chân trời sáng tạo

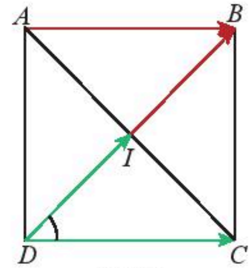
Bài 4. Tích vô hướng của hai vectơ

Từ khoá: **Góc giữa hai vectơ; Tích vô hướng của hai vectơ.**

Tác dụng một lực $\vec{F}$ vào một vật và làm cho vật đó dịch chuyển theo vectơ $\vec{d}$ thì sẽ sinh ra một công là A được tính theo công thức: $A=|\vec{F}|.|\vec{d}|.\cos\theta$, trong đó θ là góc giữa hai vectơ $\vec{F}$ và $\vec{d}$.



1. Góc giữa hai vectơ



Hình 1

Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I (Hình 1).

a) Tính $\widehat{IDC}$.

b) Tìm hai vectơ cùng có điểm đầu là D và điểm cuối lần lượt là I và C.

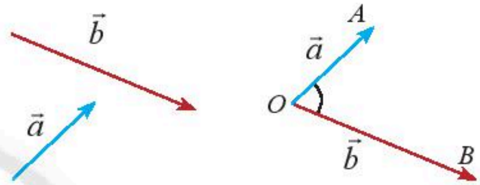
c) Tìm hai vectơ cùng có điểm đầu là D và lần lượt bằng vectơ $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là ***góc giữa hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Hình 2

Chú ý:

– Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

– Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.

– Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.

– Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tuỳ ý (từ 0° đến 180°).

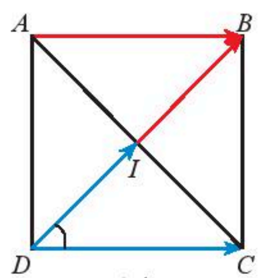
$(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$ $\qquad$ $(\vec{c}, \vec{d}) = 180°$

Hình 3

Ví dụ 1

Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các góc:

a) $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB}\right)$; b) $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI}\right)$; c) $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB}\right)$; d) $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}\right)$.



Hình 4

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, suy ra $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DC}\right) = \widehat{IDC} = 45°$.

b) Ta có: $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$, suy ra $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI}\right) = \left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right) = \widehat{BIC} = 90^\circ$.

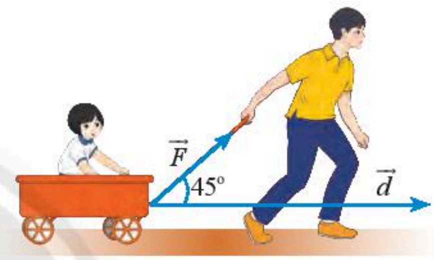
c) Do hai vectơ $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{DB}$ cùng hướng nên ta có $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB}\right) = 0^\circ$.

d) Do hai vectơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IC}$ ngược hướng nên ta có $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}\right) = 180^\circ$.

1 Cho tam giác đều ABC có H là trung điểm của cạnh BC. Tìm các góc: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$, $\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}\right)$, $\left(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}\right)$, $\left(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{BC}\right)$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

2 Một người dùng một lực $\overrightarrow{F}$ có cường độ 10 N kéo một chiếc xe đi quãng đường dài 100 m. Tính công sinh bởi lực $\overrightarrow{F}$, biết rằng góc giữa vectơ $\overrightarrow{F}$ và hướng di chuyển là 45°. (*Công A (đơn vị: J) bằng tích của ba đại lượng: cường độ của lực $\overrightarrow{F}$, độ dài quãng đường và côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{F}$ và độ dịch chuyển $\overrightarrow{d}$*).



Hình 5

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Chú ý:

a) Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

b) Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

c) Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là *bình phương vô hướng* của vectơ $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

Ví dụ 2

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4 và có đường cao AH. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$.

Giải

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4.4.\cos 60^\circ = 16.\frac{1}{2} = 8$;

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 4.4.\cos 120^\circ = 16.\left(-\frac{1}{2}\right) = -8$;

c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AH}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{AH}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos 90^\circ = 0$.

Chú ý: Trong Vật lí, tích vô hướng của $\vec{F}$ và $\vec{d}$ biểu diễn công A sinh bởi lực $\vec{F}$ khi thực hiện độ dịch chuyển $\vec{d}$. Ta có công thức: $A = \vec{F}.\vec{d}$.

2 Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$.
Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

3 Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài lần lượt là 3 và 8 và có tích vô hướng là $12\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

1 Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 20 N kéo một vật dịch chuyển một đoạn 50 m cùng hướng với $\vec{F}$. Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$.

3. Tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k, ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$; $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$; $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$.

Ví dụ 3

Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, chứng minh rằng: $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$.

Giải

Ta có: $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$
$= \vec{a}^2 + \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$.

Vậy $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$.

Nhận xét: Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$; $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC. Tính cạnh AB theo hai cạnh còn lại và góc C.

Giải

Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2 = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CA}^2 - 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = CB^2 + CA^2 - 2CB.CA.\cos C$

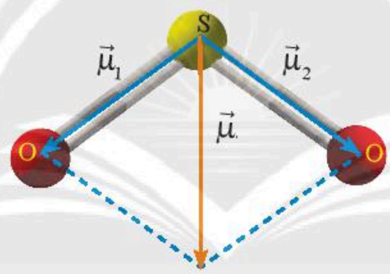
hay $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos C$.

4 Cho hai vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ vuông góc, cùng có độ dài bằng 1.

a) Tính: $(\vec{i} + \vec{j})^2$; $(\vec{i} - \vec{j})^2$; $(\vec{i} + \vec{j}).(\vec{i} - \vec{j})$.

b) Cho $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ và tính góc $(\vec{a}, \vec{b})$.

2 Phân tử sulfur dioxide (SO_2) có cấu tạo hình chữ V, góc liên kết $\widehat{OSO}$ gần bằng 120°. Người ta biểu diễn sự phân cực giữa nguyên tử S với mỗi nguyên tử O bằng các vectơ $\vec{\mu}_1$ và $\vec{\mu}_2$ có cùng phương với liên kết cộng hoá trị, có chiều từ nguyên tử S về mỗi nguyên tử O và cùng có độ dài là 1,6 đơn vị (Hình 6). Cho biết vectơ tổng $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$ được dùng để biểu diễn sự phân cực của cả phân tử SO_2. Tính độ dài của $\vec{\mu}$.



Hình 6

BÀI TẬP

1. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và cho $AD = a$, $AB = 2a$. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$; b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

3. Cho ba điểm O, A, B thẳng hàng và $OA = a$, $OB = b$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ trong hai trường hợp:

a) Điểm O nằm ngoài đoạn thẳng AB; b) Điểm O nằm trong đoạn thẳng AB.

4. Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm và cho điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng:

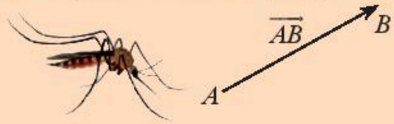
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - OA^2$.

5. Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60°. Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$.

6. Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 3 và 4 và có tích vô hướng là –6. Tính góc giữa hai vectơ đó.

Bạn có biết?

Tại sao muỗi và một số virus được gọi là những vectơ?



Ta đã biết vectơ $\overrightarrow{AB}$ có hướng từ A đến B. Trong Sinh học, vectơ dùng để chỉ sinh vật truyền bệnh từ đối tượng A sang đối tượng B. Ví dụ muỗi là một vectơ của bệnh sốt xuất huyết.

Vacxin vectơ sử dụng virus hoặc vi khuẩn đã được làm giảm độc lực để đưa DNA vào trong tế bào cơ thể người. Từ "vectơ" là để ám chỉ các virus hoặc vi khuẩn đóng vai trò vật chủ.

Trong tự nhiên, các virus bám vào tế bào và đưa vật chất di truyền của chúng vào trong tế bào. Trong phòng thí nghiệm, các nhà khoa học đã "lợi dụng" quá trình này để bào chế vacxin. Cụ thể, các nhà khoa học đã tìm ra cách chèn thêm đoạn vật chất di truyền của vi sinh vật khác vào đoạn gen của virus vô hại. Sau đó, virus sẽ mang DNA tới các tế bào trong cơ thể.

Vacxin vectơ tái tổ hợp mô phỏng quá trình nhiễm trùng tự nhiên, do đó có khả năng kích thích hệ miễn dịch rất hiệu quả.

(*Nguồn:* https://en.wikipedia.org/wiki/Viral_vector)

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

1. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

b) Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo và $AB = a$, $BC = 3a$.

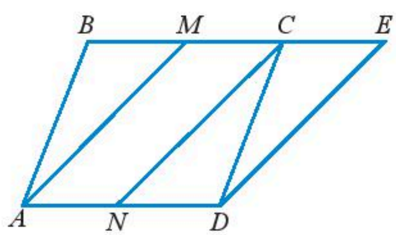
a) Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$.

b) Tìm trong hình các cặp vectơ đối nhau và có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

3. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và có góc A bằng 60°. Tìm độ dài các vectơ sau:

$\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

4. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Vẽ điểm E sao cho $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AN}$ (Hình 1).



Hình 1

a) Tìm tổng của các vectơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$.

b) Tìm các vectơ hiệu:

$\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ME}$.

c) Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

5. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ khác vectơ $\vec{0}$. Trong trường hợp nào thì đẳng thức sau đúng?

a) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$;

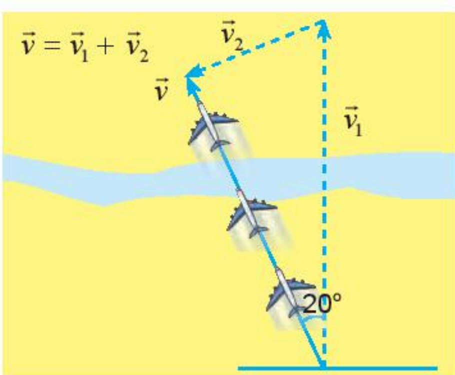
b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

6. Cho $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=0$. So sánh độ dài, phương và hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

7. Cho bốn điểm *A*, *B*, *C*, *D*. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng *AD* và *BC* trùng nhau.

8. Cho tam giác *ABC*. Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành *ABIJ*, *BCPQ*, *CARS*. Chứng minh rằng $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.

9. Một chiếc máy bay được biết là đang bay về phía bắc với tốc độ 45 m/s, mặc dù vận tốc của nó so với mặt đất là 38 m/s theo hướng nghiêng một góc 20° về phía tây bắc (Hình 2). Tính tốc độ của gió.

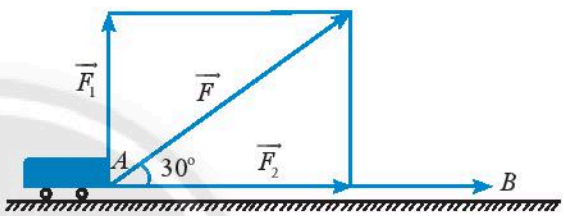


Hình 2

10. Cho tam giác đều *ABC* có *O* là trọng tâm và *M* là một điểm tuỳ ý trong tam giác. Gọi *D*, *E*, *F* lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ *M* đến *BC*, *AC*, *AB*. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

11. Một xe goòng được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 50 N, di chuyển theo quãng đường từ *A* đến *B* có chiều dài 200 m. Cho biết góc giữa $\vec{F}$ và $\overrightarrow{AB}$ là 30° và $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (Hình 3). Tính công sinh bởi các lực $\vec{F}$, $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$.



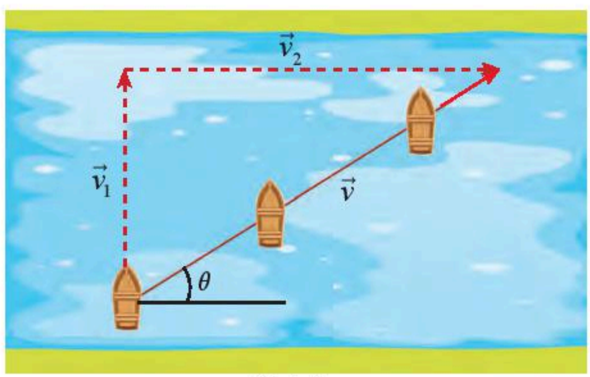
Hình 3

12. Một chiếc thuyền cố gắng đi thẳng qua một con sông với tốc độ 0,75 m/s. Tuy nhiên, dòng chảy của nước trên con sông đó chảy với tốc độ 1,20 m/s về hướng bên phải. Gọi $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}$ lần lượt là vận tốc của thuyền so với dòng nước, vận tốc của dòng nước so với bờ và vận tốc của thuyền so với bờ.

a) Tính độ dài của các vectơ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}$.

b) Tốc độ dịch chuyển của thuyền so với bờ là bao nhiêu?

c) Hướng di chuyển của thuyền lệch một góc bao nhiêu so với bờ?

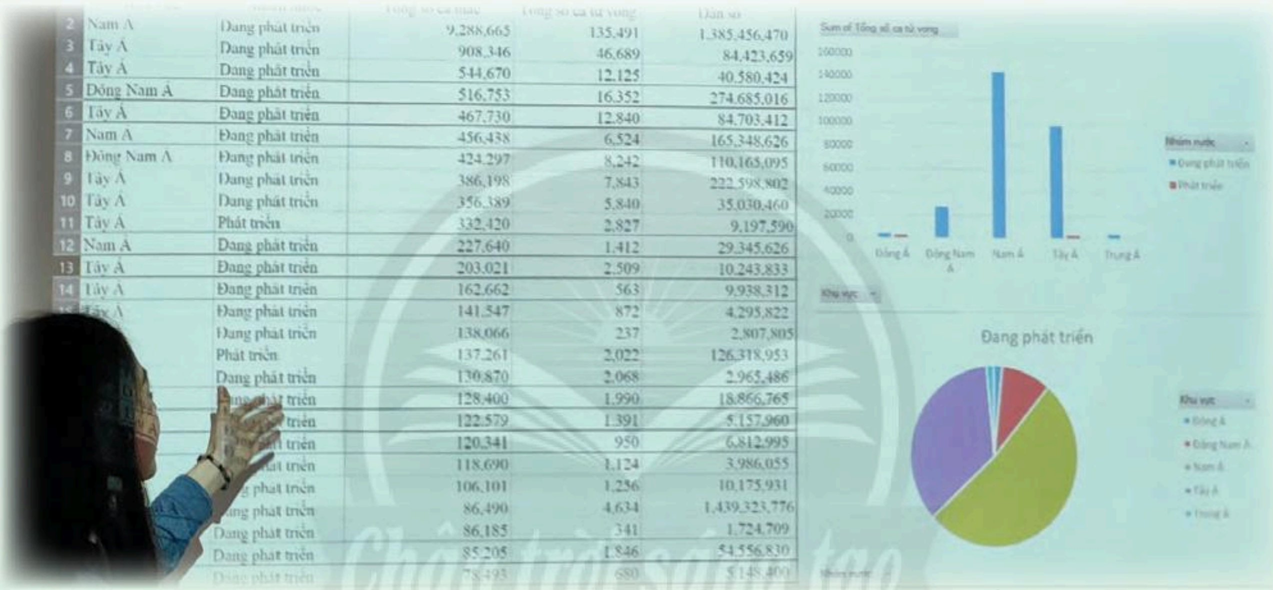


Hình 4

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương VI THỐNG KÊ

Các số đặc trưng cung cấp thông tin quan trọng, hữu ích về mẫu số liệu. Nội dung chính của chương này là giới thiệu ý nghĩa, cách tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và mức độ phân tán của một mẫu số liệu. Ta cũng sẽ tìm hiểu về số gần đúng, sai số và một số phương pháp phát hiện dữ liệu không chính xác.



Ảnh: Hoàng Long
Nguồn: http://www.csis.org

Chân trời sáng tạo

Học xong chương này, bạn có thể:

– Hiểu được khái niệm số gần đúng. Tính được sai số tuyệt đối, sai số tương đối.
– Xác định được số gần đúng của một số và xác định được số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước.
– Phát hiện và lí giải được số liệu không chính xác dựa trên mối liên hệ toán học đơn giản giữa các số liệu đã được biểu diễn trong nhiều ví dụ.
– Tính được số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu: số trung bình cộng (hay số trung bình), trung vị, tứ phân vị và mốt.
– Tính được số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu: khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn.
– Giải thích được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn và chỉ ra được những kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản.

Bài 1. Số gần đúng và sai số

Từ khoá: Số gần đúng; Sai số tuyệt đối; Sai số tương đối; Độ chính xác; Số quy tròn.

Số π đóng vai trò quan trọng trong thực tế cuộc sống cũng như trong khoa học kĩ thuật. Nó là một số vô tỉ nên không thể viết chính xác giá trị của nó bằng số thập phân. Trong các tính toán liên quan đến π, tuỳ vào độ chính xác đặt ra mà người ta sử dụng số quy tròn của π đến hai hay nhiều chữ số hơn ở hàng thập phân. Các số quy tròn này là các số gần đúng của π. Trong bài này chúng ta sẽ học cách tính sai số tuyệt đối, sai số tương đối và xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước.

1. Số gần đúng

1 Hãy đo chiều dài của bàn học bạn đang sử dụng.

Trong thực tế cuộc sống cũng như trong khoa học kĩ thuật, có nhiều đại lượng mà ta không thể xác định được giá trị chính xác. Ví dụ như chiều cao của một cây dừa hay tốc độ của một chiếc máy bay tại thời điểm nào đó. Mỗi dụng cụ hay phương pháp đo khác nhau có thể sẽ cho ra các kết quả khác nhau. Vì vậy kết quả thu được thường chỉ là những *số gần đúng*.

Hình 1

1 Trong trích đoạn một báo cáo tài chính dưới đây, theo bạn, số nào là số đúng, số nào là số gần đúng?

Trong tháng 01/2021 có 47 dự án được cấp phép mới với số vốn đăng kí đạt gần 1,3 tỉ USD, giảm khoảng 81,8% về số dự án và 70,3% về số vốn đăng kí so với cùng kì năm trước; 46 lượt dự án đã cấp phép từ các năm trước đăng kí điều chỉnh vốn đầu tư với số vốn tăng thêm trên 0,5 tỉ USD, tăng gần 41,4%.

(Nguồn: tapchitaichinh.vn)

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Sai số tuyệt đối

2 Vinh và Hoa đo chiều dài trang bìa của một quyển sổ (Hình 2). Vinh đọc kết quả là 21 cm. Hoa đọc kết quả là 20,7 cm. Kết quả của bạn nào có sai số nhỏ hơn?

Hình 2

Nếu a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = \left|\overline{a} - a\right|$ được gọi là ***sai số tuyệt đối*** của số gần đúng a.

Trên thực tế ta thường không biết số đúng $\overline{a}$ nên không thể tính được chính xác Δ_a. Thay vào đó, ta thường tìm cách khống chế sai số tuyệt đối Δ_a không vượt quá mức $d > 0$ cho trước, tức là

$$\Delta_a = \left|\overline{a} - a\right| \le d \text{ hay } a - d \le \overline{a} \le a + d.$$

Khi đó, ta nói a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ với ***độ chính xác** d* và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

Ví dụ 1

An tính diện tích của hình tròn bán kính $r = 4$ cm bằng công thức $S = 3{,}145 \,.\, 4^2 = 50{,}32$ (cm²). Biết rằng $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, hãy ước lượng độ chính xác của S.

Giải

Diện tích đúng, kí hiệu là $\overline{S}$, của hình tròn trên thoả mãn

$$3{,}14 \,.\, 4^2 < \overline{S} < 3{,}15 \,.\, 4^2 \text{ hay } 50{,}24 < \overline{S} < 50{,}4.$$

Do đó $50{,}24 - 50{,}32 < \overline{S} - S < 50{,}4 - 50{,}32$, tức là $\left|\overline{S} - S\right| < 0{,}08$.

Vậy kết quả của An có độ chính xác là 0,08. Nói cách khác, diện tích của hình tròn là $50{,}32 \pm 0{,}08$ (cm²).

2 Cho biết $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Hãy tính độ dài đường chéo của một hình vuông có cạnh bằng 10 cm và xác định độ chính xác của kết quả tìm được.

1 Một tấm bìa có dạng hình chữ nhật với kích thước được in như trong Hình 3.

a) Hãy cho biết kích thước chiều dài và chiều rộng của tấm bìa nằm trong khoảng nào.

b) Tính diện tích của tấm bìa.

Kích thước: 170×240 ($\pm$ 2mm)
Định lượng: 100g/m² (M)
Độ trắng: 80 – 82% ISO

Hình 3

Sai số tương đối

3 Vào năm 2015, các nhà khoa học trên thế giới ước lượng độ tuổi của vũ trụ là $13\,799 \pm 21$ triệu năm.

Trọng tài bấm thời gian chạy 100 m của một vận động viên là $10{,}3 \pm 0{,}1$ giây.

Theo bạn, trong hai phép đo trên, phép đo nào có độ chính xác cao hơn?

Hình 4

Nếu so sánh sai số tuyệt đối, ta thấy phép đo của trọng tài chính xác hơn của các nhà khoa học. Tuy nhiên, 21 triệu năm là độ chính xác của phép đo một khoảng thời gian dài 13 799 triệu năm, còn 0,1 giây là độ chính xác của phép đo một khoảng thời gian 10,3 giây. So sánh hai tỉ số

$$\frac{21}{13799} = 0{,}0015\ldots \text{ và } \frac{0{,}1}{10{,}3} = 0{,}0097\ldots$$

ta thấy phép đo của các nhà khoa học có tỉ số giữa độ chính xác và số gần đúng nhỏ hơn.

Để đánh giá sự chính xác của số gần đúng, ngoài sai số tuyệt đối, người ta còn xét sai số tương đối được xác định như sau:

Sai số tương đối của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a, là tỉ số giữa sai số tuyệt đối Δ_a và $|a|$, tức là $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.

Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \leq d$. Do đó $\delta_a \leq \dfrac{d}{|a|}$. Nếu δ_a hay $\dfrac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán càng cao.

Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

Chẳng hạn, trong phép tính diện tích hình tròn ở Ví dụ 1, sai số tương đối không vượt quá

$$\frac{0,08}{50,32} \approx 0,16\%.$$

3 Hãy ước lượng sai số tương đối trong phép đo tuổi của vũ trụ và thời gian chạy của vận động viên ở 3.

3. Số quy tròn

Quy tắc làm tròn số

Trong chương trình Trung học cơ sở, ta đã biết quy tắc làm tròn số đến một hàng nào đó (gọi là hàng quy tròn) như sau:

- Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.
- Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng quy tròn.

Ví dụ 2

Hãy quy tròn số $\overline{a} = \dfrac{4}{3} = 1,3333...$ đến hàng phần trăm và ước lượng sai số tương đối.

Giải

Quy tròn số $\overline{a} = \dfrac{4}{3} = 1,3333...$ đến hàng phần trăm, ta được số gần đúng là $a = 1,33$. Do $a < \overline{a} < 1,335$ nên sai số tuyệt đối là

$$\Delta_a = |\overline{a} - a| < 0,005.$$

Sai số tương đối là $\delta_a \leq \dfrac{0,005}{1,33} \approx 0,4\%$.

Chú ý:

a) Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Ta có thể nói độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

b) Khi quy tròn số đúng $\overline{a}$ đến một hàng nào đó thì ta nói số gần đúng a nhận được là chính xác đến hàng đó. Ví dụ số gần đúng của π chính xác đến hàng phần trăm là 3,14.

4 Hãy quy tròn số $\overline{b} = 5\,496$ đến hàng chục và ước lượng sai số tương đối.

Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước

Các bước xác định ***số quy tròn*** của số gần đúng a với độ chính xác d cho trước:

Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.

Bước 2: Quy tròn số a ở hàng gấp 10 lần hàng tìm được ở Bước 1.

Ví dụ 3

a) Cho số gần đúng $a = 1\,903$ với độ chính xác $d = 50$. Hãy viết số quy tròn của số a.

b) Hãy viết số quy tròn của số gần đúng b biết $\overline{b} = 0{,}1891 \pm 0{,}005$.

Giải

a) Hàng lớn nhất của độ chính xác $d = 50$ là hàng chục, nên ta quy tròn a đến hàng trăm. Vậy số quy tròn của a là $1\,900$.

b) Hàng lớn nhất của độ chính xác $d = 0{,}005$ là hàng phần nghìn, nên ta quy tròn b đến hàng phần trăm. Vậy số quy tròn của b là $0{,}19$.

5 Hãy viết số quy tròn của số gần đúng trong những trường hợp sau:

a) $318\,081 \pm 2\,000$; b) $18{,}0113 \pm 0{,}003$.

Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước

Để tìm số gần đúng a của số đúng $\overline{a}$ với độ chính xác d, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.

Bước 2: Quy tròn $\overline{a}$ đến hàng tìm được ở trên.

Ví dụ 4

a) Cho $\overline{a} = \frac{12}{7} = 1{,}71428571\ldots$. Hãy xác định số gần đúng của $\overline{a}$ với độ chính xác $d = 0{,}002$.

b) Cho $\overline{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}61803398\ldots$. Hãy xác định số gần đúng của $\overline{b}$ với độ chính xác $d = 0{,}0005$.

Giải

a) Hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của $d = 0{,}002$ là hàng phần nghìn. Quy tròn $\overline{a}$ đến hàng phần nghìn ta được số gần đúng của $\overline{a}$ là $a = 1{,}714$.

b) Hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của $d = 0{,}0005$ là hàng phần chục nghìn. Quy tròn $\overline{b}$ đến hàng phần chục nghìn ta được số gần đúng của $\overline{b}$ là $b = -0{,}6180$.

6 Hãy xác định số gần đúng của các số sau với độ chính xác $d = 0{,}0001$.

a) $\overline{a} = \frac{20}{11} = 1{,}8181818\ldots$; b) $\overline{b} = 1 - \sqrt{7} = -1{,}6457513\ldots$

BÀI TẬP

1. Ở Babylon, một tấm đất sét có niên đại khoảng 1900 – 1600 trước Công nguyên đã ghi lại một phát biểu hình học, trong đó ám chỉ ước lượng số π bằng $\frac{25}{8} = 3{,}1250$. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối và sai số tương đối của giá trị gần đúng này, biết $3{,}141 < \pi < 3{,}142$.

2. Cho số gần đúng $a = 6\,547$ với độ chính xác $d = 100$.
Hãy viết số quy tròn của số a và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

3. Cho biết $\sqrt{3} = 1,7320508...$.

a) Hãy quy tròn $\sqrt{3}$ đến hàng phần trăm và ước lượng sai số tương đối.

b) Hãy tìm số gần đúng của $\sqrt{3}$ với độ chính xác 0,003.

c) Hãy tìm số gần đúng của $\sqrt{3}$ với độ chính xác đến hàng phần chục nghìn.

4. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng trong những trường hợp sau:

a) $4\,536\,002 \pm 1000$; b) $10{,}05043 \pm 0{,}002$.

5. Một tam giác có ba cạnh đo được như sau: $a = 5{,}4$ cm $\pm$ 0,2 cm; $b = 7{,}2$ cm $\pm$ 0,2 cm và $c = 9{,}7$ cm $\pm$ 0,1 cm. Tính chu vi của tam giác đó.

6. Chiếc kim màu đỏ chỉ cân nặng của bác Phúc (Hình 5). Hãy viết cân nặng của bác Phúc dưới dạng số gần đúng với độ chính xác 0,5 kg.

Hình 5

Bài 2. Mô tả và biểu diễn dữ liệu trên các bảng và biểu đồ

Từ khoá: Bảng số liệu; Biểu đồ cột; Biểu đồ quạt.

Biểu diễn dữ liệu trên các bảng và biểu đồ cho ta cái nhìn trực quan về dữ liệu, từ đó có thể tiến hành các thao tác đối chiếu, so sánh hay phát hiện ra những điểm không hợp lí trong mẫu số liệu.

1. Bảng số liệu

Dựa vào các thông tin đã biết và sử dụng mối liên hệ toán học giữa các số liệu, ta có thể phát hiện ra được số liệu không chính xác trong một số trường hợp.

Ví dụ 1

Trong 6 tháng đầu năm, số sản phẩm bán ra mỗi tháng của một cửa hàng đều tăng khoảng 20% so với tháng trước đó. Biết rằng, trong bảng dưới đây, số sản phẩm bán ra của một tháng bị nhập sai. Hãy tìm tháng đó.

Tháng	1	2	3	4	5	6
Số sản phẩm bán ra	145	175	211	256	340	371

Giải

Tỉ lệ phần trăm tăng thêm của số sản phẩm bán ra mỗi tháng được tính ở bảng dưới đây:

Tháng	2	3	4	5	6
Tỉ lệ phần trăm tăng thêm so với tháng trước	20,7%	20,6%	21,3%	32,8%	9,1%

Ta thấy tỉ lệ tăng của tháng 5 và tháng 6 đều khác xa 20%. Do đó trong bảng số liệu đã cho, số sản phẩm của tháng 5 là không chính xác.

Ví dụ 2

Một đội 20 thợ thủ công được chia đều vào 5 tổ. Trong một ngày, mỗi người thợ làm được 4 hoặc 5 sản phẩm. Cuối ngày, đội trưởng thống kê lại số sản phẩm mà mỗi tổ làm được ở bảng sau:

Tổ	1	2	3	4	5
Số sản phẩm	17	19	19	21	20

Đội trưởng đã thống kê đúng chưa? Tại sao?

Giải

Mỗi tổ có 20 : 5 = 4 người. Trong một ngày, mỗi người thợ làm được 4 hoặc 5 sản phẩm nên mỗi tổ làm được từ 16 đến 20 sản phẩm. Do đó, bảng trên ghi Tổ 4 làm được 21 sản phẩm là không chính xác.

Vậy đội trưởng thống kê chưa đúng.

2. Biểu đồ

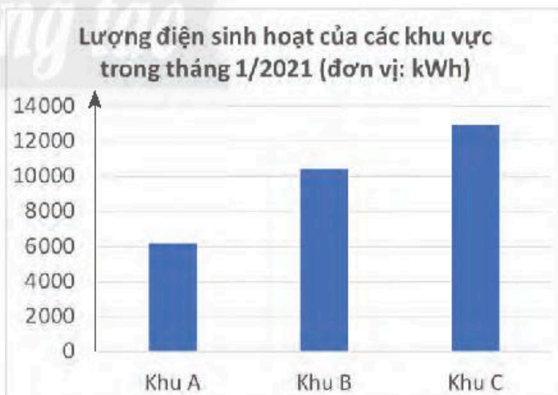
Ví dụ 3

Lượng điện sinh hoạt trong tháng 1/2021 của các hộ gia đình thuộc Khu A (60 hộ), Khu B (100 hộ) và Khu C (120 hộ) được biểu diễn ở biểu đồ bên.

Hãy cho biết các phát biểu sau là đúng hay sai:

a) Mỗi khu đều tiêu thụ trên 6 000 kWh.

b) Trung bình mỗi hộ ở Khu C sử dụng số điện gấp hai lần mỗi hộ ở Khu A.



Giải

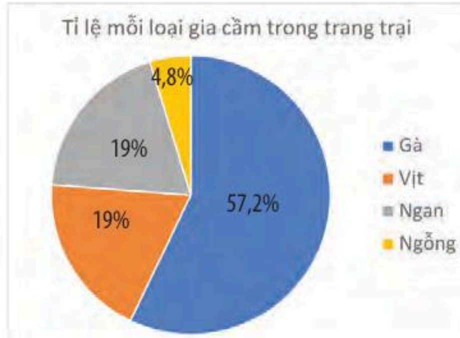
Nhìn vào biểu đồ ta thấy mỗi khu đều tiêu thụ trên 6 000 kWh nên khẳng định ở câu a) là đúng.

Mặc dù lượng điện tiêu thụ ở Khu C gần gấp hai lần lượng điện tiêu thụ ở Khu A nhưng số hộ ở Khu C lại gấp hai lần số hộ Khu A. Do đó khẳng định ở câu b) là sai.

Ví dụ 4

Bình vẽ biểu đồ biểu thị tỉ lệ số lượng mỗi loại gia cầm trong một trang trại theo bảng thống kê dưới đây:

Loại gia cầm	Số con
Gà	120
Ngan	40
Ngỗng	40
Vịt	10



Bạn hãy cho biết biểu đồ Bình vẽ đã chính xác chưa. Nếu chưa thì cần điều chỉnh lại như thế nào cho đúng?

Giải

Theo bảng thống kê thì số ngan và ngỗng bằng nhau nên trên biểu đồ quạt, hình quạt biểu diễn tỉ lệ ngan và ngỗng phải bằng nhau. Do đó biểu đồ Bình vẽ chưa chính xác.

Nếu ở phần chú giải, Bình đổi chỗ "Vịt" và "Ngỗng" thì sẽ được biểu đồ chính xác.

BÀI TẬP

1. Bảng sau thống kê số lớp và số học sinh theo từng khối ở một trường Trung học phổ thông.

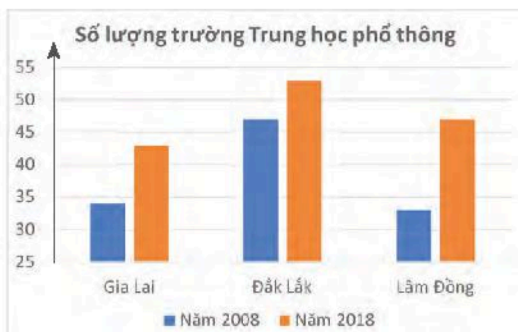
Khối	10	11	12
Số lớp	9	8	8
Số học sinh	396	370	345

Hiệu trưởng trường đó cho biết sĩ số mỗi lớp trong trường đều không vượt quá 45 học sinh. Biết rằng trong bảng trên có một khối lớp bị thống kê sai, hãy tìm khối lớp đó.

2. Số lượng trường Trung học phổ thông (THPT) của các tỉnh Gia Lai, Đắk Lắk và Lâm Đồng trong hai năm 2008 và 2018 được cho ở biểu đồ bên. Hãy cho biết các phát biểu sau là đúng hay sai:

a) Số lượng trường THPT của các tỉnh năm 2018 đều tăng so với năm 2008.

b) Ở Gia Lai, số trường THPT năm 2018 tăng gần gấp đôi so với năm 2008.

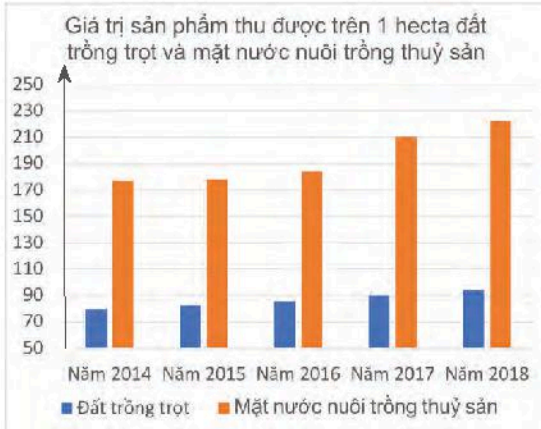


(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

3. Biểu đồ bên thể hiện giá trị sản phẩm (đơn vị: triệu đồng) trung bình thu được trên một hecta đất trồng trọt và mặt nước nuôi trồng thuỷ sản trên cả nước từ năm 2014 đến năm 2018. Hãy cho biết các phát biểu sau là đúng hay sai:

a) Giá trị sản phẩm trung bình thu được trên một hecta mặt nước nuôi trồng thuỷ sản cao hơn trên một hecta đất trồng trọt.

b) Giá trị sản phẩm thu được trên cả đất trồng trọt và mặt nước nuôi trồng thuỷ sản đều có xu hướng tăng từ năm 2014 đến năm 2018.



(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

c) Giá trị sản phẩm trung bình thu được trên một hecta mặt nước nuôi trồng thuỷ sản cao gấp khoảng 3 lần trên một hecta đất trồng trọt.

Bài 3. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu

Từ khoá: Số trung bình cộng; Trung vị; Tứ phân vị; Mốt.

Sau khi đã thu thập dữ liệu về lượng nước sinh hoạt trong một tháng của từng hộ gia đình ở hai khu vực dân cư, bác Vinh muốn đánh giá xem hộ gia đình ở khu vực nào dùng hết nhiều nước sinh hoạt hơn.

Theo bạn, bác Vinh nên làm thế nào?

1. Số trung bình

1 Điểm số bài kiểm tra môn Toán của các bạn trong Tổ 1 là 6; 10; 6; 8; 7; 10, còn của các bạn Tổ 2 là 10; 6; 9; 9; 8; 9. Theo em, tổ nào có kết quả kiểm tra tốt hơn? Tại sao?

• Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Số trung bình (hay ***số trung bình cộng***) của mẫu số liệu này, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính bởi công thức

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

• Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Khi đó, công thức tính số trung bình trở thành

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n}$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Ta gọi n là ***cỡ mẫu***.

Chú ý: Nếu kí hiệu $f_k = \frac{n_k}{n}$ là tần số tương đối (hay còn gọi là tần suất) của x_k trong mẫu số liệu thì số trung bình còn có thể biểu diễn là: $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k$.

Ví dụ 1

Một cửa hàng bán xe đạp thống kê số xe bán được hằng tháng trong năm 2021 ở bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số xe	10	8	7	5	8	22	28	25	20	10	9	7

a) Hãy tính số xe trung bình cửa hàng bán được mỗi tháng trong năm 2021.

b) Hãy so sánh hiệu quả kinh doanh trong quý III của cửa hàng với 6 tháng đầu năm 2021.

Giải

a) Số xe trung bình cửa hàng bán được mỗi tháng trong năm 2021 là:

$$\frac{1}{12}(10 + 8 + 7 + 5 + 8 + 22 + 28 + 25 + 20 + 10 + 9 + 7) = 13,25 \text{ (xe)}.$$

b) Số xe trung bình bán được trong 6 tháng đầu năm là:

$$\frac{1}{6}(10 + 8 + 7 + 5 + 8 + 22) = 10 \text{ (xe)}.$$

Số xe trung bình bán được trong quý III của năm là:

$$\frac{1}{3}(28 + 25 + 20) = \frac{73}{3} \approx 24,33 \text{ (xe)}.$$

Như vậy hiệu quả kinh doanh của cửa hàng trong quý III cao hơn trong 6 tháng đầu năm.

Ý nghĩa của số trung bình

Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu. Nó là một số đo xu thế trung tâm của mẫu đó.

Ví dụ như trong 1, vì điểm trung bình của các bạn Tổ 1 là 7,83 và của các bạn Tổ 2 là 8,5 nên ta có thể cho rằng nói chung các bạn Tổ 2 học Toán tốt hơn các bạn Tổ 1.

Chân trời sáng tạo

1 Thời gian chạy 100 mét (đơn vị: giây) của các bạn học sinh ở hai nhóm A và B được ghi lại ở bảng sau:

Nhóm A	12,2	13,5	12,7	13,1	12,5	12,9	13,2	12,8
Nhóm B	12,1	13,4	13,2	12,9	13,7			

Nhóm nào có thành tích chạy tốt hơn?

2 Số bàn thắng mà một đội bóng ghi được ở mỗi trận đấu trong một mùa giải được thống kê lại ở bảng sau:

Số bàn thắng	0	1	2	3	4	6
Số trận	5	10	5	3	2	1

Hãy xác định số bàn thắng trung bình đội đó ghi được trong một trận đấu của mùa giải.

2. Trung vị và tứ phân vị

2 Bảng sau thống kê số sách mỗi bạn học sinh Tổ 1 và Tổ 2 đã đọc ở thư viện trường trong một tháng:

Tổ 1	3	1	2	1	2	2	3	25	1
Tổ 2	4	5	4	3	3	4	5	4	

a) Trung bình mỗi bạn Tổ 1 và mỗi bạn Tổ 2 đọc bao nhiêu quyển sách ở thư viện trường trong tháng đó?

b) Em hãy thảo luận với các bạn trong nhóm xem tổ nào chăm đọc sách ở thư viện hơn.

Trong tình huống ở 2, ta thấy việc sử dụng số trung bình để so sánh độ chăm đọc sách thư viện của hai tổ là không phù hợp. Điều này là do Tổ 1 có một số liệu quá lớn so với các số liệu còn lại. Trong tình huống như vậy, để so sánh độ chăm đọc sách giữa hai tổ, người ta thường dùng một số đặc trưng khác của mẫu số liệu, gọi là ***trung vị***, được định nghĩa như sau:

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được:

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n.$$

Trung vị của mẫu, kí hiệu là M_e, là giá trị ở chính giữa dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cụ thể:

- Nếu $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, thì trung vị của mẫu $M_e = x_{k+1}$.
- Nếu $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, thì trung vị của mẫu $M_e = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$.

Ý nghĩa của trung vị

Trung vị được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu. Trung vị là giá trị nằm ở chính giữa của mẫu số liệu theo nghĩa: luôn có ít nhất 50% số liệu trong mẫu lớn hơn hoặc bằng trung vị và ít nhất 50% số liệu trong mẫu nhỏ hơn hoặc bằng trung vị. Khi trong mẫu xuất hiện thêm một giá trị rất lớn hoặc rất nhỏ thì số trung bình sẽ bị thay đổi đáng kể nhưng trung vị thì ít thay đổi.

Ví dụ 2

a) Tính các trung vị của số sách các bạn ở Tổ 1 và số sách các bạn ở Tổ 2 đã đọc trong 2.

b) Sử dụng trung vị, hãy so sánh xem các bạn ở tổ nào đọc nhiều sách ở thư viện hơn.

Giải

a) Sắp xếp số sách mỗi bạn Tổ 1 đã đọc theo thứ tự không giảm, ta được dãy:

$$1;\ 1;\ 1;\ 2;\ 2;\ 2;\ 3;\ 3;\ 25.$$

Vì cỡ mẫu bằng 9 nên trung vị của Tổ 1 là số liệu thứ 5 của dãy trên, tức là $M_e = 2$.

Sắp xếp số sách mỗi bạn Tổ 2 đã đọc theo thứ tự không giảm, ta được dãy:

$$3;\ 3;\ 4;\ 4;\ 4;\ 4;\ 5;\ 5.$$

Vì cỡ mẫu bằng 8 nên trung vị của Tổ 2 là trung bình cộng của số liệu thứ 4 và thứ 5 của dãy trên, tức là $M_e = \frac{1}{2}(4+4) = 4$.

b) Nếu so sánh theo trung vị thì các bạn Tổ 2 đọc nhiều sách ở thư viện hơn các bạn Tổ 1.

Ví dụ 3

Khi kiểm tra ngẫu nhiên một số công nhân trong một xí nghiệp, người ta thống kê lại độ tuổi của họ ở bảng sau:

Tuổi	25	26	27	29	31	34
Số công nhân	4	9	8	3	1	1

Tìm trung vị và trung bình cộng của mẫu số liệu trên.

Giải

Cỡ mẫu là $n = 26$. Khi sắp xếp độ tuổi các công nhân theo thứ tự không giảm thì số liệu thứ 13 và 14 lần lượt là 26 và 27. Vậy

$$M_e = \frac{1}{2}(26+27) = 26{,}5.$$

Số trung bình cộng của mẫu là

$$\overline{x} = \frac{1}{26}(25.4 + 26.9 + 27.8 + 29.3 + 31 + 34) = 27.$$

1 Hãy tìm trung vị của các số liệu ở 1 và 2.

3 Cân nặng của 20 vận động viên môn vật của một câu lạc bộ được ghi lại ở bảng sau:

50	56	57	62	58	52	66	61	54	61
64	69	52	65	58	68	67	56	59	54

Để thuận tiện cho việc luyện tập, ban huấn luyện muốn xếp 20 vận động viên trên thành 4 nhóm, mỗi nhóm gồm 25% số vận động viên có cân nặng gần nhau. Bạn hãy giúp ban huấn luyện xác định các ngưỡng cân nặng để phân nhóm mỗi vận động viên.

Trung vị chia mẫu thành hai phần. Trong thực tế người ta cũng quan tâm đến trung vị của mỗi phần đó. Ba trung vị này được gọi là ***tứ phân vị*** của mẫu.

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được:

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n.$$

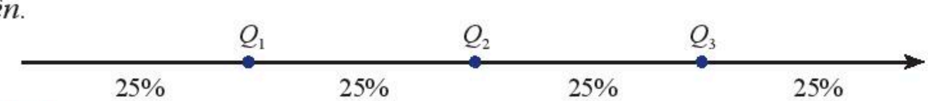
Tứ phân vị của một mẫu số liệu gồm ba giá trị, gọi là ***tứ phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba*** (lần lượt kí hiệu là Q_1, Q_2, Q_3). Ba giá trị này chia tập hợp dữ liệu đã sắp xếp thành bốn phần đều nhau. Cụ thể:

- Giá trị tứ phân vị thứ hai, Q_2, chính là số trung vị của mẫu.
- Giá trị tứ phân vị thứ nhất, Q_1, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).
- Giá trị tứ phân vị thứ ba, Q_3, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

Ý nghĩa của tứ phân vị

Các điểm tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã xắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần chứa khoảng 25% tổng số số liệu đã thu thập được.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 còn được gọi là tứ phân vị dưới và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía dưới. Tứ phân vị thứ ba Q_3 còn được gọi là tứ phân vị trên và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía trên.



Ví dụ 4

Tìm tứ phân vị của các mẫu số liệu sau:

a) 5; 13; 5; 7; 10; 2; 3.

b) 2; 3; 10; 13; 5; 15; 5; 7.

Giải

a) Sắp xếp lại mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được: 2; 3; 5; 5; 7; 10; 13.

- Vì cỡ mẫu là $n = 7$, là số lẻ, nên giá trị tứ phân vị thứ hai là $Q_2 = 5$.
- Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của mẫu: 2; 3; 5. Do đó $Q_1 = 3$.
- Tứ phân vị thứ ba là trung vị của mẫu: 7; 10; 13. Do đó $Q_3 = 10$.

b) Sắp xếp lại mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được: 2; 3; 5; 5; 7; 10; 13; 15.

- Vì cỡ mẫu là $n = 8$, là số chẵn, nên giá trị tứ phân vị thứ hai là

$$Q_2 = \frac{1}{2}(5+7) = 6.$$

- Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của mẫu: 2; 3; 5; 5. Do đó $Q_1 = 4$.
- Tứ phân vị thứ ba là trung vị của mẫu: 7; 10; 13; 15. Do đó $Q_3 = 11,5$.

Trong ví dụ trên, khoảng cách giữa Q_1 và Q_2 nhỏ hơn khoảng cách giữa Q_2 và Q_3. Ta nói mật độ số liệu ở bên trái Q_2 cao hơn ở bên phải Q_2.

2 Hãy tìm tứ phân vị của các mẫu số liệu sau:

a) 10; 13; 15; 2; 10; 19; 2; 5; 7.

b) 15; 19; 10; 5; 9; 10; 1; 2; 5; 15.

3. Mốt

4 Một cửa hàng kinh doanh hoa thống kê số hoa hồng bán được trong ngày 14 tháng 2 theo loại hoa và thu được bảng tần số sau:

Loại hoa	Hồng bạch	Hồng nhung	Hồng vàng	Hồng kem
Số bông bán được	120	230	180	150

Cửa hàng nên nhập loại hoa hồng nào nhiều nhất để bán trong ngày 14 tháng 2 năm tiếp theo? Tại sao?

Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là ***mốt*** của mẫu số liệu và kí hiệu là M_o.

Ví dụ 5

Số vụ va chạm giao thông mỗi ngày tại một ngã tư được ghi lại trong bảng tần số sau:

Số vụ va chạm	0	1	2	3	4
Số ngày	12	17	6	4	1

Tìm mốt của mẫu số liệu trên.

Giải

Số ngày có 1 vụ va chạm là 17, lớn hơn số ngày có 0, 2, 3, 4 vụ va chạm. Do đó mẫu số liệu trên có $M_o = 1$.

Ý nghĩa của mốt

Mốt đặc trưng cho giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu.

Chú ý: Một mẫu số liệu có thể có nhiều mốt. Khi tất cả các giá trị trong mẫu số liệu có tần số xuất hiện bằng nhau thì mẫu số liệu đó không có mốt.

3 Hãy tìm mốt của số liệu điểm kiểm tra của các bạn Tổ 1 trong 1.

BÀI TẬP

1. Hãy tìm số trung bình, tứ phân vị và mốt của các mẫu số liệu sau:

a) 23; 41; 71; 29; 48; 45; 72; 41.

b) 12; 32; 93; 78; 24; 12; 54; 66; 78.

2. Hãy tìm số trung bình, tứ phân vị và mốt của các mẫu số liệu sau:

a)

Giá trị	23	25	28	31	33	37
Tần số	6	8	10	6	4	3

b)

Giá trị	0	2	4	5
Tần số tương đối	0,6	0,2	0,1	0,1

3. An lấy ra ngẫu nhiên 3 quả bóng từ một hộp có chứa nhiều bóng xanh và bóng đỏ. An đếm xem có bao nhiêu bóng đỏ trong 3 bóng lấy ra đó rồi trả bóng lại hộp. An lặp lại phép thử trên 100 lần và ghi lại kết quả ở bảng sau:

Số bóng đỏ	0	1	2	3
Số lần	10	30	40	20

Hãy tìm số trung bình, tứ phân vị và mốt của bảng kết quả trên.

4. Trong một cuộc thi nghề, người ta ghi lại thời gian hoàn thành một sản phẩm của một số thí sinh ở bảng sau:

Thời gian (đơn vị: phút)	5	6	7	8	35
Số thí sinh	1	3	5	2	1

a) Hãy tìm số trung bình, tứ phân vị và mốt của thời gian thi nghề của các thí sinh trên.

b) Năm ngoái, thời gian thi của các thí sinh có số trung bình và trung vị đều bằng 7. Bạn hãy so sánh thời gian thi nói chung của các thí sinh trong hai năm.

5. Bác Dũng và bác Thu ghi lại số cuộc điện thoại mà mỗi người gọi mỗi ngày trong 10 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên từ tháng 01/2021 ở bảng sau:

Bác Dũng	2	7	3	6	1	4	1	4	5	1
Bác Thu	1	3	1	2	3	4	1	2	20	2

a) Hãy tìm số trung bình, tứ phân vị và mốt của số cuộc điện thoại mà mỗi bác gọi theo số liệu trên.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì ai có nhiều cuộc điện thoại hơn?

c) Nếu so sánh theo số trung vị thì ai có nhiều cuộc điện thoại hơn?

d) Theo bạn, nên dùng số trung bình hay số trung vị để so sánh xem ai có nhiều cuộc gọi điện thoại hơn mỗi ngày?

Chân trời sáng tạo

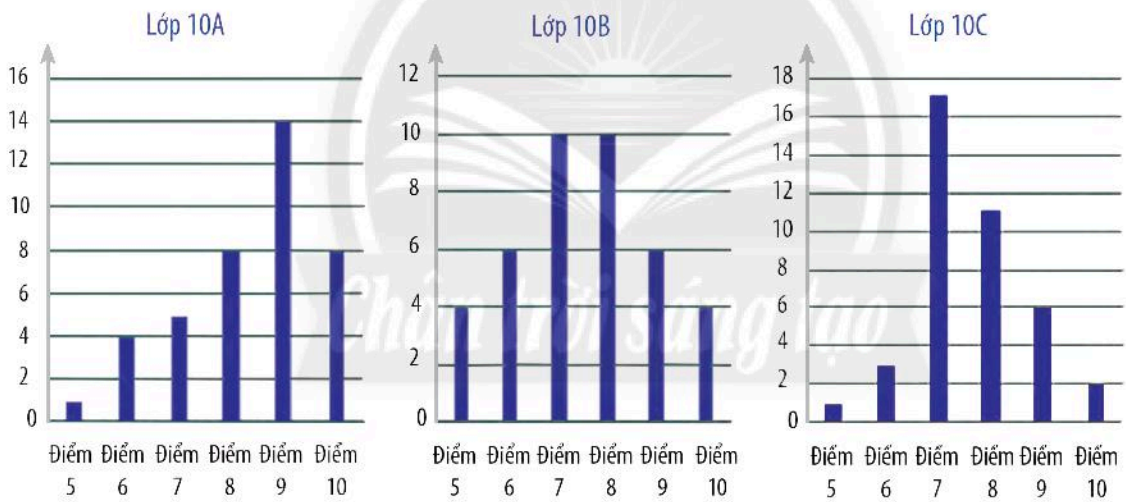
6. Tổng số điểm mà các thành viên đội tuyển Olympic Toán quốc tế (IMO) của Việt Nam đạt được trong 20 kì thi được cho ở bảng sau:

Năm	Tổng điểm	Năm	Tổng điểm	Năm	Tổng điểm	Năm	Tổng điểm
2020	150	2015	151	2010	133	2005	143
2019	177	2014	157	2009	161	2004	196
2018	148	2013	180	2008	159	2003	172
2017	155	2012	148	2007	168	2002	166
2016	151	2011	113	2006	131	2001	139

(*Nguồn:* https://imo-official.org)

Có ý kiến cho rằng điểm thi của đội tuyển giai đoạn 2001 – 2010 cao hơn giai đoạn 2011 – 2020. Hãy sử dụng số trung bình và trung vị để kiểm nghiệm xem ý kiến trên có đúng không.

7. Kết quả bài kiểm tra giữa kì của các bạn học sinh lớp 10A, 10B, 10C được thống kê ở các biểu đồ dưới đây.



a) Hãy lập bảng thống kê số lượng học sinh theo điểm số ở mỗi lớp.

b) Hãy so sánh điểm số của học sinh các lớp đó theo số trung bình, trung vị và mốt.

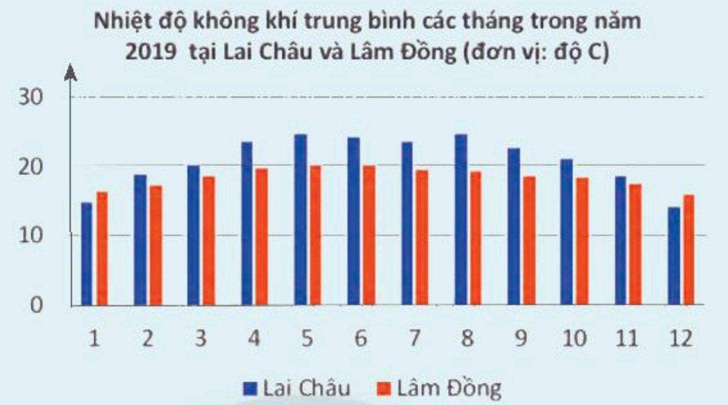
Bạn có biết?

Các số đặc trưng cho ta thông tin về quy luật phân phối của mẫu số liệu. Mẫu số liệu được gọi là ***đối xứng*** nếu trung bình của mẫu và trung vị bằng nhau; ***lệch trái*** nếu trung bình của mẫu nhỏ hơn trung vị; ***lệch phải*** nếu trung bình của mẫu lớn hơn trung vị.

Ví dụ trong Bài tập 7, điểm của lớp 10A là lệch trái, điểm của lớp 10B là đối xứng và điểm của lớp 10C là lệch phải.

Bài 4. Các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu

Từ khoá: **Khoảng biến thiên; Khoảng tứ phân vị; Phương sai; Độ lệch chuẩn.**



(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

Theo bạn, địa phương nào có thời tiết ôn hoà hơn?

1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

1 Thời gian hoàn thành bài chạy 5 km (tính theo phút) của hai nhóm thanh niên được cho ở bảng sau:

Nhóm 1	30	32	47	31	32	30	32	29	17	29	32	31
Nhóm 2	32	29	32	30	32	31	29	31	32	30	31	29

a) Hãy tính độ chênh lệch giữa thời gian chạy của người nhanh nhất và người chậm chất trong từng nhóm.

b) Nhóm nào có thành tích chạy đồng đều hơn?

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được:

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n.$$

• ***Khoảng biến thiên*** của một mẫu số liệu, kí hiệu là R, là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó, tức là:

$$R = x_n - x_1.$$

• ***Khoảng tứ phân vị***, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu giữa Q_3 và Q_1, tức là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

Trong 1, độ chênh lệch giữa kết quả cao nhất và kết quả thấp nhất chính là khoảng biến thiên của kết quả các lần chạy của từng nhóm.

Ví dụ 1

Hãy tính khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu: 10; 20; 3; 1; 3; 4; 7; 4; 9.

Giải

Xét mẫu số liệu đã sắp xếp là: 1; 3; 3; 4; 4; 7; 9; 10; 20.

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là: $R = 20 - 1 = 19$.
- Cỡ mẫu là $n = 9$ là số lẻ nên giá trị tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = 4$.
- Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của mẫu: 1; 3; 3; 4. Do đó $Q_1 = 3$.
- Tứ phân vị thứ ba là trung vị của mẫu: 7; 9; 10; 20. Do đó $Q_3 = 9{,}5$.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu là: $\Delta_Q = 9{,}5 - 3 = 6{,}5$.

Ý nghĩa của khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Khoảng biến thiên đặc trưng cho độ phân tán của toàn bộ mẫu số liệu.

Khoảng tứ phân vị đặc trưng cho độ phân tán của một nửa các số liệu, có giá trị thuộc đoạn từ Q_1 đến Q_3 trong mẫu.

Khoảng tứ phân vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị rất lớn hoặc rất bé trong mẫu.

Trong 1, có sự khác biệt lớn nếu sử dụng khoảng biến thiên để so sánh độ chênh lệch kết quả giữa hai nhóm. Nhưng nếu sử dụng khoảng tứ phân vị thì thấy sự chênh lệch thời gian chạy của đa số các thanh niên ở hai nhóm là như nhau.

1 Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của các mẫu số liệu sau:

a) 10; 13; 15; 2; 10; 19; 2; 5; 7.

b) 15; 19; 10; 5; 9; 10; 1; 2; 5; 15.

1 Dưới đây là bảng số liệu thống kê của Biểu đồ nhiệt độ trung bình (đơn vị: độ C) các tháng trong năm 2019 của hai tỉnh Lai Châu và Lâm Đồng (được đề cập đến ở hoạt động khởi động của bài học).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lai Châu	14,8	18,8	20,3	23,5	24,7	24,2	23,6	24,6	22,7	21,0	18,6	14,2
Lâm Đồng	16,3	17,4	18,7	19,8	20,2	20,3	19,5	19,3	18,6	18,5	17,5	16,0

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của nhiệt độ trung bình mỗi tháng của tỉnh Lai Châu và Lâm Đồng.

b) Hãy cho biết trong một năm, nhiệt độ ở địa phương nào ít thay đổi hơn.

Chân trời sáng tạo

Giá trị ngoại lệ

Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định các *giá trị ngoại lệ* trong mẫu, đó là các giá trị quá nhỏ hay quá lớn so với đa số các giá trị của mẫu. Cụ thể, phần tử x trong mẫu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1{,}5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1{,}5\Delta_Q$.

Trong Ví dụ 1, $Q_3 + 1{,}5\Delta_Q = 9{,}5 + 1{,}5 \,.\, 6{,}5 = 19{,}25$ và $Q_1 - 1{,}5\Delta_Q = 3 - 1{,}5 \,.\, 6{,}5 = -6{,}75$ nên mẫu có một giá trị ngoại lệ là 20.

Sự xuất hiện của các giá trị ngoại lệ làm cho số trung bình và phạm vi của mẫu thay đổi lớn. Do đó, khi mẫu có giá trị ngoại lệ, người ta thường sử dụng trung vị và khoảng tứ phân vị để đo mức độ tập trung và mức độ phân tán của đa số các phần tử trong mẫu số liệu.

2 Hãy tìm giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu: 37; 12; 3; 9; 10; 9; 12; 3; 10.

2. Phương sai và độ lệch chuẩn

2 Hai cung thủ A và B đã ghi lại kết quả từng lần bắn của mình ở bảng sau:

Cung thủ *A*	8	9	10	7	6	10	6	7	9	8
Cung thủ *B*	10	6	8	7	9	9	8	7	8	8

a) Tính kết quả trung bình của mỗi cung thủ trên.

b) Cung thủ nào có kết quả các lần bắn ổn định hơn?

Ngoài khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị, người ta cũng sử dụng phương sai và độ lệch chuẩn để đo độ phân tán của mẫu số liệu.

Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, ..., x_n$.

• ***Phương sai*** của mẫu số liệu này, kí hiệu là S^2, được tính bởi công thức:

$$S^2 = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2\right],$$

trong đó $\overline{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu.

• Căn bậc hai của phương sai được gọi là ***độ lệch chuẩn***, kí hiệu là S.

Chú ý: Có thể biến đổi công thức tính phương sai ở trên thành:

$$S^2 = \frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right) - \overline{x}^2.$$

Trong thống kê, người ta cũng quan tâm đến phương sai hiệu chỉnh, kí hiệu là $\hat{s}^2$, được tính bởi công thức:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2\right].$$

Chân trời sáng tạo

Ví dụ 2

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mỗi mẫu số liệu ghi kết quả các lần bắn của từng cung thủ trong 2.

Giải

Số trung bình của kết quả các lần bắn của cung thủ A là:

$$(8 + 9 + 10 + 7 + 6 + 10 + 6 + 7 + 9 + 8) : 10 = 8.$$

Số trung bình của kết quả các lần bắn của cung thủ B là:

$$(10 + 6 + 8 + 7 + 9 + 9 + 8 + 7 + 8 + 8) : 10 = 8.$$

Phương sai mẫu số liệu của cung thủ A là:

$$S_A^2 = \frac{1}{10}(8^2 + 9^2 + 10^2 + 7^2 + 6^2 + 10^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 + 8^2) - 8^2 = 2.$$

Độ lệch chuẩn mẫu số liệu của cung thủ A là: $S_A = \sqrt{S_A^2} = \sqrt{2} \approx 1,41.$

Phương sai mẫu số liệu của cung thủ B là:

$$S_B^2 = \frac{1}{10}(10^2 + 6^2 + 8^2 + 7^2 + 9^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 8^2 + 8^2) - 8^2 = 1,2.$$

Độ lệch chuẩn mẫu số liệu của cung thủ B là: $S_B = \sqrt{S_B^2} = \sqrt{1,2} \approx 1,10.$

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn

Phương sai là trung bình cộng của các bình phương độ lệch từ mỗi giá trị của mẫu số liệu đến số trung bình.

Phương sai và độ lệch chuẩn được dùng để đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì các giá trị của mẫu càng cách xa nhau (có độ phân tán lớn).

Trong 2, kết quả các lần bắn của hai cung thủ có cùng khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị. Tuy nhiên, nếu so sánh bằng phương sai hoặc độ lệch chuẩn thì kết quả của cung thủ A có độ phân tán cao hơn cung thủ B. Do đó, cung thủ B bắn ổn định hơn cung thủ A.

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số:

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Khi đó, công thức tính phương sai trở thành:

$$S^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + n_k(x_k - \overline{x})^2\right],$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Có thể biến đổi công thức tính phương sai trên thành:

$$S^2 = \frac{1}{n}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + ... + n_kx_k^2) - \overline{x}^2.$$

Chân trời sáng tạo

Ví dụ 3

Điều tra một số học sinh về số cái bánh chưng mà gia đình mỗi bạn tiêu thụ trong dịp Tết Nguyên đán, kết quả được ghi lại ở bảng sau. Hãy tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

Số cái bánh chưng	6	7	8	9	10	11	15
Số gia đình	5	7	10	8	5	4	1

Giải

Số trung bình của mẫu số liệu trên là:

$$\overline{x}=\frac{1}{40}(5.6+7.7+10.8+8.9+5.10+4.11+15)=8,5.$$

Phương sai của mẫu số liệu trên là:

$$S^2=\frac{1}{40}\left(5.6^2+7.7^2+10.8^2+8.9^2+5.10^2+4.11^2+15^2\right)-8,5^2=3,25.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là:

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{3,25}\approx 1,80.$$

2 Bảng dưới đây thống kê tổng số giờ nắng trong năm 2019 theo từng tháng được đo bởi hai trạm quan sát khí tượng đặt ở Tuyên Quang và Cà Mau.

Tháng	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Tuyên Quang	25	89	72	117	106	177	156	203	227	146	117	145
Cà Mau	180	223	257	245	191	111	141	134	130	122	157	173

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

a) Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của dữ liệu từng tỉnh.

b) Nêu nhận xét về sự thay đổi tổng số giờ nắng theo từng tháng ở mỗi tỉnh.

BÀI TẬP

1. Hãy chọn ngẫu nhiên trong lớp ra 5 bạn nam và 5 bạn nữ rồi đo chiều cao các bạn đó. So sánh xem chiều cao của các bạn nam hay các bạn nữ đồng đều hơn.

2. Hãy tìm độ lệch chuẩn, khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và các giá trị ngoại lệ của các mẫu số liệu sau:

a) 6; 8; 3; 4; 5; 6; 7; 2; 4.

b) 13; 37; 64; 12; 26; 43; 29; 23.

3. Hãy tìm độ lệch chuẩn, khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của các mẫu số liệu sau:

a)

Giá trị	–2	–1	0	1	2
Tần số	10	20	30	20	10

b)

Giá trị	0	1	2	3	4
Tần số tương đối	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

4. Hãy so sánh số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của ba mẫu số liệu sau:

Mẫu 1: 0,1; 0,3; 0,5; 0,5; 0,3; 0,7.

Mẫu 2: 1,1; 1,3; 1,5; 1,5; 1,3; 1,7.

Mẫu 3: 1; 3; 5; 5; 3; 7.

5. Sản lượng lúa các năm từ 2014 đến 2018 của hai tỉnh Thái Bình và Hậu Giang được cho ở bảng sau (đơn vị: nghìn tấn):

Năm / Tỉnh	2014	2015	2016	2017	2018
Thái Bình	1 061,9	1 061,9	1 053,6	942,6	1 030,4
Hậu Giang	1 204,6	1 293,1	1 231,0	1 261,0	1 246,1

(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

a) Hãy tính độ lệch chuẩn và khoảng biến thiên của sản lượng lúa từng tỉnh.

b) Tỉnh nào có sản lượng lúa ổn định hơn? Tại sao?

6. Kết quả điều tra mức lương hằng tháng của một số công nhân của hai nhà máy A và B được cho ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Công nhân nhà máy A	4	5	5	47	5	6	4	4	
Công nhân nhà máy B	2	9	9	8	10	9	9	11	9

a) Hãy tìm số trung bình, mốt, tứ phân vị và độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu lấy từ nhà máy A và nhà máy B.

b) Hãy tìm các giá trị ngoại lệ trong mỗi mẫu số liệu trên. Công nhân nhà máy nào có mức lương cao hơn? Tại sao?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

1. Một hằng số quan trọng trong toán học là số e có giá trị gần đúng với 12 chữ số thập phân là 2,718281828459.

a) Giả sử ta lấy giá trị 2,7 làm giá trị gần đúng của e. Hãy chứng tỏ sai số tuyệt đối không vượt quá 0,02 và sai số tương đối không vượt quá 0,75%.

b) Hãy quy tròn e đến hàng phần nghìn.

c) Tìm số gần đúng của số e với độ chính xác 0,00002.

2. Cho các số gần đúng $a = 54919020 \pm 1000$ và $b = 5{,}7914003 \pm 0{,}002$.

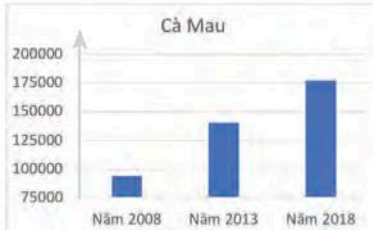
Hãy xác định số quy tròn của a và b.

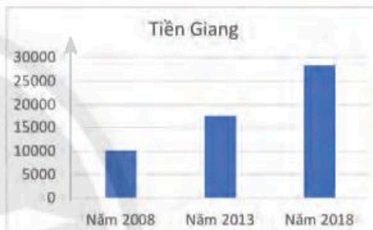
3. Mỗi học sinh lớp 10A đóng góp 2 quyển sách cho thư viện trường. Lớp trưởng thống kê lại số sách mà mỗi tổ trong lớp đóng góp ở bảng sau:

Tổ	Tổng số sách
1	16
2	20
3	20
4	19
5	18

Hãy cho biết lớp trưởng thống kê đã chính xác chưa. Tại sao?

4. Sản lượng nuôi tôm phân theo địa phương của các tỉnh Cà Mau và Tiền Giang được thể hiện ở hai biểu đồ sau (đơn vị: tấn):





(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

a) Hãy cho biết các phát biểu sau là đúng hay sai:

i. Sản lượng nuôi tôm mỗi năm của tỉnh Tiền Giang đều cao hơn tỉnh Cà Mau.

ii. Ở tỉnh Cà Mau, sản lượng nuôi tôm năm 2018 tăng gấp hơn 4 lần so với năm 2008.

iii. Ở tỉnh Tiền Giang, sản lượng nuôi tôm năm 2018 tăng gấp hơn 2,5 lần so với năm 2008.

iv. Ở tỉnh Tiền Giang, từ năm 2008 đến năm 2018, sản lượng nuôi tôm mỗi năm tăng trên 50% so với năm cũ.

v. Trong vòng 5 năm từ 2013 đến 2018, sản lượng nuôi tôm của tỉnh Cà Mau tăng cao hơn của tỉnh Tiền Giang.

b) Để so sánh sản lượng nuôi tôm của hai tỉnh Cà Mau và Tiền Giang, ta nên sử dụng loại biểu đồ nào?

5. Bạn Châu cân lần lượt 50 quả vải thiều Thanh Hà được lựa chọn ngẫu nhiên từ vườn nhà mình và được kết quả như sau:

Cân nặng (đơn vị: gam)	Số quả
8	1
19	10
20	19
21	17
22	3

a) Hãy tìm số trung bình, trung vị, mốt của mẫu số liệu trên.

b) Hãy tìm độ lệch chuẩn, khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu trên.

6. Độ tuổi của 22 cầu thủ ở đội hình xuất phát của hai đội bóng đá được ghi lại ở bảng sau:

Đội *A*	Đội *B*
28	32
24	20
26	19
25	21
25	28
23	29
20	21
29	22
21	29
24	19
24	29

a) Hãy tìm số trung bình, mốt, độ lệch chuẩn và tứ phân vị của tuổi mỗi cầu thủ của từng đội bóng.

b) Tuổi của các cầu thủ ở đội bóng nào đồng đều hơn? Tại sao?

7. Một cửa hàng bán xe ô tô thay đổi chiến lược kinh doanh vào cuối năm 2019. Số xe cửa hàng bán được mỗi tháng trong năm 2019 và 2020 được ghi lại ở bảng sau:

Tháng	Năm 2019	Năm 2020
1	54	45
2	22	28
3	24	31
4	30	34
5	35	32
6	40	35
7	31	37
8	29	33
9	29	33
10	37	35
11	40	34
12	31	37

a) Hãy tính số trung bình, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của số lượng xe bán được trong năm 2019 và năm 2020.

b) Nêu nhận xét về tác động của chiến lược kinh doanh mới lên số lượng xe bán ra hằng tháng.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

BÀI 1. Dùng máy tính cầm tay để tính toán với số gần đúng và tính các số đặc trưng của mẫu số liệu thống kê

MỤC TIÊU

– Biết sử dụng máy tính cầm tay để tính toán với các số gần đúng.

– Biết sử dụng máy tính cầm tay để tính các số đặc trưng của mẫu số liệu thống kê.

CHUẨN BỊ

– Máy tính cầm tay.

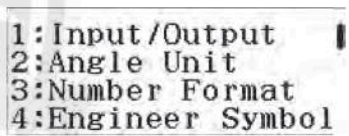
– Sách giáo khoa Toán 10.

TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 1. Sử dụng máy tính cầm tay để tính toán với các số gần đúng

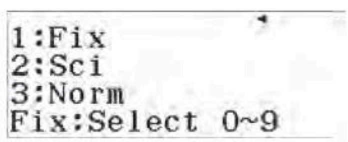
1. Tìm hiểu cách cài đặt làm tròn số trên máy tính cầm tay

Sau khi mở máy, ấn liên tiếp các phím [SHIFT] [MENU] để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.



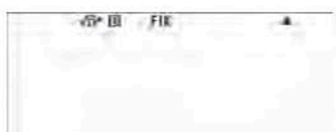
Ấn phím [3] để chọn mục **Number Format** (định dạng số).

Ấn phím [1] để chọn cài đặt làm tròn số thập phân (**Fix**).



Sau đó, chọn số chữ số ở phần thập phân bằng cách ấn phím số tương ứng (chọn số từ 0 đến 9).

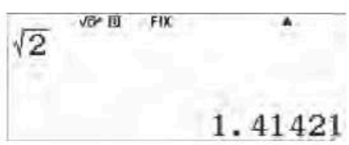
Ví dụ: Ấn phím [5] để chọn làm tròn số đến số thập phân thứ 5.



Thử kết quả.

Ví dụ: Tính giá trị của $\sqrt{2}$, làm tròn đến số thập phân thứ 5.

Ấn liên tiếp các phím [AC] [√■] [2] [=] [S⇔D], ta được kết quả làm tròn đến số thập phân thứ 5 như trong hình bên.



Chân trời sáng tạo

2. Thực hành sử dụng máy tính cầm tay để tính toán với số gần đúng

1 Thực hiện các phép tính sau trên máy tính cầm tay (trong kết quả lấy 4 chữ số ở phần thập phân):

a) $4^6.\sqrt{0,1}$; b) $\sqrt[8]{2,1^{18}+1}-\sqrt{2,1^{12}+1}$; c) $\dfrac{1,5^3}{\sqrt[3]{6,8}}$.

Hướng dẫn: Thực hiện các bước cài đặt làm tròn số tương tự như trên (với số chữ số ở phần thập phân là 4), sau đó tiến hành nhập biểu thức cần tính toán.

HOẠT ĐỘNG 2. Sử dụng máy tính cầm tay để tính các số đặc trưng của mẫu số liệu thống kê

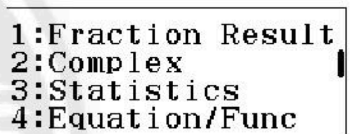
Ví dụ: Tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và mức độ phân tán của mẫu số liệu điều tra về số thành viên trong mỗi hộ gia đình của một xóm cho bởi bảng tần số sau:

Số thành viên	2	3	4	5	6	7
Số hộ gia đình	14	21	32	19	8	5

Sử dụng máy tính cầm tay, ta tiến hành các bước sau:

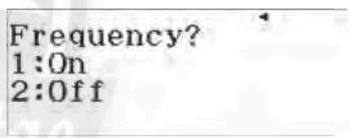
1. Bật chế độ bảng tần số

Sau khi mở máy, ấn liên tiếp các phím SHIFT MENU và phím di chuyển ▼ để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.



Ấn phím 3 để chọn mục **Statistics** (thống kê). Màn hình sẽ hiển thị bảng lựa chọn như hình bên.

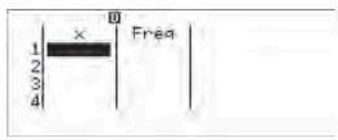
Tiếp đó, ấn phím 1 để bật bảng tần số.



Chân trời sáng tạo

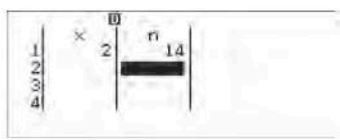
2. Chuyển máy tính sang chế độ thống kê và nhập dữ liệu thống kê

Ấn liên tiếp các phím MENU 6 1 để chuyển máy tính sang chế độ thống kê. Màn hình sẽ hiển thị bảng tần số như ở bên.

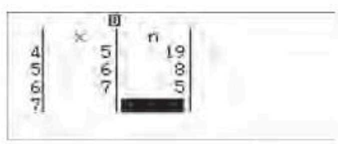


Tiến hành nhập số thành viên vào cột bên trái (cột **x**) và số hộ gia đình tương ứng vào cột bên phải (cột **Freq**).

Lưu ý: Ấn phím = mỗi khi nhập xong một số liệu; Ấn các phím ◀, ▶, ▼, ▲ để di chuyển giữa các cột, hàng số liệu.

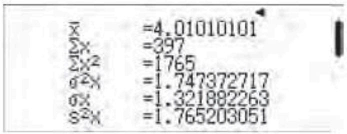


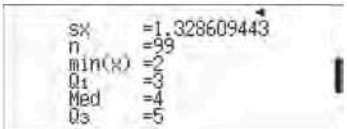
Ấn phím AC để hoàn tất việc nhập số liệu.

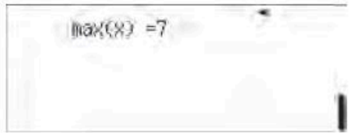


3. Xem các số đặc trưng của mẫu số liệu thống kê và ghi kết quả

Ấn liên tiếp các phím OPTN 2 để máy tính hiển thị kết quả tính các số đặc trưng của mẫu số liệu. Ấn tiếp phím ▼ để xem thêm kết quả.







Ta tính được các số đặc trưng của mẫu số liệu trên là:

Số trung bình	$\overline{x}$	4,01010
Phương sai (S^2)	σ^2x	1,74737
Độ lệch chuẩn (S)	σx	1,32188
Phương sai hiệu chỉnh ($\hat{s}^2$)	s^2x	1,76520
Cỡ mẫu	n	99
Giá trị nhỏ nhất	min(x)	2
Tứ phân vị thứ nhất	Q_1	3
Trung vị (M_e)	Med	4
Tứ phân vị thứ ba	Q_3	5
Giá trị lớn nhất	max(x)	7

Phương pháp hiệu chỉnh dữ liệu:

- Để mở lại bảng dữ liệu đã nhập: Ấn liên tiếp các phím OPTN 3.
- Ấn các phím ◀, ▶, ▼, ▲ để tìm đến số liệu cần hiệu chỉnh, nhập giá trị mới và ấn ☰ để thay đổi.

2 Kết quả điều tra về số xe máy của mỗi hộ gia đình trong một khu phố được cho bởi bảng tần số sau:

Số xe máy	0	1	2	3	4	5
Số hộ gia đình	12	25	40	5	3	2

Tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và mức độ phân tán của mẫu số liệu trên.

BÀI 2. Dùng bảng tính để tính các số đặc trưng của mẫu số liệu thống kê

MỤC TIÊU

– Biết dùng các lệnh của bảng tính (Microsoft Excel) để tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và mức độ phân tán của một mẫu số liệu thống kê.

– Có cơ hội trải nghiệm, vận dụng các kiến thức thống kê để phân tích số liệu trong hoạt động thực tiễn.

CHUẨN BỊ

– Máy tính để bàn, máy tính bảng hoặc máy tính xách tay có cài phần mềm Microsoft Excel.

– Sách giáo khoa Toán 10.

TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

1. Nhập một mẫu dữ liệu thống kê vào các hàng và cột của một bảng tính trong bảng tính

Ví dụ: Nhập dữ liệu thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 25 học sinh lớp 10A vào phần mềm bảng tính và lập bảng tần số như sau đây:

	A	B	C	D	L	I
1	BẢNG THỐNG KÊ ĐIỂM KIỂM TRA MÔN TOÁN LỚP 10A					
2						
3	STT	Họ và Tên	Điểm KT môn Toán		Điểm	Tần số
4	1	Lại Kiều Anh	4		4	3
5	2	Phạm Thị Lan Anh	8		5	4
6	3	Trương Huệ Bảo	9		6	1
7	4	Nguyễn Bông	4		6,5	8
8	5	Bùi Xuân Dương	6,5		7	1
9	6	Nguyễn Thành Đạt	6		7,5	1
10	7	Phan Minh Đức	6,5		8	2
11	8	Nguyễn Đỗ Gia Hân	5		9	4
12	9	Trần Thanh Hà	10		10	1
13	10	Nguyễn Đức Hiếu	9		Tổng	25
14	11	Nguyễn Gia Huy	6,5			
15	12	Vũ Nhân Khánh	6,5			
16	13	Nguyễn Thị Nga	5			
17	14	Nguyễn Hoàng Nam	6,5			
18	15	Nguyễn Ái Như	7			
19	16	Trần Gia Phát	8			
20	17	Hoàng Ngọc Phương	6,5			
21	18	Nguyễn Văn Quảng	5			
22	19	Trần Hà Sơn	5			
23	20	Nguyễn Phương Thanh	4			
24	21	Đỗ Thanh Thảo	6,5			
25	22	Đặng Thị Thuý	9			
26	23	Nguyễn Đặng Trí Tín	9			
27	24	Nguyễn Thị Thu Trang	6,5			
28	25	Phan Trường Vinh	7,5			

2. Tìm hiểu một số hàm tính số liệu thống kê trong bảng tính Excel

Tên số đo đặc trưng	Nhập hàm trong Excel	Kết quả
Số trung bình	=AVERAGE(C4:C28)	6,66
Trung vị	=MEDIAN(C4:C28)	6,5
Tứ phân vị thứ nhất (Q_1)	=QUARTILE.EXC(C4:C28,1)	5
Tứ phân vị thứ hai (Q_2)	=QUARTILE.EXC(C4:C28,2)	6,5
Tứ phân vị thứ ba (Q_3)	=QUARTILE.EXC(C4:C28,3)	8
Mốt	=MODE(C4:C28)	6,5
Phương sai	=VAR.P(C4:C28)	2,8144
Độ lệch chuẩn	=STDEV.P(C4:C28)	1,677617358
Khoảng tứ phân vị (IQR)	=I7-I5	3

Trong đó, C4:C28 là địa chỉ cột C từ hàng 4 đến hàng 28 của bảng tính, nơi ghi số liệu điểm kiểm tra môn Toán của lớp.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	BẢNG THỐNG KÊ ĐIỂM KIỂM TRA MÔN TOÁN LỚP 10A								
2									
3	STT	Họ và Tên	Điểm KT môn Toán		Điểm	Tần số		Số trung bình	6,66
4	1	Lại Kiều Anh	4		4	3		Trung vị	6,5
5	2	Phạm Thị Lan Anh	8		5	4		Tứ phân vị thứ nhất (Q1)	5
6	3	Trương Huê Bảo	9		6	1		Tứ phân vị thứ hai (Q2)	6,5
7	4	Nguyễn Bông	4		6,5	8		Tứ phân vị thứ ba (Q3)	8
8	5	Bùi Xuân Dương	6,5		7	1		Mốt	6,5
9	6	Nguyễn Thành Đạt	6		7,5	1		Phương sai	2,8144
10	7	Phan Minh Đức	6,5		8	2		Độ lệch chuẩn	1,677617358
11	8	Nguyễn Đỗ Gia Hân	5		9	4		Khoảng tứ phân vị	3
12	9	Trần Thanh Hà	10		10	1			
13	10	Nguyễn Đức Hiếu	9		Tổng	25			
14	11	Nguyễn Gia Huy	6,5						
15	12	Vũ Nhân Khánh	6,5						
16	13	Nguyễn Thị Nga	5						
17	14	Nguyễn Hoàng Nam	6,5						
18	15	Nguyễn Ái Như	7						
19	16	Trần Gia Phát	8						
20	17	Hoàng Ngọc Phương	6,5						
21	18	Nguyễn Văn Quảng	5						
22	19	Trần Hà Sơn	5						
23	20	Nguyễn Phương Thanh	4						
24	21	Đỗ Thanh Thảo	6,5						
25	22	Đặng Thị Thuý	9						
26	23	Nguyễn Đặng Trí Tín	9						
27	24	Nguyễn Thị Thu Trang	6,5						
28	25	Phan Trường Vinh	7,5						

3. Dùng các kiến thức thống kê đã học để giải thích một số kết quả của bảng tính

Ví dụ:

- Tại sao MEDIAN(C4:C28) = QUARTILE.EXC(C4:C28,2)?
- Tại sao MODE(C4:C28) = 6,5?
- Tại sao IQR = QUARTILE.EXC(C4:C28,3) – QUARTILE.EXC(C4:C28,1)?
- Tại sao VAR.P(C4:C28) =[STDEV.P(C4:C28)]²?

4. Phân tích các số đặc trưng đã thu được trong bảng tính để nêu nhận xét của bạn về kết quả học tập môn Toán của lớp

1 Chia lớp theo tổ để phân công làm thống kê như trên đối với điểm kiểm tra môn Toán của lớp và tổng hợp các kết quả trong một văn bản hoặc trang trình chiếu.

2 Làm tương tự với điểm kiểm tra các môn học khác của lớp.

Bạn có biết?

Nếu sử dụng hàm QUARTILE.EXC để tính tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của mẫu số liệu trong ví dụ 4b (Chương VI – Bài 3. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu):

2; 3; 10; 13; 5; 15; 5; 7

ta được kết quả $Q_1 = 4{,}5$ và $Q_3 = 10{,}75$. Kết quả này khác với kết quả ta đã tính ra. Điều này là do phần mềm Microsoft Excel đã sử dụng một dạng hiệu chỉnh của công thức tính tứ phân vị thứ nhất và thứ ba. Với mẫu ngẫu nhiên đã được sắp xếp $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$, hàm QUARTILE.EXC tính tứ phân vị thứ nhất và thứ ba như sau:

	Q_1	Q_2	Q_3
$n = 4k$	$\frac{3}{4}x_k + \frac{1}{4}x_{k+1}$	$\frac{1}{2}x_{2k} + \frac{1}{2}x_{2k+1}$	$\frac{1}{4}x_{3k} + \frac{3}{4}x_{3k+1}$
$n = 4k + 1$	$\frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_{k+1}$	x_{2k+1}	$\frac{1}{2}x_{3k+1} + \frac{1}{2}x_{3k+2}$
$n = 4k + 2$	$\frac{1}{4}x_k + \frac{3}{4}x_{k+1}$	$\frac{1}{2}x_{2k+1} + \frac{1}{2}x_{2k+2}$	$\frac{3}{4}x_{3k+2} + \frac{1}{4}x_{3k+3}$
$n = 4k + 3$	x_{k+2}	x_{2k+2}	x_{3k+3}

Như vậy, hàm QUARTILE.EXC sẽ cho ra tứ phân vị thứ nhất và thứ ba giống như công thức ta đã học đối với mẫu có cỡ lẻ.

(*Nguồn:* https://en.wikipedia.org/wiki/Quartile)

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

Đ

Đồ thị hàm số

Là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ với x thuộc tập xác định của hàm số.

Độ chính xác

Là số chênh lệch giữa số gần đúng và số đúng.

Độ lệch chuẩn

Là căn bậc hai của phương sai, kí hiệu là S.

H

Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai theo biến x là hàm số cho bởi công thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số thực và a khác 0.

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

K

Khoảng biến thiên

Hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một mẫu số liệu.

Khoảng tứ phân vị

Hiệu của tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất.

M

Mệnh đề

Là khái niệm cơ bản của toán học. Mỗi mệnh đề luôn hoặc đúng hoặc sai.

Miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Là giao của các miền nghiệm của các bất phương trình có trong hệ.

Mốt

Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là mốt của mẫu số liệu.

N

Nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Là nghiệm chung thoả mãn tất cả các bất phương trình có trong hệ.

P

Phương sai

Phương sai của mẫu số liệu, kí hiệu là S^2, được tính bởi công thức:

$$S^2 = \frac{1}{n}\left(\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \overline{x}\right)^2\right).$$

S

Sai số tuyệt đối

Nếu a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.

Sai số tương đối

Là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và giá trị tuyệt đối của số gần đúng.

Số trung bình cộng

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

T

Tập giá trị

Tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp gồm tất cả các giá trị y tương ứng với x thuộc tập xác định.

Tập xác định

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các giá trị x làm cho hàm số có nghĩa.

Trung vị

Là giá trị ở chính giữa của mẫu số liệu đã được sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Tứ phân vị

Tứ phân vị của một mẫu số liệu (theo thứ tự không giảm) gồm ba giá trị, gọi là tứ phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba. Ba giá trị này chia tập hợp dữ liệu đã sắp xếp thành bốn phần đều nhau.

V

Vectơ

Là một đoạn thẳng có hướng.

Vectơ-không

Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

Chân trời sáng tạo

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: ĐẶNG THỊ THUÝ – TRẦN HÀ SƠN
Biên tập mĩ thuật: BÙI XUÂN DƯƠNG
Thiết kế sách: BÙI XUÂN DƯƠNG
Trình bày bìa: THÁI HỮU DƯƠNG
Minh hoạ: BÙI XUÂN DƯƠNG
Sửa bản in: ĐẶNG THỊ THUÝ – TRẦN HÀ SƠN
Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

Bản quyền © (2022) thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Xuất bản phẩm đã đăng kí quyền tác giả. Tất cả các phần của nội dung cuốn sách này đều không được sao chép, lưu trữ, chuyển thể dưới bất kì hình thức nào khi chưa có sự cho phép bằng văn bản của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

TOÁN 10 – TẬP MỘT (Chân trời sáng tạo)
Mã số: G2HHXT001M22
In………bản, (QĐ in số….) Khổ 19x26,5 cm.
Đơn vị in:……………………..
Cơ sở in:………………………
Số ĐKXB: 593-2022/CXBIPH/55-397/GD
Số QĐXB:......... ngày…. tháng…. năm 20….
In xong và nộp lưu chiểu tháng…. năm 20….
Mã số ISBN: Tập 1: 978-604-0-32014-8
Tập 2: 978-604-0-32015-5

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 10 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Toán 10, Tập một
2. Toán 10, Tập hai
3. Chuyên đề học tập Toán 10
4. Ngữ văn 10, Tập một
5. Ngữ văn 10, Tập hai
6. Chuyên đề học tập Ngữ văn 10
7. Tiếng Anh 10 Friends Global - Student Book
8. Lịch sử 10
9. Chuyên đề học tập Lịch sử 10
10. Địa lí 10
11. Chuyên đề học tập Địa lí 10
12. Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10
13. Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10
14. Vật lí 10
15. Chuyên đề học tập Vật lí 10
16. Hoá học 10
17. Chuyên đề học tập Hoá học 10
18. Sinh học 10
19. Chuyên đề học tập Sinh học 10
20. Âm nhạc 10
21. Chuyên đề học tập Âm nhạc 10
22. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (BẢN 1)
23. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (BẢN 2)
24. Giáo dục quốc phòng và an ninh 10

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
- **Cửu Long:** CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

ISBN 978-604-0-32014-8

9 786040 320148

Giá: 21.000 đ