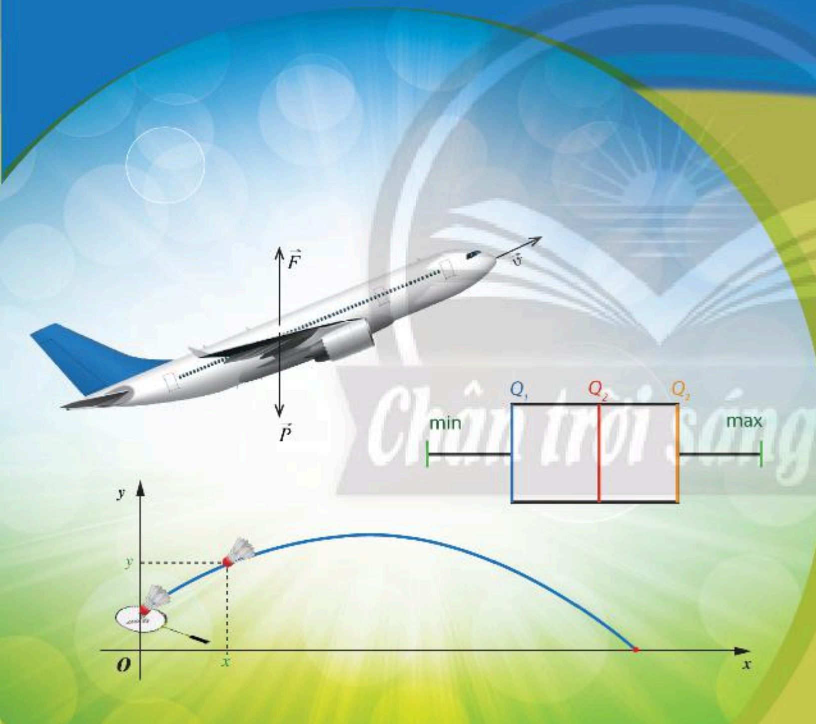
Chân trời sáng tạo

TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG
NGÔ HOÀNG LONG – PHẠM THỊ THU THUỶ

Bài tập TOÁN 10

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG
NGÔ HOÀNG LONG – PHẠM THỊ THU THUỶ

Bài tập TOÁN 10

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Cùng với *Sách giáo khoa Toán 10* và *Sách giáo viên Toán 10* (Bộ sách Chân trời sáng tạo), nhóm tác giả biên soạn **Bài tập Toán 10 (tập một, tập hai)** nhằm giúp học sinh rèn luyện kiến thức và các kĩ năng cơ bản phù hợp với Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành năm 2018.

Nội dung sách **Bài tập Toán 10** thể hiện tinh thần tích hợp, phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh.

Cấu trúc sách tương ứng với *Sách giáo khoa Toán 10* (Bộ sách Chân trời sáng tạo). **Bài tập Toán 10, tập một** bao gồm sáu chương:

– Chương I. Mệnh đề và tập hợp.

– Chương II. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

– Chương III. Hàm số bậc hai và đồ thị.

– Chương IV. Hệ thức lượng trong tam giác.

– Chương V. Vectơ.

– Chương VI. Thống kê.

Mỗi chương bao gồm nhiều bài học. Mỗi bài học gồm các phần như sau:

+ KIẾN THỨC CẦN NHỚ;

+ BÀI TẬP MẪU;

+ BÀI TẬP.

Cuối mỗi chương là phần LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để Bộ sách ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Phần ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương I. MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

Bài 1. MỆNH ĐỀ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Mệnh đề và mệnh đề chứa biến

– ***Mệnh đề*** là một khẳng định đúng hoặc sai.

Một khẳng định đúng gọi là ***mệnh đề đúng***.

Một khẳng định sai gọi là ***mệnh đề sai***.

Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

– ***Mệnh đề chứa biến*** không phải là mệnh đề, nhưng khi thay biến bởi giá trị nào đó thì nó trở thành mệnh đề.

Chú ý: Người ta thường sử dụng các chữ cái in hoa $P, Q, R, \ldots$ để kí hiệu mệnh đề.

2. Mệnh đề phủ định

Phủ định của mệnh đề P là mệnh đề "Không phải P", kí hiệu $\overline{P}$. Mệnh đề $\overline{P}$ đúng khi P sai và $\overline{P}$ sai khi P đúng.

3. Mệnh đề kéo theo

– Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là ***mệnh đề kéo theo***, kí hiệu $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

– Nếu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ đúng (định lí) thì ta nói:

+ P là ***giả thiết***, Q là ***kết luận*** của định lí;

+ P là ***điều kiện đủ*** để có Q;

+ Q là ***điều kiện cần*** để có P.

Chú ý:

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là "P kéo theo Q" hoặc "Từ P suy ra Q".

b) Để xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$, ta chỉ cần xét trường hợp P đúng. Khi đó, nếu Q đúng thì mệnh đề đúng, nếu Q sai thì mệnh đề sai.

4. Mệnh đề đảo, hai mệnh đề tương đương

– ***Mệnh đề đảo*** của mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề $Q \Rightarrow P$.

Chú ý: Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

– Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là ***hai mệnh đề tương đương***, kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.

– Khi đó, P là ***điều kiện cần và đủ*** để có Q (hay Q là điều kiện cần và đủ để có P).

Chú ý: Hai mệnh đề P và Q tương đương khi chúng cùng đúng hoặc cùng sai.

5. Mệnh đề chứa kí hiệu ∀, ∃

– Mệnh đề "$\forall x \in M, P(x)$" đúng nếu với mọi $x_0 \in M, P(x_0)$ là mệnh đề đúng.

– Mệnh đề "$\exists x \in M, P(x)$" đúng nếu có $x_0 \in M$ sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

a) $2 + 2 = 5$;

b) $10^9 \geq 9^{10}$;

c) Hãy chứng tỏ $\sqrt{2}$ là số vô tỉ;

d) 2^{64} là số rất lớn.

Giải

a) Là khẳng định sai. Nó là một mệnh đề.

b) Là câu khẳng định, chắc chắn chỉ có thể hoặc đúng hoặc sai. Nó là một mệnh đề.

c) Là câu mệnh lệnh, không phải là câu khẳng định. Nó không là mệnh đề.

d) Là câu khẳng định, nhưng không có tính chất hoặc đúng hoặc sai, do không rõ tiêu chí thế nào là số lớn. Nó không phải là mệnh đề.

Bài 2. Trong mỗi cặp mệnh đề P và Q sau đây, hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó. P có phải là điều kiện đủ để có Q không?

a) P: "a và b là hai số chẵn", Q: "$a + b$ là số chẵn" (a, b là hai số tự nhiên);

b) P: "Tứ giác $ABCD$ có bốn cạnh bằng nhau", Q: "Tứ giác $ABCD$ là một hình vuông".

Giải

a) $P \Rightarrow Q$: "Nếu a và b là hai số chẵn thì $a + b$ là số chẵn".

Ta biết rằng, tổng của hai số chẵn là một số chẵn, nên P đúng thì Q đúng.

Vậy, mệnh đề $P \Rightarrow Q$ đúng.

Do đó, P là điều kiện đủ để có Q.

b) $P \Rightarrow Q$: "Nếu tứ giác $ABCD$ có bốn cạnh bằng nhau thì nó là hình vuông".

Có những tứ giác có bốn cạnh bằng nhau nhưng không là hình vuông (chẳng hạn như hình thoi có một góc khác 90°). Khi tứ giác $ABCD$ như vậy thì P đúng, Q sai. Do đó, mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai.

Cũng vì vậy, P không phải là điều kiện đủ để có Q.

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$, xét hai mệnh đề:

P: "Tứ giác $ABCD$ có tổng hai góc đối bằng 180°";

Q: "Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó.

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó.

c) Mệnh đề P là điều kiện gì của mệnh đề Q?

Giải

a) $P \Rightarrow Q$: "Nếu tứ giác $ABCD$ có tổng hai góc đối bằng 180° thì nó là tứ giác nội tiếp", là một mệnh đề đúng.

b) $Q \Rightarrow P$: "Nếu tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp thì tổng hai góc đối của nó bằng 180°", là một mệnh đề đúng.

c) Từ trên ta thấy, P và Q là hai mệnh đề tương đương. Do đó, P là điều kiện cần và đủ để có Q.

Bài 4. Sử dụng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$, viết lại các mệnh đề sau. Viết mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề đó.

a) Với mọi số thực x, đều có $x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

b) Có số nguyên x sao cho $x^2 - 5 = 0$.

c) Tồn tại số thực x để $x^2 + 2x + 2 < 0$.

Giải

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

Mệnh đề phủ định: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 < 0$.

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 - 5 = 0$.

Mệnh đề phủ định: $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 - 5 \neq 0$.

c) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 < 0$.

Mệnh đề phủ định: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 \geq 0$.

C. BÀI TẬP

1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến?

a) Số 2^{100} có 50 chữ số khi viết trong hệ thập phân;

b) 0,0001 là số rất bé;

c) $2\sqrt{5} > 5$;

d) $2x + 1 > 0$;

e) Virus SARS-CoV-2 rất nguy hiểm, đúng không?

2. Hãy viết ba câu là mệnh đề, ba câu không phải là mệnh đề.

3. Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau đây và xét tính đúng sai của các mệnh đề phủ định đó.

a) P: "Năm 2020 là năm nhuận";

b) Q: "$\sqrt{2}$ không phải là số vô tỉ";

c) R: "Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm".

4. Với mỗi cặp mệnh đề P và Q sau đây, hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó.

a) P: "Hai tam giác ABC và DEF bằng nhau";

Q: "Hai tam giác ABC và DEF đồng dạng".

b) P: "$b^2 \geq 4ac$";

Q: "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm" (a, b, c là ba số thực nào đó, $a \neq 0$).

5. Ta có thể phát biểu lại mệnh đề:

"Mỗi hình thoi là một hình bình hành"

thành mệnh đề kéo theo:

"Nếu một tứ giác là hình thoi thì nó là một hình bình hành".

Hãy phát biểu lại mỗi mệnh đề sau thành mệnh đề kéo theo:

a) Hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau;

b) Tổng của hai số hữu tỉ là một số hữu tỉ;

c) Lập phương của một số âm là một số âm.

6. Phát biểu mệnh đề đảo của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó.

a) Nếu một số chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3;

b) Nếu tam giác ABC có $AB = AC$ thì tam giác ABC cân;

c) Nếu tam giác ABC có hai góc bằng 60° thì tam giác ABC đều.

7. Sử dụng các thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ", "điều kiện cần và đủ" và cặp mệnh đề P, Q sau đây để thành lập một mệnh đề đúng.

a) P: "$a = b$"; Q: "$a^2 = b^2$" (a, b là hai số thực nào đó).

b) P: "Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau";

Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân".

c) P: "Tam giác ABC có hai góc bằng 45°", Q: "Tam giác ABC vuông cân".

8. Dùng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để viết các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

a) Mọi số thực khác 0 nhân với nghịch đảo của nó bằng 1.

b) Có số tự nhiên mà bình phương của nó bằng 20.

c) Bình phương của mọi số thực đều dương.

d) Có ba số tự nhiên khác 0 sao cho tổng bình phương của hai số bằng bình phương của số còn lại.

9. Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) $\exists x \in \mathbb{N}, 2x^2 + x = 1$;

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 5 > 4x$.

Bài 2. TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tập hợp và phần tử

– Mỗi tập hợp có các phần tử hoàn toàn xác định.

– Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập rỗng, kí hiệu $\varnothing$.

– Để chỉ a là phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$; ngược lại, ta viết $a \notin A$.

– Người ta thường biểu thị tập hợp dưới dạng ***liệt kê các phần tử*** hoặc ***chỉ ra tính chất*** đặc trưng của các phần tử.

Chú ý: Khi liệt kê các phần tử của tập hợp, ta có một số chú ý sau đây:

a) Các phần tử có thể được viết theo thứ tự tuỳ ý.

b) Mỗi phần tử chỉ được liệt kê một lần.

c) Nếu quy tắc xác định các phần tử đủ rõ thì người ta dùng "..." mà không nhất thiết viết ra tất cả các phần tử của tập hợp.

2. Tập con và hai tập hợp bằng nhau

– A là tập con của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, kí hiệu $A \subset B$.

Chú ý:

+ $A \subset A$ và $\varnothing \subset A$ với mọi tập hợp A.

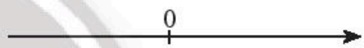
+ Nếu A không phải là tập con của B thì ta kí hiệu $A \not\subset B$ (đọc là *A không chứa trong B* hoặc *B không chứa A*).

+ Nếu $A \subset B$ hoặc $B \subset A$ thì ta nói A và B có quan hệ bao hàm.

– Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau, kí hiệu $A = B$, nếu $A \subset B$ và $B \subset A$.

3. Một số tập con của tập số thực

Sau này ta thường sử dụng các tập con của tập số thực sau đây (a và b là các số thực, $a < b$):

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số
Tập số thực $(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	
Khoảng $(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng $[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	
Nửa khoảng $(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$	
Nửa khoảng $[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	
Khoảng $(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng $(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	

Trong các kí hiệu trên, kí hiệu $-\infty$ đọc là *âm vô cực* (*âm vô cùng*), kí hiệu $+\infty$ đọc là *dương vô cực* (*dương vô cùng*).

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Viết các tập hợp sau đây dưới dạng liệt kê các phần tử:

a) $A = \{x \mid x = 2k - 3, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$; b) $B = \left\{\dfrac{m}{m+5} \mid m \in \mathbb{Z}, |m| \leq 3\right\}$;

c) $C = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 7 - x, x \in \mathbb{N}\}$; d) $D = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + y \leq 3\}$.

Giải

a) $A = \{-3; -1; 1; 3\}$.

b) Các giá trị của m thoả mãn $m \in \mathbb{Z}, |m| \leq 3$ là $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$. Thay lần lượt các giá trị này vào biểu thức $\dfrac{m}{m+5}$ ta được $B = \left\{-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{4}; 0; \dfrac{1}{6}; \dfrac{2}{7}; \dfrac{3}{8}\right\}$.

c) Vì $y = 7 - x \in \mathbb{N}$ nên $7 - x \geq 0$ hay $x \leq 7$. Mà $x \in \mathbb{N}$ nên x chỉ nhận các giá trị $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$. Từ đó, y nhận các giá trị tương ứng $7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0$.

Vậy $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

d) Vì $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + y \leq 3$ nên $x \leq 3$. Ứng với mỗi giá trị $x \in \{0; 1; 2; 3\}$, ta tìm các giá trị $y \in \mathbb{N}$ thoả mãn $x + y \leq 3$, ta được bảng sau:

x	0	1	2	3
y	0; 1; 2; 3	0; 1; 2	0; 1	0

Từ đó, $D = \{(0; 0); (0; 1); (0; 2); (0; 3); (1; 0); (1; 1); (1; 2); (2; 0); (2; 1); (3; 0)\}$.

Bài 2. Viết các tập hợp sau đây bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử:

a) $A = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$; b) $B = \{0; 3; 6; 9; 12; \ldots\}$;

c) $C = \left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \ldots\right\}$; d) D là tập hợp các số tự nhiên lẻ.

Giải

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là ước của $28\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là bội của $3\}$ hoặc $B = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$.

c) $C = \left\{\dfrac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$ hoặc $C = \left\{x \mid x = \dfrac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là số lẻ$\}$ hoặc $D = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$.

Bài 3. Viết các tập hợp con của các tập hợp sau đây:

a) $\varnothing$; b) $\{0\}$;

c) Tập nghiệm của phương trình $x(x^2 - 1) = 0$.

Giải

a) Tập rỗng $\varnothing$ chỉ có đúng một tập hợp con là chính nó.

b) $\{0\}$ có hai tập hợp con là $\varnothing$ và $\{0\}$.

c) Tập nghiệm của phương trình $x(x^2 - 1) = 0$ là $A = \{-1; 0; 1\}$. Các tập hợp con của A là:

+ Có không phần tử: $\varnothing$;

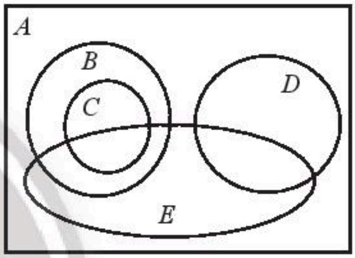
+ Có một phần tử: $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$;

+ Có hai phần tử: $\{-1; 0\}$, $\{-1; 1\}$, $\{0; 1\}$;

+ Có ba phần tử: $\{-1; 0; 1\}$.

Vậy tập hợp A có 8 tập hợp con.

Bài 4. Biểu đồ ở Hình 1 biểu diễn quan hệ bao hàm giữa các tập hợp "Học sinh của trường", "Học sinh nữ của trường", "Học sinh khối 10", "Học sinh khối 11", "Học sinh lớp 10A". Viết chú thích các tập hợp A, B, C, D, E cho biểu đồ và viết các quan hệ bao hàm giữa các tập hợp đó.



Hình 1

Giải

A là tập hợp các học sinh của trường;

B là tập hợp các học sinh khối 10;

C là tập hợp các học sinh lớp 10A;

D là tập hợp các học sinh khối 11;

E là tập hợp các học sinh nữ của trường.

Ta có các quan hệ bao hàm: $C \subset B \subset A$; $D \subset A$; $E \subset A$.

Bài 5. Cho hai tập hợp $A = \{1; a; 5\}$, $B = \{a + 2; 3; b\}$ với a, b là các số thực. Biết rằng $A = B$, hãy xác định a và b.

Giải

Vì $3 \in B$ và $A = B$ nên ta có $3 \in A = \{1; a; 5\}$, do đó, $a = 3$. Khi đó, $B = \{5; 3; b\}$. Vì $1 \in A$ và $A = B$ nên ta có $1 \in B = \{5; 3; b\}$. Suy ra, ta có $b = 1$.

Khi đó, $A = B = \{1; 3; 5\}$.

Vậy các giá trị cần tìm là $a = 3$, $b = 1$.

C. BÀI TẬP

1. Viết các tập hợp sau đây dưới dạng liệt kê các phần tử:

a) $A = \{x \mid x^2 - 2x - 15 = 0\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$;

c) $C = \left\{\frac{n}{n^2 - 1} \mid n \in \mathbb{N}, 1 < n \leq 4\right\}$; d) $D = \{(x; y) \mid x \leq 2, y < 2, x, y \in \mathbb{N}\}$.

2. Viết các tập hợp sau đây bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử:

a) $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; b) $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$;

c) $C = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right\}$;

d) Tập hợp D các số thực lớn hơn hoặc bằng 3 và bé hơn 8.

3. Điền kí hiệu ($\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $=$) thích hợp vào chỗ chấm.

a) $0 \ldots \{0; 1; 2\}$; b) $\{0; 1\} \ldots \mathbb{Z}$;

c) $0 \ldots \{x \mid x^2 = 0\}$; d) $\{0\} \ldots \{x \mid x^2 = x\}$;

e) $\varnothing \ldots \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 0\}$; g) $\{4; 1\} \ldots \{x \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$;

h) $\{n; a; m\} \ldots \{m; a; n\}$; i) $\{nam\} \ldots \{n; a; m\}$.

4. Điền kí hiệu ($\subset$, $\supset$, $=$) thích hợp vào chỗ chấm.

a) $\{x \mid x(x-1)(x+1) = 0\} \ldots \{x \mid |x| < 2, x \in \mathbb{Z}\}$;

b) $\{3; 6; 9\} \ldots \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là ước của $18\}$;

c) $\{x \mid x = 5k, k \in \mathbb{N}\} \ldots \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là bội của $5\}$;

d) $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \ldots \{x \mid x = 2m, m \in \mathbb{N}\}$.

5. Hãy chỉ ra các quan hệ bao hàm giữa các tập hợp sau và vẽ biểu đồ Ven để biểu diễn các quan hệ đó:

$A = \{x \mid x$ là tứ giác$\}$; $B = \{x \mid x$ là hình vuông$\}$;

$C = \{x \mid x$ là hình chữ nhật$\}$; $D = \{x \mid x$ là hình bình hành$\}$.

6. Tìm tất cả các tập hợp A thoả mãn điều kiện $\{a; b\} \subset A \subset \{a; b; c; d\}$.

7. Cho các tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Hãy tìm tập hợp M có nhiều phần tử nhất thoả mãn $M \subset A$ và $M \subset B$.

8. Viết các tập hợp sau đây dưới dạng liệt kê các phần tử:

a) $A = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 10 - x^2, x \in \mathbb{N}\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{6-x} \in \mathbb{N}\right\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 3 \geq 0$ và $7 - x \geq 2\}$; d) $D = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + 2y = 8\}$.

9. Cho hai tập hợp $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và $B = \{6l + 3 \mid l \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng $B \subset A$.

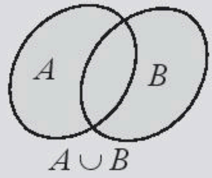
10. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; a\}$ và $B = \{1; a^2\}$. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho $B \subset A$.

Bài 3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hợp của hai tập hợp (Hình 1)

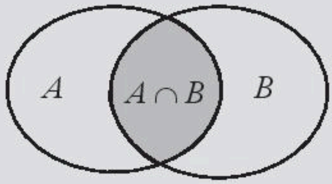
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$



Hình 1

2. Giao của hai tập hợp (Hình 2)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$



Hình 2

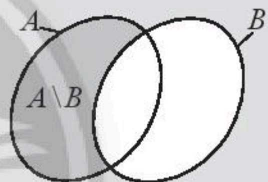
3. Công thức tính số phần tử

Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

4. Hiệu của hai tập hợp (Hình 3)

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

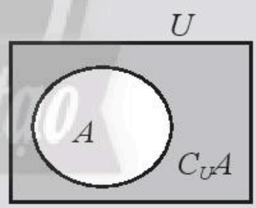


Hình 3

5. Phần bù của tập hợp con (Hình 4)

$$C_U A = U \setminus A = \{x \mid x \in U \text{ và } x \notin A\}$$

(A là tập con của U).



Hình 4

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Kí hiệu A là tập hợp các học sinh của một trường trung học phổ thông, B là tập hợp các học sinh nữ của trường, C, D lần lượt là tập hợp các học sinh khối 10, khối 11 của trường.

a) Hãy vẽ biểu đồ Ven biểu diễn các tập hợp A, B, C, D.

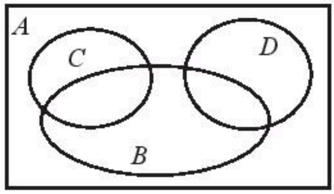
b) Hãy mô tả các tập hợp sau đây:

$M = B \cap C$; $\quad N = C \cup D$; $\quad P = A \setminus C$;

$R = C_A B$; $\quad S = C \setminus B$; $\quad T = A \setminus (C \cup D)$.

Giải

a) Biểu đồ biểu diễn các tập hợp A, B, C, D như Hình 5.



Hình 5

b) M là tập hợp các học sinh nữ khối 10 của trường.

N là tập hợp các học sinh khối 10 và khối 11 của trường.

P là tập hợp các học sinh khối 11 và khối 12 của trường.

R là tập hợp các học sinh nam của trường.

S là tập hợp các học sinh nam khối 10 của trường.

T là tập hợp các học sinh khối 12 của trường.

Bài 2. Trong các số tự nhiên từ 1 đến 30, có bao nhiêu số là bội của 4 hoặc 5?

Giải

Kí hiệu A, B lần lượt là tập hợp các số là bội của 4, bội của 5 trong các số tự nhiên từ 1 đến 30. Ta có:

$A = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28\}$; $\quad B = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$.

Tập hợp các số là bội của 4 hoặc 5 (trong các số từ 1 đến 30) là

$A \cup B = \{4; 5; 8; 10; 12; 15; 16; 20; 24; 25; 28; 30\}$.

Ta thấy $A \cup B$ có 12 phần tử. Vậy, trong các số tự nhiên từ 1 đến 30, có 12 số là bội của 4 hoặc 5.

Nhận xét: Ta có thể giải theo cách khác như sau:

Ta có: $A \cap B = \{20\}$, $n(A) = 7$, $n(B) = 6$, $n(A \cap B) = 1$.

Từ đó $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 + 6 - 1 = 12$.

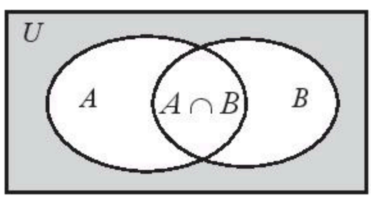
Bài 3. Trong một cuộc khảo sát người tiêu dùng, trong 100 người uống cà phê được khảo sát, có 55 người thêm đường, 65 người thêm sữa và 30 người thêm cả đường và sữa. Trong số 100 người đó,

a) có bao nhiêu người thêm ít nhất đường hoặc sữa?

b) có bao nhiêu người không thêm đường hoặc sữa?

Giải

Kí hiệu U là tập hợp 100 người được khảo sát, A là tập hợp người thêm đường, B là tập hợp người thêm sữa (trong số 100 người đó).



Hình 6

Khi đó, $A \cap B$ là tập hợp người thêm cả đường và sữa, $A \cup B$ là tập hợp người thêm ít nhất đường hoặc sữa.

Theo giả thiết ta có $n(A) = 55$, $n(B) = 65$, $n(A \cap B) = 30$.

a) Số người thêm ít nhất đường hoặc sữa là

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 55 + 65 - 30 = 90.$$

b) Số người không thêm đường hoặc sữa là

$$n(U) - n(A \cup B) = 100 - 90 = 10.$$

Bài 4. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 2a - 1\}$, $B = \{0; b; 2b - 5\}$ với a, b là những số thực. Biết rằng $A \cap B = \{1; 3\}$, hãy tìm giá trị của a và b.

Giải

Vì $A \cap B = \{1; 3\}$ nên $3 \in A = \{1; 2; 2a - 1\}$, do đó, $2a - 1 = 3$ hay $a = 2$.

Cũng vì $A \cap B = \{1; 3\}$ nên $\{1; 3\} \subset B = \{0; b; 2b - 5\}$. Điều này xảy ra trong hai trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: $\begin{cases} b = 1 \\ 2b - 5 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = 4 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Trường hợp 2: $\begin{cases} b = 3 \\ 2b - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow b = 3$.

Khi $a = 2$, $b = 3$ ta có $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{0; 3; 1\}$ và $A \cap B = \{1; 3\}$.

Vậy $a = 2$, $b = 3$ là các giá trị cần tìm.

C. BÀI TẬP

1. Xác định $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ trong các trường hợp sau:

a) $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{a; c; e\}$;

b) $A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 = 1\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là số lẻ, $x < 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là các ước của $12\}$.

2. Cho hai tập hợp $A = \{(x; y) \mid 3x - 2y = 11\}$, $B = \{(x; y) \mid 2x + 3y = 3\}$. Hãy xác định tập hợp $A \cap B$.

3. Cho các tập hợp $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$, $C = \{3; 4; 5; 6\}$. Hãy xác định các tập hợp:

a) $(A \cup B) \cap C$; b) $A \cap (B \cap C)$;

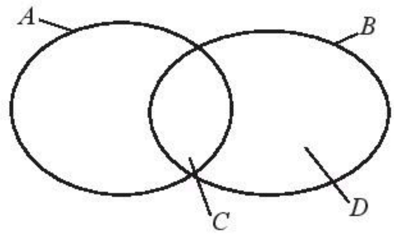
c) $A \setminus (B \cap C)$; d) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

4. Kí hiệu A là tập hợp các học sinh nữ của trường, B là tập hợp các học sinh khối 10 của trường; C, D lần lượt là tập hợp các học sinh nữ, các học sinh nam khối 10 của trường (Hình 7). Hãy điền kí hiệu tập hợp thích hợp vào chỗ chấm.

a) $A \cap B = \ldots$; b) $C \cup D = \ldots$;

c) $B \setminus A = \ldots$; d) $B \cap C = \ldots$;

e) $C \setminus A = \ldots$; g) $D \setminus A = \ldots$.



Hình 7

5. Cho A là tập hợp tuỳ ý. Hãy điền kí hiệu tập hợp thích hợp vào chỗ chấm.

a) $A \cap A = \ldots$; b) $A \cup A = \ldots$; c) $A \cap \varnothing = \ldots$; d) $A \cup \varnothing = \ldots$;

e) $A \setminus A = \ldots$; g) $A \setminus \varnothing = \ldots$; h) $\varnothing \setminus A = \ldots$.

6. Cho A, B là hai tập hợp tuỳ ý. Hãy điền kí hiệu tập hợp thích hợp vào chỗ chấm.

a) Nếu $B \subset A$ thì $A \cap B = \ldots$, $A \cup B = \ldots$ và $B \setminus A = \ldots$;

b) Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $A \setminus B = \ldots$ và $B \setminus A = \ldots$.

7. Cho các tập con $A = [-1; 3]$ và $B = [0; 5)$ của tập số thực $\mathbb{R}$.
Hãy xác định $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

8. Lớp 10E có 18 bạn chơi cầu lông, 15 bạn chơi cờ vua, 10 bạn chơi cả hai môn và 12 bạn không chơi môn nào trong hai môn thể thao này.

a) Lớp 10E có bao nhiêu bạn chơi ít nhất một môn thể thao trên?

b) Lớp 10E có bao nhiêu học sinh?

9. Biết rằng tập hợp M thoả mãn $M \cap \{1; 3\} = \{1\}$, $M \cap \{5; 7\} = \{5\}$, $M \cap \{9; 11\} = \{9\}$ và $M \subset \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$. Hãy tìm M.

10. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$,

a) tìm tất cả các tập hợp B sao cho $A \cup B = A$;

b) tìm tất cả các tập hợp C sao cho $A \cap C = C$.

11. Cho $U = \{3; 5; a^2\}$, $A = \{3; a + 4\}$. Tìm giá trị của a sao cho $C_U A = \{1\}$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A. TRẮC NGHIỆM

1. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 = \{0\}$; B. $0 \in \{0\}$; C. $0 \subset \{0\}$; D. $0 = \varnothing$;

2. Biết rằng $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. P là điều kiện cần để có Q; B. P là điều kiện đủ để có Q;

C. Q là điều kiện cần và đủ để có P; D. Q là điều kiện đủ để có P.

3. Cho số thực x. Mệnh đề nào sau đây là điều kiện đủ của "$x > 1$"?

A. $x > 0$; B. $x \geq 1$; C. $x < 1$; D. $x \geq 2$.

4. Mệnh đề nào sau đây sai?

(1) $\varnothing \in \{0\}$; (2) $\{1\} \subset \{0; 1; 2\}$;

(3) $\{0\} = \varnothing$; (4) $\{0\} \subset \{x \mid x^2 = x\}$.

A. (1) và (3); B. (1) và (4); C. (2) và (4); D. (2) và (3).

5. Cho tập hợp $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 5 - m, m \in \mathbb{N}\}$. Số phần tử của M bằng:

A. 4; B. 5; C. 6; D. 10.

6. Tập hợp $\{y \in \mathbb{N} \mid y = 5 - x^2, x \in \mathbb{N}\}$ có bao nhiêu tập con?

A. 3; B. 4; C. 8; D. 16.

7. Cho $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{x \mid x + 1 \leq 0\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng:

A. $\{0; 1; 2\}$; B. $\{-1\}$; C. $\{-2; -1\}$; D. $\{-2\}$.

8. Cho các tập hợp $A = \{-1; 0; 1; 2\}$, $B = \{x \mid x - 1 \geq 0\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng

A. $\{2\}$; B. $\{-1; 0; 1\}$; C. $\{1; 2\}$; D. $\{-1; 0\}$.

9. Cho $A = \{x \mid x$ là hình bình hành$\}$, $B = \{x \mid x$ là hình chữ nhật$\}$, $C = \{x \mid x$ là hình thoi$\}$, $D = \{x \mid x$ là hình vuông$\}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $B \cap C = D$; B. $C \cap D = D$; C. $B \cup C = D$; D. $B \cap D = D$.

10. Cho tập hợp $A = \{x \mid x > a\}$, $B = \{x \mid 1 < x < 2\}$. Để $A \cup (C_{\mathbb{R}}B) = \mathbb{R}$, điều kiện cần và đủ là

A. $a \leq 1$; B. $a < 1$; C. $a \geq 2$; D. $a > 2$.

B. TỰ LUẬN

1. Cho ba tập hợp A, B, C thoả mãn $A \subset C$, $B \subset C$ và $A \cap B = \varnothing$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

   a) Nếu $x \in A$ thì $x \in C$;

   b) $x \in A$ là điều kiện cần để $x \in C$;

   c) $x \in B$ là điều kiện đủ để $x \in C$;

   d) Nếu $x \in A$ thì $x \notin B$;

   e) $x \in B$ là điều kiện đủ để $x \notin A$.

2. Cho tập hợp $A = \{1; 2\}$. Tìm tất cả các tập hợp B thoả mãn $A \cup B = \{1; 2; 3\}$.

3. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$. Tìm tất cả các tập hợp M thoả mãn $M \subset A$ và $M \cap B = \varnothing$.

4. Một lớp học có 36 học sinh, trong đó 20 người thích bóng rổ, 14 người thích bóng bàn và 10 người không thích môn nào trong hai môn thể thao này.

   a) Có bao nhiêu học sinh của lớp thích cả hai môn trên?

   b) Có bao nhiêu học sinh của lớp thích bóng rổ nhưng không thích bóng bàn?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. MỆNH ĐỀ

1. a) và c) là mệnh đề; d) là mệnh đề chứa biến.

3. a) $\overline{P}$: "Năm 2020 không phải là năm nhuận", là mệnh đề sai.

   b) $\overline{Q}$: "$\sqrt{2}$ là số vô tỉ", là mệnh đề đúng.

   c) $\overline{R}$: "Phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm", là mệnh đề đúng.

4. a) $P \Rightarrow Q$: "Nếu hai tam giác ABC và DEF bằng nhau thì chúng đồng dạng". Mệnh đề này đúng.

   b) $P \Rightarrow Q$: "Nếu $b^2 \geq 4ac$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm".

   Mệnh đề này sai.

5. a) Nếu một tứ giác là hình chữ nhật thì nó có hai đường chéo bằng nhau.

   b) Nếu hai số nào đó đều là số hữu tỉ thì tổng của chúng cũng là số hữu tỉ.

   c) Nếu một số nào đó là số âm thì lập phương của nó cũng là số âm.

6. a) Nếu một số chia hết cho 3 thì nó chia hết cho 6. Mệnh đề này sai.

b) Nếu tam giác ABC cân thì $AB = AC$. Mệnh đề này sai.

c) Nếu tam giác ABC đều thì nó có hai góc bằng 60°. Mệnh đề này đúng.

7. a) Ta có khi P đúng thì Q đúng. Do đó, mệnh đề $P \Rightarrow Q$ đúng.

Phát biểu: "Với a và b là hai số thực nào đó, $a = b$ là điều kiện đủ để $a^2 = b^2$" (hoặc "$a^2 = b^2$ là điều kiện cần để $a = b$").

b) Ta có khi Q đúng thì P đúng. Do đó, mệnh đề $Q \Rightarrow P$ đúng.

Phát biểu: "Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau là điều kiện cần để nó là hình thang cân" (hoặc "Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân là điều kiện đủ để nó có hai đường chéo bằng nhau").

c) P và Q là hai mệnh đề tương đương.

Phát biểu: "Để tam giác vuông cân, điều kiện cần và đủ là nó có hai góc bằng 45°".

8. a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$. Mệnh đề đúng.

b) $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = 20$. Mệnh đề sai.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$. Mệnh đề sai.

d) $\exists x, y, z \in \mathbb{N}^*, x^2 + y^2 = z^2$. Mệnh đề đúng.

9. a) Xét phương trình $2x^2 + x = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$.

Phương trình bậc hai này có hai nghiệm $x = -1$ và $x = \dfrac{1}{2}$. Nhưng hai nghiệm đều không phải là số tự nhiên. Do đó, mệnh đề sai.

Mệnh đề phủ định là: $\forall x \in \mathbb{N}, 2x^2 + x \neq 1$.

b) Với mọi số thực x, ta có $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1 > 0$.

Do đó, $x^2 + 5 > 4x$. Suy ra mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 5 > 4x$ đúng.

Mệnh đề phủ định: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 5 \leq 4x$.

Bài 2. TẬP HỢP

1. a) $A = \{-3; 5\}$; b) $B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$;

c) $C = \left\{\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{8}; \dfrac{4}{15}\right\}$; d) $D = \{(0; 0); (0; 1); (1; 0); (1; 1); (2; 0); (2; 1)\}$.

2. a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 4\}$ hoặc $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$ hoặc $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$.

b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ chẵn}, x \leq 10\}$ hoặc $B = \{x \mid x = 2k, k = 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

c) $C = \left\{\frac{1}{n} \mid n = 1; 2; 3; 4; 5\right\}$ hoặc $C = \left\{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 5\right\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x < 8\}$.

3. a) $\in$; b) $\subset$; c) $\in$; d) $\subset$;
e) $=$; g) $=$; h) $=$; i) $\not\subset$.

4. a) $=$; b) $\subset$; c) $=$; d) $\subset$.

5. $B \subset C \subset D \subset A$.

6. $\{a; b\}$, $\{a; b; c\}$, $\{a; b; d\}$, $\{a; b; c; d\}$.

7. $M = \{1; 3; 5\}$.

8. a) $A = \{1; 6; 9; 10\}$; b) $B = \{0; 3; 4; 5\}$;
c) $C = \{2; 3; 4; 5\}$; d) $D = \{(8; 0), (6; 1), (4; 2), (2; 3), (0; 4)\}$.

9. Lấy phần tử x tuỳ ý của B, ta có $x = 6l + 3$, $l \in \mathbb{Z}$.
Ta viết $x = 2 \,.\, 3l + 2 + 1 = 2(3l + 1) + 1 = 2k + 1$ với $k = 3l + 1 \in \mathbb{Z}$. Suy ra $x \in A$.
Vậy, với mọi $x \in B$ ta đều có $x \in A$. Do đó, $B \subset A$.

10. Ta có $B \subset A$ nếu $a^2 = 1$ hoặc $a^2 = 2$ hoặc $a^2 = a$.
Từ đó tìm được các giá trị của a là: $-\sqrt{2}; -1; 0; 1; \sqrt{2}$.

Bài 3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1. a) $A \cap B = \{a; c\}$, $A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$, $A \setminus B = \{b; d\}$, $B \setminus A = \{e\}$.
b) $A = \{-1; 6\}$, $B = \{-1; 1\}$, $A \cap B = \{-1\}$, $A \cup B = \{-1; 1; 6\}$, $A \setminus B = \{6\}$, $B \setminus A = \{1\}$.
c) $A = \{1; 3; 5; 7\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, $A \cap B = \{1; 3\}$,
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 12\}$, $A \setminus B = \{5; 7\}$, $B \setminus A = \{2; 4; 6; 12\}$.

2. Ta thấy $(x; y) \in A \cap B$ khi $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$(I)\begin{cases} 3x - 2y = 11 & (1) \\ 2x + 3y = 3 & (2) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với 3, nhân hai vế của (2) với 2, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 9x - 6y = 33 \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ này, ta được $13x = 39$ hay $x = 3$.

Thay $x = 3$ vào (1) ta được $9 - 2y = 11$. Từ đây tìm được $y = -1$.

Vậy, hệ phương trình (I) có một nghiệm là $(3; -1)$. Từ đó, $A \cap B = \{(3; -1)\}$.

3. a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$, $(A \cup B) \cap C = \{3; 4; 5\}$.

b) $B \cap C = \{3; 4\}$, $A \cap (B \cap C) = \{3\}$.

c) $A \setminus (B \cap C) = \{1; 5; 7; 9\}$.

d) $A \setminus B = \{5; 7; 9\}$, $A \setminus C = \{1; 7; 9\}$, $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{1; 5; 7; 9\}$.

4. a) $A \cap B = C$; b) $C \cup D = B$; c) $B \setminus A = D$;
d) $B \cap C = C$; e) $C \setminus A = \varnothing$; g) $D \setminus A = D$.

5. a) $A \cap A = A$; b) $A \cup A = A$; c) $A \cap \varnothing = \varnothing$; d) $A \cup \varnothing = A$;
e) $A \setminus A = \varnothing$; g) $A \setminus \varnothing = A$; h) $\varnothing \setminus A = \varnothing$.

6. a) $A \cap B = B$; $A \cup B = A$; $B \setminus A = \varnothing$;

b) $A \setminus B = A$; $B \setminus A = B$.

7. $A \cap B = [0; 3]$, $A \cup B = [-1; 5)$, $A \setminus B = [-1; 0)$, $B \setminus A = (3; 5)$.

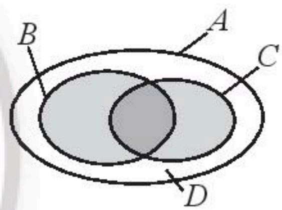
8. Kí hiệu A là tập hợp các học sinh của lớp 10E,

$B = \{x \in A \mid x \text{ chơi cầu lông}\}$,

$C = \{x \in A \mid x \text{ chơi cờ vua}\}$,

$D = \{x \in A \mid x \text{ không chơi cầu lông, cũng không chơi cờ vua}\}$.

Theo giả thiết, $n(B) = 18$, $n(C) = 15$, $n(B \cap C) = 10$ và $n(D) = 12$.



Hình 1

a) Số học sinh của lớp 10E chơi ít nhất một môn thể thao:

$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) = 18 + 15 - 10 = 23$.

b) Số học sinh của lớp: $n(A) = n(B \cup C) + n(D) = 23 + 12 = 35$.

9. $M = \{1; 5; 9\}$.

10. a) $A \cup B = A$ khi và chỉ khi B là tập con của A. Các tập hợp cần tìm là: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$, $\{1; 2; 3\}$.

b) $A \cap C = C$ khi và chỉ khi C là tập con của A. Kết quả như trên.

11. Để $C_U A = \{1\}$, trước hết ta phải có $1 \in U = \{3; 5; a^2\}$. Suy ra $a^2 = 1$ nên $a = 1$ hoặc $a = -1$.

Với $a = 1$, ta có $U = \{1; 3; 5\}$ và $A = \{3; 5\}$. Khi đó, $C_U A = \{1\}$ (thoả mãn).

Với $a = -1$, ta có $U = \{1; 3; 5\}$ và $A = \{3\}$. Khi đó, $C_U A = \{1; 5\}$ (không thoả mãn).

Vậy, $a = 1$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A. TRẮC NGHIỆM

1. B	**2.** B	**3.** D	**4.** A	**5.** C	**6.** C	**7.** A	**8.** D	**9.** C	**10.** B

B. TỰ LUẬN

1. a) Đúng; b) Sai; c) Đúng; d) Đúng; e) Đúng.

2. Cần tìm các tập hợp B sao cho $3 \in B$ và $B \subset \{1; 2; 3\}$. Các tập hợp B thoả mãn là: $\{3\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$, $\{1; 2; 3\}$.

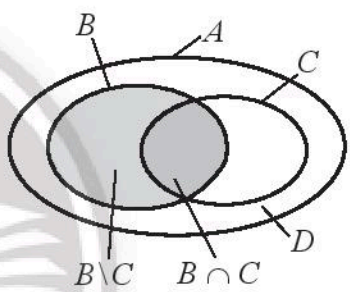
3. $M = \varnothing$, $M = \{1\}$, $M = \{2\}$, $M = \{1; 2\}$.

4. Kí hiệu A là tập hợp các học sinh của lớp,

$B = \{x \in A \mid x$ thích bóng rổ$\}$;

$C = \{x \in A \mid x$ thích bóng bàn$\}$;

$D = \{x \in A \mid x$ không thích môn nào trong hai môn$\}$.



Hình 1

Theo giả thiết,

$n(A) = 36$, $n(B) = 20$, $n(C) = 14$ và $n(D) = 10$.

a) Số học sinh thích một trong hai môn:

$n(B \cup C) = n(A) - n(D) = 36 - 10 = 26$.

Số học sinh thích cả hai môn thể thao:

$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C) = 20 + 14 - 26 = 8$.

b) Số học sinh thích bóng rổ nhưng không thích bóng bàn:

$n(B \setminus C) = n(B) - n(B \cap C) = 20 - 8 = 12$.

Chương II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

***Bất phương trình bậc nhất hai ẩn** x, y* là bất phương trình có một trong các dạng

$ax + by + c < 0$; $ax + by + c > 0$; $ax + by + c \leq 0$; $ax + by + c \geq 0$,

trong đó a, b, c là những số cho trước; a, b không đồng thời bằng 0 và x, y là các ẩn.

2. Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Xét bất phương trình $ax + by + c < 0$. Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thoả mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ gọi là một ***nghiệm*** của bất phương trình đã cho.

Chú ý: Nghiệm của các bất phương trình $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \leq 0$, $ax + by + c \geq 0$ được định nghĩa tương tự.

3. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

– Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là ***miền nghiệm*** của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

– Để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy, ta làm như sau:

+ *Bước 1:* Trên mặt phẳng Oxy, vẽ đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$.

+ *Bước 2:* Lấy một điểm $(x_0; y_0)$ không thuộc Δ. Tính $ax_0 + by_0 + c$.

+ *Bước 3:* Kết luận

- Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) chứa điểm $(x_0; y_0)$.
- Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) không chứa điểm $(x_0; y_0)$.

Chú ý: Đối với các bất phương trình bậc nhất hai ẩn dạng $ax + by + c \leq 0$ (hoặc $ax + by + c \geq 0$) thì miền nghiệm là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ (hoặc $ax + by + c > 0$) kể cả bờ.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Bạn Hoa để dành được 420 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em khuyết tật, Hoa đã ủng hộ x tờ tiền loại 10 nghìn đồng, y tờ tiền loại 20 nghìn đồng.

a) Tính tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ theo x, y.

b) Giải thích tại sao ta lại có bất phương trình $10x + 20y \leq 420$.

Giải

a) Tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ là $10x + 20y$.

b) Vì bạn Hoa chỉ có tất cả là 420 nghìn đồng, nên tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ không thể vượt quá 420 nghìn đồng. Vậy ta có $10x + 20y \leq 420$.

Bài 2. Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau:

a) $9x - 7y - 5 \leq 0$;

b) $y \geq 9x + 9$;

c) $y + 2\,022 > 0$;

d) $x - y^2 + 1 > 0$.

Giải

Các bất phương trình a), b), c) là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bất phương trình d) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có chứa y^2.

Bài 3. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $10x + 20y \leq 420$?

a) $(9; 5)$;

b) $(2; 400)$.

Giải

a) Ta có: $10 \,.\, 9 + 20 \,.\, 5 = 190 < 420$.

Vậy $(9; 5)$ là nghiệm của bất phương trình $10x + 20y \leq 420$.

b) Ta có: $10 \,.\, 2 + 20 \,.\, 400 = 8\,020 > 420$.

Vậy $(2; 400)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $10x + 20y \leq 420$.

Bài 4. Cho biết 226 g thịt bò chứa khoảng 59 g protein. Một quả trứng nặng 46 g có chứa khoảng 6 g protein (*nguồn:* Bộ Nông nghiệp Hoa Kỳ). Giả sử có một người mỗi ngày cần không quá 60 g protein. Gọi số gam thịt bò và số gam trứng mà người đó ăn trong một ngày lần lượt là x, y.

a) Lập bất phương trình theo x, y diễn tả giới hạn về lượng protein mà người đó cần mỗi ngày.

b) Dùng bất phương trình ở câu a) để trả lời hai câu hỏi sau:

– Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì có phù hợp không?

– Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì có phù hợp không?

Giải

a) Bất phương trình theo x, y diễn tả giới hạn về lượng protein mà người đó cần mỗi ngày là:

$$\frac{59}{226}x + \frac{6}{46}y = \frac{59}{226}x + \frac{3}{23}y \leq 60.$$

b) Ta có:

$$\frac{59}{226} . 150 + \frac{3}{23} . 2 . 46 \approx 51{,}16 < 60;$$

$$\frac{59}{226} . 200 + \frac{3}{23} . 2 . 46 \approx 64{,}21 > 60.$$

Suy ra:

– Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng trong một ngày thì phù hợp.

– Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng trong một ngày thì không phù hợp.

Bài 5. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

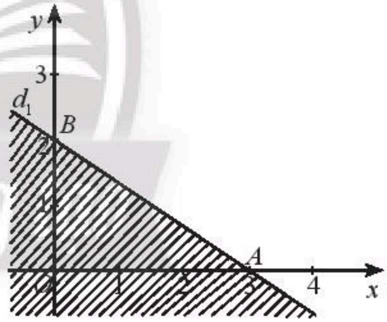
a) $2x + 3y - 6 > 0$; b) $x + 2y - 8 \leq 0$; c) $y - 3 \leq 0$.

Giải

a) Vẽ đường thẳng d_1: $2x + 3y = 6$ đi qua hai điểm $A(3; 0)$ và $B(0; 2)$.

Xét gốc toạ độ $O(0; 0)$.

Ta thấy $O \notin d_1$ và $2 . 0 + 3 . 0 - 6 < 0$. Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không kể bờ d_1, không chứa gốc toạ độ O (*miền không gạch chéo trên Hình 1*).

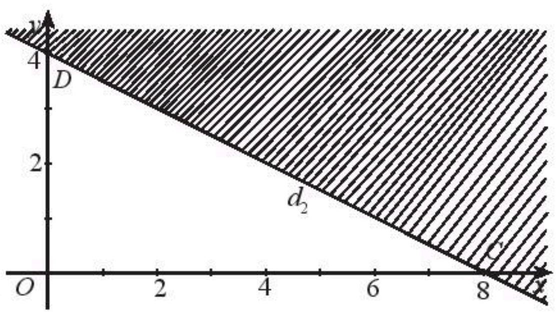


Hình 1

b) Vẽ đường thẳng d_2: $x + 2y = 8$ đi qua hai điểm $C(8; 0)$ và $D(0; 4)$.

Xét gốc toạ độ $O(0; 0)$.

Ta thấy $O \notin d_2$ và $0 + 2 . 0 - 8 < 0$. Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ d_2, chứa gốc toạ độ O (*miền không gạch chéo trên Hình 2*).

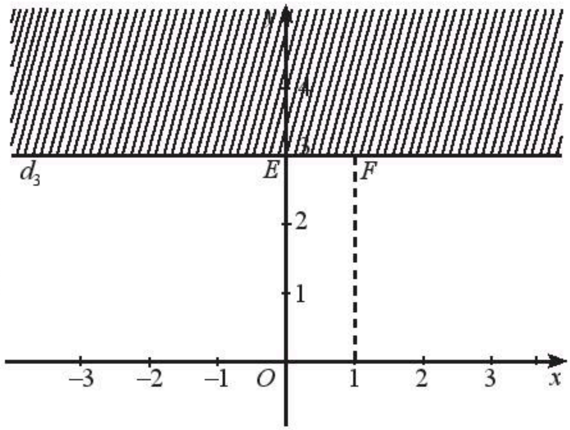


Hình 2

c) Vẽ đường thẳng d_3: $y = 3$ đi qua hai điểm $E(0; 3)$ và $F(1; 3)$.

Xét gốc toạ độ $O(0; 0)$.

Ta thấy $O \notin d_3$ và $0 - 3 < 0$. Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ d_3, chứa gốc toạ độ O (*miền không gạch chéo trên Hình 3*).



Hình 3

C. BÀI TẬP

1. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn: $2x - 5y + 10 > 0$.

a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình trên mặt phẳng Oxy.

b) $(1; 3)$ có phải là nghiệm của bất phương trình trên không?

c) Chỉ ra 2 cặp số $(x; y)$ thoả mãn bất phương trình trên.

2. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng toạ độ Oxy:

a) $x + y - 1 > 0$; b) $x - 1 \geq 0$; c) $-y + 2 \leq 0$.

3. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ Oxy:

a) $3x + 2y < x - y + 8$; b) $2(x - 1) + 3(y - 2) > 2$.

4. Bạn Nga muốn pha hai loại nước rửa xe. Để pha một lít loại I cần 600 ml dung dịch chất tẩy rửa, còn loại II chỉ cần 400 ml. Gọi x và y lần lượt là số lít nước rửa xe loại I và II pha chế được và biết rằng Nga chỉ còn 2 400 ml chất tẩy rửa, hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại I và II mà bạn Nga có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Bài 2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một ***nghiệm*** của hệ bất phương trình đã cho.

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ có toạ độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là ***miền nghiệm*** của hệ bất phương trình đó.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Để ***biểu diễn miền nghiệm*** của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ Oxy, ta thực hiện như sau:

– Trên cùng mặt phẳng toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.

– Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

Chú ý: Miền mặt phẳng toạ độ bao gồm một đa giác lồi và phần nằm bên trong đa giác đó được gọi là một ***miền đa giác***.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác

Hệ bất phương trình giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu, các bài toán này thường được đưa về việc tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác.

Ví dụ. Một người dùng ba loại nguyên liệu A, B, C để sản xuất ra hai loại sản phẩm P và Q. Để sản xuất 1 kg mỗi loại sản phẩm P hoặc Q phải dùng một số kilôgam nguyên liệu khác nhau. Tổng số kilôgam nguyên liệu mỗi loại mà người đó có và số kilôgam từng loại nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra 1 kg sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số kilôgam nguyên liệu đang có	Số kilôgam từng loại nguyên liệu cần để sản xuất 1 kg sản phẩm	
		P	Q
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Biết 1 kg sản phẩm P lãi 3 triệu đồng và 1 kg sản phẩm Q lãi 5 triệu đồng. Hãy lập phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất.

Phương pháp giải

Để giải bài toán tìm phương án tối ưu ở trên, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Đặt biến số x, y cho các đối tượng cần tìm.

Ví dụ. Đặt x là số kilôgam sản phẩm P và y là số kilôgam sản phẩm Q cần sản xuất.

Bước 2. Lập các hệ bất phương trình mô tả các điều kiện ràng buộc.

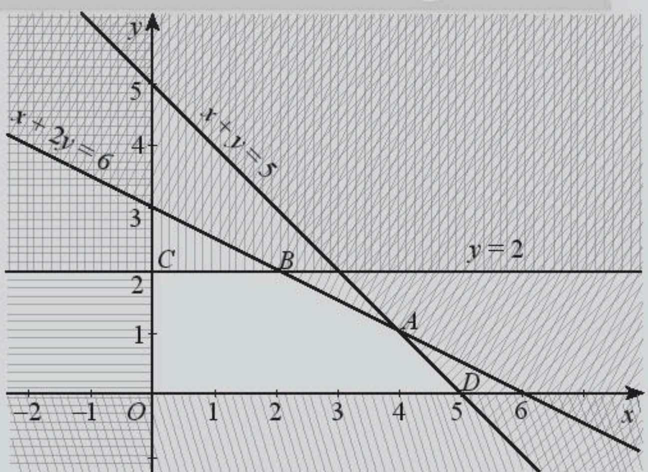
Ví dụ. $$\begin{cases} 2x+2y\le 10 \\ 2y\le 4 \\ 2x+4y\le 12 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\le 5 \\ y\le 2 \\ x+2y\le 6 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Bước 3. Xây dựng hàm mục tiêu cho giá trị mà ta muốn đạt giá trị tối ưu.

Ví dụ. $F = 3x + 5y$ (Tiền lãi của phương án sản xuất mà ta muốn đạt lớn nhất).

Bước 4. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) trên hệ trục toạ độ Oxy ta được một đa giác. Tìm toạ độ các đỉnh của đa giác.

Ví dụ. Miền nghiệm là ngũ giác $OCBAD$, trong đó $O(0; 0)$; $C(0; 2)$; $B(2; 2)$; $A(4; 1)$; $D(5; 0)$.



Hình 1

Bước 5. Do người ta đã chứng minh được F đạt GTLN hoặc GTNN tại một trong các đỉnh của đa giác nên ta chỉ cần tính các giá trị của hàm mục tiêu F tại các đỉnh của đa giác. Tìm ra đỉnh tại đó F đạt GTLN hoặc GTNN. Toạ độ của đỉnh này là phương án tối ưu cần tìm.

Ví dụ. Tính giá trị của F tại các đỉnh:

Tại $O(0; 0)$: $F = 3 . 0 + 5 . 0 = 0$; Tại $C(0; 2)$: $F = 3 . 0 + 5 . 2 = 10$;

Tại $B(2; 2)$: $F = 3 . 2 + 5 . 2 = 16$; Tại $A(4; 1)$: $F = 3 . 4 + 5 . 1 = 17$;

Tại $D(5; 0)$: $F = 3 . 5 + 5 . 0 = 15$.

Tại đỉnh $A(4; 1)$, F đạt giá trị lớn nhất là 17.

Bước 6. Nêu kết luận dựa trên ngôn ngữ thực tế của bài toán.

Ví dụ. Vậy phương án sản xuất tối ưu là làm ra 4 kg sản phẩm P và 1 kg sản phẩm Q. Khi đó sẽ có lãi cao nhất là 17 triệu đồng.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho các bất phương trình bậc nhất hai ẩn $2x + 3y - 5 \leq 0$ và $x + 5y + 1 \geq 0$. Cặp số nào sau đây thoả mãn đồng thời cả hai bất phương trình đã cho?

a) $(1; 1)$; b) $(2; 5)$; c) $(-8; 5)$.

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} 2 . 1 + 3 . 1 - 5 = 0 \leq 0 \\ 1 + 5 . 1 + 1 = 7 \geq 0. \end{cases}$

Vậy $(1; 1)$ thoả mãn đồng thời cả hai bất phương trình đã cho.

b) Ta có: $\begin{cases} 2 . 2 + 3 . 5 - 5 = 14 > 0 \\ 2 + 5 . 5 + 1 = 28 \geq 0. \end{cases}$

Vậy $(2; 5)$ không thoả mãn đồng thời cả hai bất phương trình đã cho.

c) Ta có: $\begin{cases} 2 . (-8) + 3 . 5 - 5 = -6 < 0 \\ -8 + 5 . 5 + 1 = 18 \geq 0. \end{cases}$

Vậy $(-8; 5)$ thoả mãn đồng thời cả hai bất phương trình đã cho.

Bài 2. Tìm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các hệ sau:

a) $\begin{cases} 5x+9y-7\le 0 \\ 99x^2-11y+3\ge 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y+19<0 \\ 3x+22\ge 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y-12\le 0 \\ x+y-5\ge 0 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0. \end{cases}$

Giải

a) Không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) và c) là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 3. Biểu diễn miền nghiệm của hệ:

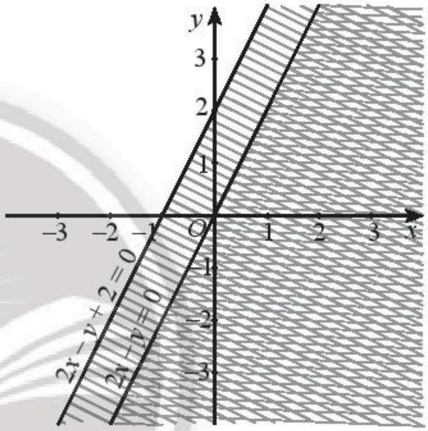
$$\begin{cases} 2x-y+2\le 0 \\ x+2y\ge 5x. \end{cases}$$

Giải

Hệ đã cho được viết lại thành: $\begin{cases} 2x-y+2\le 0 \\ 2x-y\le 0. \end{cases}$

Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng Oxy, ta được như Hình 2.

Miền không gạch chéo (kể cả bờ) là phần giao của hai miền nghiệm của hai bất phương trình và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



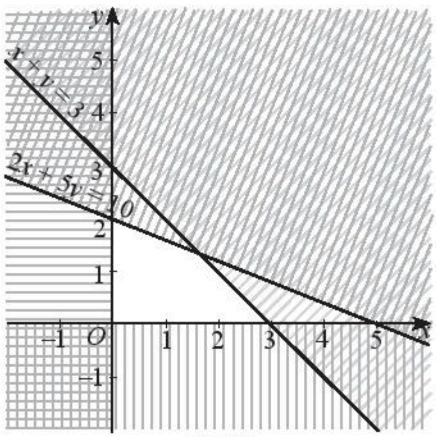
Hình 2

Bài 4. Biểu diễn miền nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 2x+5y\le 10 \\ x+y\le 3. \end{cases}$$

Giải

Miền không gạch chéo (kể cả bờ) trong Hình 3 là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



Hình 3

Bài 5. Bác Năm dự định trồng khoai lang và khoai mì trên mảnh đất có diện tích 8 ha. Nếu trồng 1 ha khoai lang thì cần 10 ngày công và thu được 20 triệu đồng. Nếu trồng 1 ha khoai mì thì cần 15 ngày công và thu được 25 triệu đồng. Bác Năm cần trồng bao nhiêu hecta cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác Năm chỉ có thể sử dụng được không quá 90 ngày công cho việc trồng khoai lang và khoai mì.

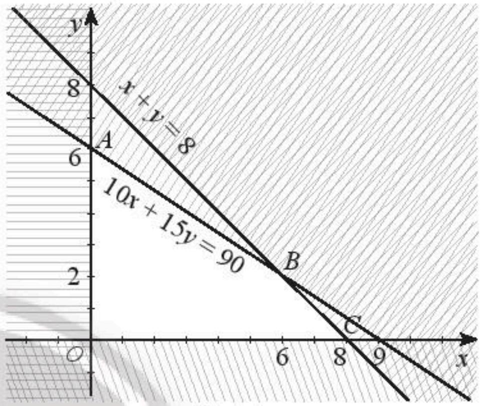
Giải

Gọi x là số hecta trồng khoai lang và y là số hecta trồng khoai mì.

Ta có hệ bất phương trình mô tả các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} x + y \le 8 \\ 10x + 15y \le 90 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục toạ độ Oxy ta được miền đa giác $OABC$. Toạ độ các đỉnh của đa giác đó là: $O(0; 0)$; $A(0; 6)$; $B(6; 2)$; $C(8; 0)$.



Hình 4

Gọi F là số tiền (đơn vị: triệu đồng) bác Năm thu được, ta có: $F = 20x + 25y$.

Ta phải tìm x, y thoả mãn hệ bất phương trình sao cho F lớn nhất, nghĩa là tìm giá trị lớn nhất của $F = 20x + 25y$ trên miền đa giác $OABC$.

Tính các giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của đa giác, ta có:

Tại $O(0; 0)$: $F = 20 . 0 + 25 . 0 = 0$;

Tại $A(0; 6)$: $F = 20 . 0 + 25 . 6 = 150$;

Tại $B(6; 2)$: $F = 20 . 6 + 25 . 2 = 170$;

Tại $C(8; 0)$: $F = 20 . 8 + 25 . 0 = 160$.

Ta thấy F đạt giá trị lớn nhất bằng 170 tại $B(6; 2)$.

Vậy để thu được nhiều tiền nhất, bác Năm cần trồng 6 ha khoai lang và 2 ha khoai mì.

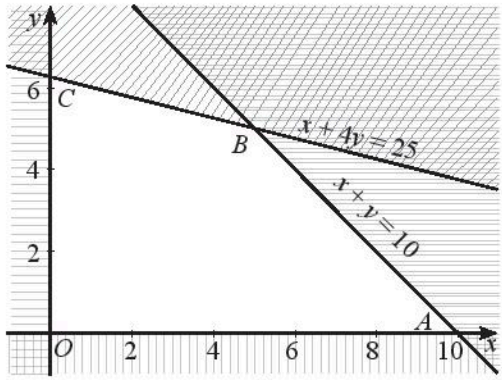
Bài 6. Một người bán nước giải khát đang có 25 g bột nho và 100 g đường để pha chế hai loại nước nho A và B. Để pha chế 1 *l* nước nho loại A cần 10 g đường và 1 g bột nho; để pha chế 1 *l* nước nho loại B cần 10 g đường và 4 g bột nho. Mỗi lít nước nho loại A khi bán lãi được 30 nghìn đồng, mỗi lít nước nho loại B khi bán lãi được 40 nghìn đồng. Hỏi người đó nên pha chế bao nhiêu lít nước nho mỗi loại để có lợi nhuận cao nhất?

Giải

Gọi x và y lần lượt là số lít nước nho loại A và B người đó có thể pha chế.

Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + 4y \le 25 \\ x + y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$



Hình 5

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác $OABC$, trong đó $O(0; 0)$; $A(10; 0)$; $B(5; 5)$; $C(0; 6,25)$.

Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: nghìn đồng) thu được, ta có: $F = 30x + 40y$.

Ta có: Tại $O(0; 0)$: $F = 30 . 0 + 40 . 0 = 0$;

Tại $A(10; 0)$: $F = 30 . 10 + 40 . 0 = 300$;

Tại $B(5; 5)$: $F = 30 . 5 + 40 . 5 = 350$;

Tại $C(0; 6,25)$: $F = 30 . 0 + 40 . 6,25 = 250$.

Ta thấy F đạt GTLN bằng 350 tại $B(5; 5)$.

Vậy người đó nên pha chế 5l nước nho mỗi loại để có lợi nhuận cao nhất.

C. BÀI TẬP

1. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau đây:

a) $\begin{cases} x + y - 4 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - 5 < 0 \\ 0 \le x \le 3 \\ y \ge 0. \end{cases}$

2. Bạn Bích có 500 g bột gạo để pha hai loại nước hồ tráng bánh đa và bánh xèo. Một lít nước hồ tráng bánh đa cần 200 g bột gạo, còn một lít nước hồ tráng bánh xèo chỉ cần 100 g bột gạo. Gọi x, y lần lượt là số lít nước hồ tráng bánh đa và bánh xèo. Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

3. Một bãi đậu xe ban đêm có diện tích đậu xe là 150 m^2 (không tính lối đi cho xe ra vào). Cho biết xe du lịch cần diện tích 3 m^2/chiếc và phải trả phí 40 nghìn đồng, xe tải cần diện tích 5 m^2/chiếc và phải trả phí 50 nghìn đồng. Nhân viên quản lí không thể phục vụ quá 40 xe một đêm. Hãy tính số lượng xe mỗi loại mà chủ bãi xe có thể cho đăng kí đậu xe để có doanh thu cao nhất.

4. Cho biết mỗi kilôgam thịt bò giá 250 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 800 đơn vị protein và 100 đơn vị lipit, mỗi kilôgam thịt heo có giá 200 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 600 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Một gia đình cần ít nhất 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit trong khẩu phần thức ăn mỗi ngày và họ chỉ có thể mua một ngày không quá 1 kg thịt bò và 1,5 kg thịt heo. Hỏi gia đình này phải mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để chi phí là ít nhất?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A. TRẮC NGHIỆM

1. Bạn Danh để dành được 900 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em mồ côi, Danh đã lấy ra x tờ tiền loại 50 nghìn đồng, y tờ tiền loại 100 nghìn đồng để trao tặng. Một bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y là:

A. $50x + 100y \leq 900$; B. $50x + 100y \geq 900$;

C. $100x + 50y \leq 900$; D. $x + y = 900$.

2. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

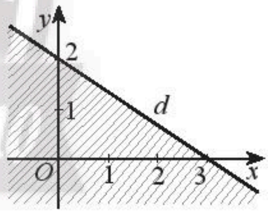
A. $2x - 3y - 2022 \leq 0$; B. $5x + y \geq 2x + 11$;

C. $x + 2025 > 0$; D. $\frac{x}{y} + 1 > 0$.

3. Miền không gạch chéo (không kể bờ d) trong Hình 1 là miền nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình dưới đây?

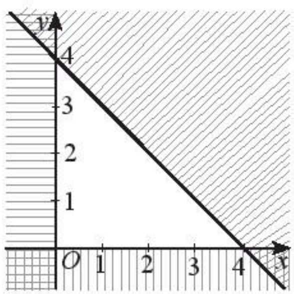
A. $2x + 3y < 6$; B. $2x + 3y > 6$;

C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} > 0$; D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} < 1$.



Hình 1

4. Miền tam giác không gạch chéo trong Hình 2 là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình dưới đây?



Hình 2

A. $\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ x \leq 0 \\ y \geq 0; \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0; \end{cases}$

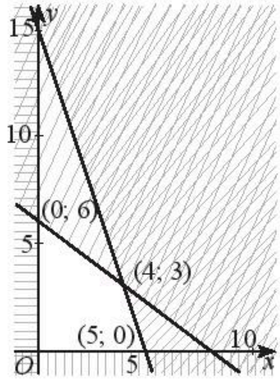
C. $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0; \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ x \leq 0 \\ y \leq 0. \end{cases}$

5. Biểu thức $F = 2x - 8y$ đạt GTNN bằng bao nhiêu trên miền đa giác không gạch chéo trong Hình 3?

A. -48; B. 0; C. -160; D. -40.

6. Biểu thức $F = 5x + 2y$ đạt GTLN bằng bao nhiêu trên miền đa giác không gạch chéo trong Hình 3?

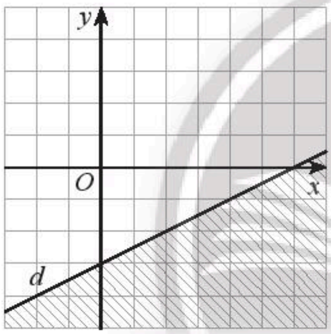
A. 30; B. 12; C. 25; D. 26.



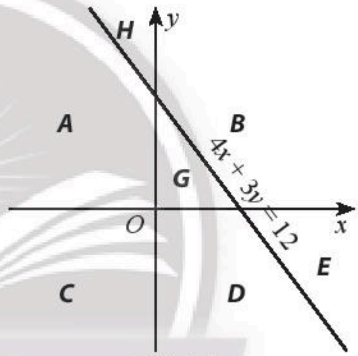
Hình 3

B. TỰ LUẬN

1. Tìm bất phương trình có miền nghiệm là miền không gạch chéo (kể cả bờ d) trong Hình 4 (mỗi ô vuông có cạnh là 1 đơn vị).



Hình 4



Hình 5

2. Đường thẳng $4x + 3y = 12$ và hai trục toạ độ chia mặt phẳng Oxy thành các miền như Hình 5. Hãy tìm hệ bất phương trình có miền nghiệm là miền B (kể cả bờ).

3. Tìm giá trị của F và G tương ứng với các giá trị x, y được cho trong bảng dưới đây.

x	0	0	1	1	2	2	4
y	2	4	0	1	0	1	0
$F = 4x + 5y$							
$G = 5x - 3y$							

Trong các giá trị tìm được:

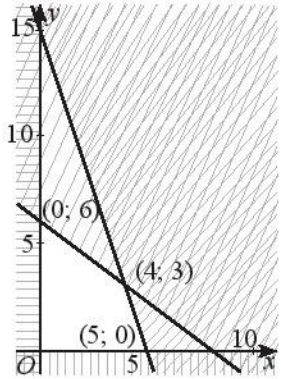
a) tìm GTLN của F.

b) tìm GTNN của G.

4. Trên miền đa giác không gạch chéo ở Hình 6, hãy:

a) tìm GTLN của $F = 2x + 3y$;

b) tìm GTNN của $G = x - 4y$.



Hình 6

5. Bác Dũng dự định quy hoạch x sào đất trồng cà tím và y sào đất trồng cà chua. Bác chỉ có không quá 9 triệu đồng để mua hạt giống. Cho biết tiền mua hạt giống cà tím là 200 000 đồng/sào và cà chua là 100 000 đồng/sào. Viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y.

6. Một phân xưởng lắp ráp máy tính dự định ráp x chiếc máy tính cá nhân và y chiếc máy tính bảng trong một ngày. Do hạn chế về nhân công nên mỗi ngày chỉ có thể xuất xưởng tổng hai loại máy tính trên không quá 150 chiếc. Viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y.

7. Bạn Hoàng dự định mua x con cá vàng và y con cá Koi từ một trại cá giống. Cho biết mỗi con cá vàng có giá 35 nghìn đồng còn mỗi con cá Koi có giá 150 nghìn đồng. Hoàng chỉ để dành được 1,7 triệu đồng và trại cá chỉ bán mỗi loại cá từ 10 con trở lên. Hãy viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y.

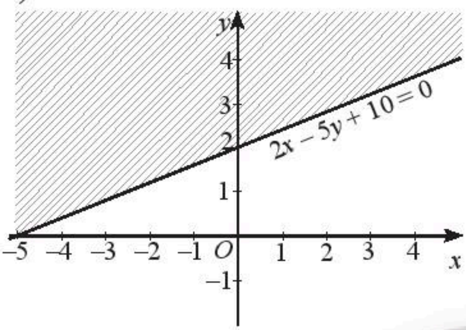
8. Một học sinh dự định làm các bình hoa bằng giấy để bán trong một hội chợ gây quỹ từ thiện. Cần 1 giờ để làm một bình hoa loại nhỏ và sẽ bán với giá 100 nghìn đồng, 90 phút để làm một bình hoa loại lớn và sẽ bán với giá 200 nghìn đồng. Học sinh này chỉ thu xếp được 15 giờ nghỉ để làm và ban tổ chức yêu cầu phải làm ít nhất là 12 bình hoa. Hãy cho biết bạn ấy cần làm bao nhiêu bình hoa mỗi loại để gây quỹ được nhiều tiền nhất.

9. Một xưởng sản xuất có 12 tấn nguyên liệu A và 8 tấn nguyên liệu B để sản xuất hai loại sản phẩm X, Y. Để sản xuất một tấn sản phẩm X cần dùng 6 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B, khi bán lãi được 10 triệu đồng. Để sản xuất một tấn sản phẩm Y cần dùng 2 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B, khi bán lãi được 8 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho xưởng nói trên sao cho có tổng số tiền lãi cao nhất.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. a)

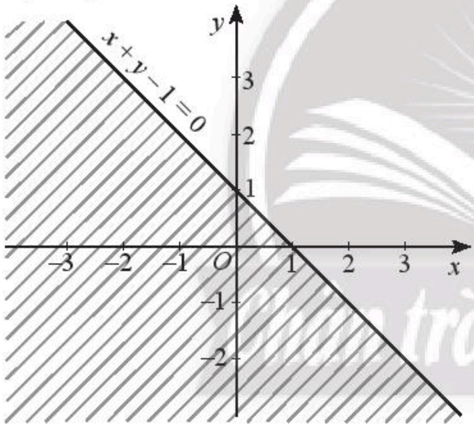


Hình 1

b) (1; 3) không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.

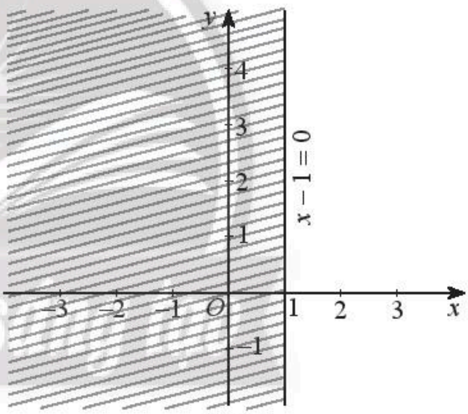
c) (1; 1) và (2; 2).

2. a) $x + y - 1 > 0$



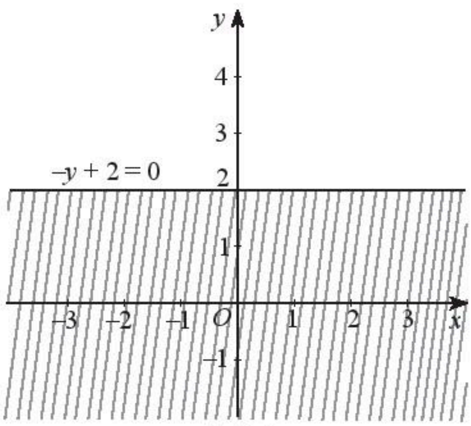
Hình 2

b) $x - 1 \geq 0$



Hình 3

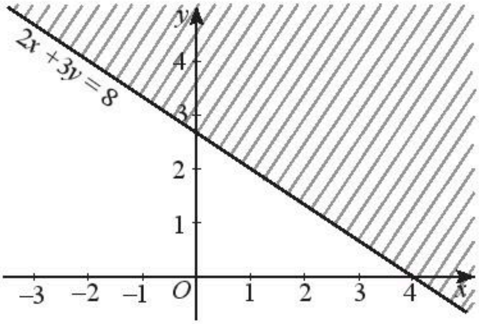
c) $-y + 2 \leq 0$



Hình 4

3. a) $3x + 2y < x - y + 8$

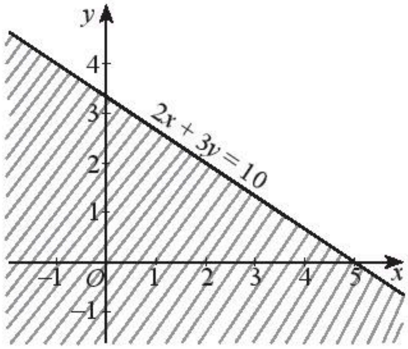
$\Leftrightarrow 2x + 3y < 8$;



Hình 5

b) $2(x - 1) + 3(y - 2) > 2$

$\Leftrightarrow 2x + 3y > 10$.



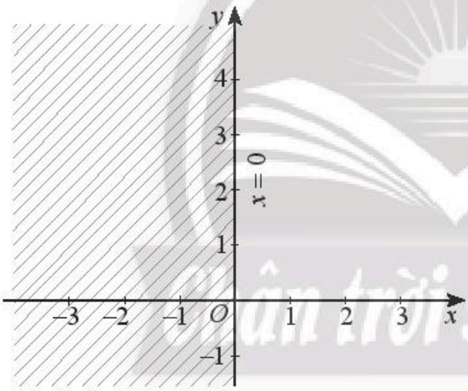
Hình 6

4. Các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại I và II mà bạn Nga có thể pha chế được: $x \geq 0$; $y \geq 0$;

$$600x + 400y \leq 2\,400 \Leftrightarrow 3x + 2y \leq 12.$$

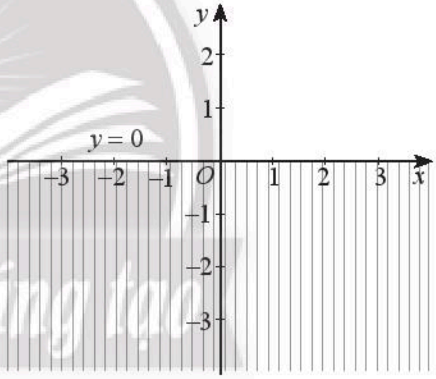
Biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó trên mặt phẳng toạ độ Oxy:

$x \geq 0$



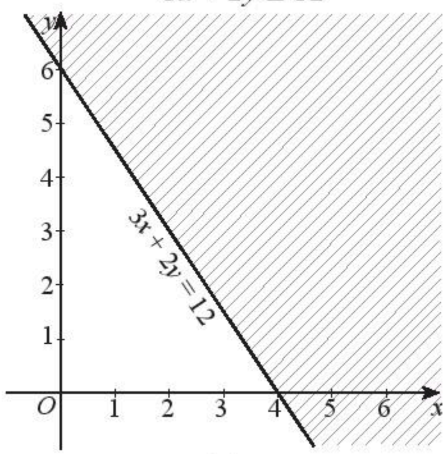
Hình 7

$y \geq 0$



Hình 8

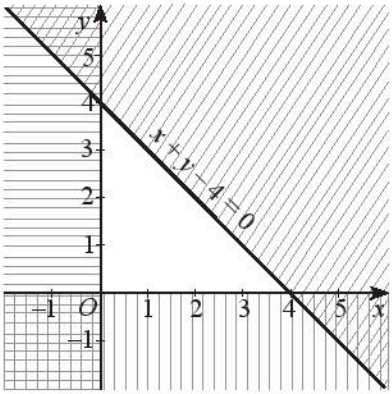
$3x + 2y \leq 12$



Hình 9

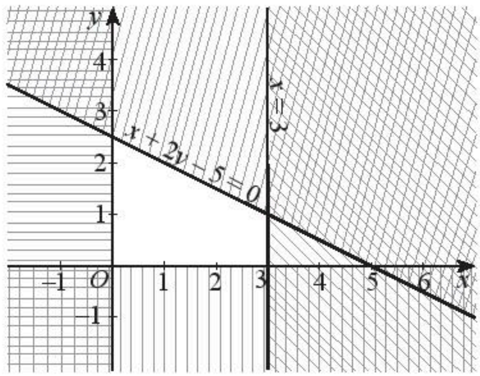
Bài 2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. a)



Hình 1

b)

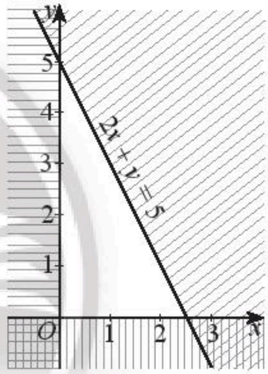


Hình 2

2. Hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y:

$$\begin{cases} 2x + y \le 5 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Miền không gạch chéo bao gồm cả các cạnh trong Hình 3 là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.

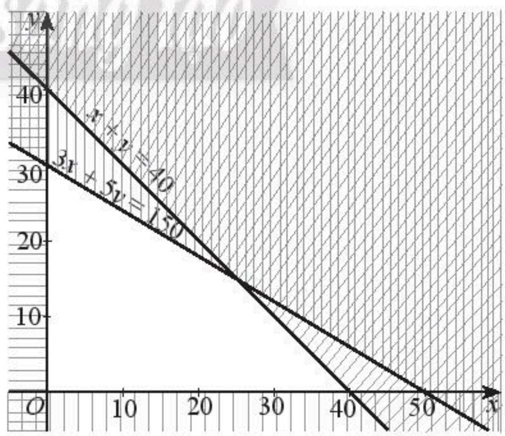


Hình 3

3. Gọi x là số xe du lịch và y là số xe tải mà chủ bãi xe nên cho đậu một đêm. Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + y \le 40 \\ 3x + 5y \le 150 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Miền không gạch chéo bao gồm cả các cạnh trong Hình 4 là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.

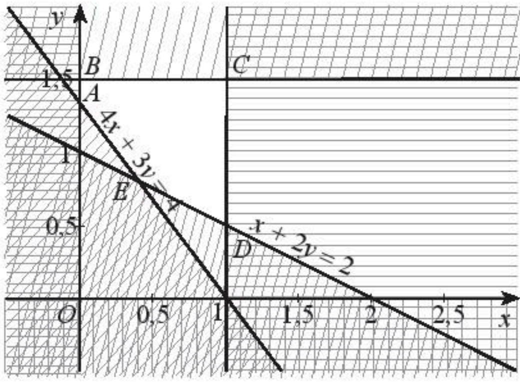


Hình 4

Số tiền chủ bãi xe thu được $F = 40x + 50y$ đạt GTLN bằng 1 750 nghìn đồng tại (25; 15). Vậy để có doanh thu cao nhất, chủ bãi xe có thể cho đăng kí 25 chiếc xe du lịch và 15 chiếc xe tải.

4. Gọi x và y lần lượt là số kilôgam thịt bò và thịt heo có thể mua. Ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 4x+3y \geq 4 \\ x+2y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ y \leq 1,5. \end{cases}$$



Hình 5

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta được miền đa giác $ABCDE$ có toạ độ các đỉnh là: $A(0; \frac{4}{3})$; $B(0; \frac{3}{2})$; $C(1; \frac{3}{2})$; $D(1; \frac{1}{2})$; $E(\frac{2}{5}; \frac{4}{5})$.

Số tiền người đó thu được $F = 250x + 200y$ đạt GTNN là 260 nghìn đồng tại đỉnh $E(\frac{2}{5}; \frac{4}{5})$.

Vậy gia đình này chỉ cần mua $\frac{2}{5}$ kg thịt bò và $\frac{4}{5}$ kg thịt heo để đủ đáp ứng yêu cầu về dinh dưỡng mà lại tốn chi phí ít nhất.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A. TRẮC NGHIỆM

1. A	**2.** D	**3.** B	**4.** C	**5.** A	**6.** D

B. TỰ LUẬN

1. $x - 2y - 6 \leq 0$.

2. $\begin{cases} 4x+3y-12 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

3. a) GTLN $F = 20$; b) GTNN $G = -12$.

4. a) GTLN của $F = 18$. b) GTNN của $G = -24$.

5. $\begin{cases} 2x + y \le 90 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

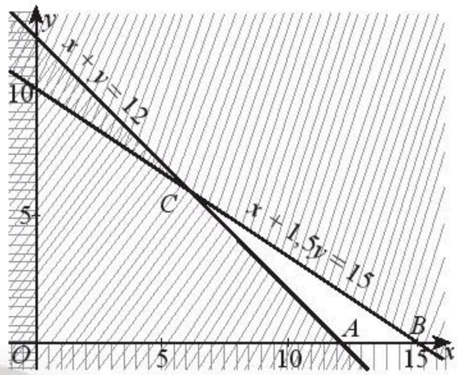
6. $\begin{cases} x + y \le 150 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7x + 30y \le 340 \\ x \ge 10 \\ y \ge 10. \end{cases}$

8. Gọi x và y lần lượt là số bình hoa loại nhỏ và loại lớn mà bạn học sinh có thể làm được.

Ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} x + y \ge 12 \\ x + 1,5y \le 15 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta được miền tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là: $A(12;\ 0)$; $B(15;\ 0)$; $C(6;\ 6)$ (Hình 1).



Hình 1

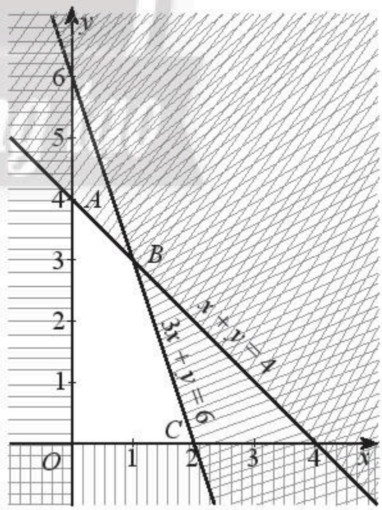
Số tiền gây quỹ $F = 100x + 200y$ đạt GTLN là 1 800 nghìn đồng tại đỉnh $C(6; 6)$.

Vậy bạn đó cần làm 6 cái bình hoa mỗi loại để gây quỹ được nhiều tiền nhất.

9. Gọi x và y lần lượt là số tấn sản phẩm X và Y mà xưởng cần sản xuất.

Ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 3x + y \le 6 \\ x + y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta được miền tứ giác $OABC$ có toạ độ các đỉnh là: $O(0; 0)$; $A(0; 4)$; $B(1; 3)$; $C(2; 0)$ (Hình 2).



Hình 2

Số tiền lãi $F = 10x + 8y$ đạt GTLN bằng 34 triệu đồng tại đỉnh $B(1; 3)$.

Vậy xưởng cần sản xuất 1 tấn sản phẩm X và 3 tấn sản phẩm Y thì sẽ có tổng tiền lãi cao nhất.

Chương III. HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ

Bài 1. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số. Tập xác định và tập giá trị của hàm số

Giả sử x và y là hai đại lượng biến thiên và x nhận giá trị thuộc tập số D.

Nếu với mỗi giá trị x thuộc D, ta xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một ***hàm số***.

Ta gọi x là ***biến số*** và y là ***hàm số*** của x.

Tập hợp D được gọi là ***tập xác định*** của hàm số.

Tập hợp T gồm tất cả các giá trị y (tương ứng với x thuộc D) gọi là ***tập giá trị*** của hàm số.

Chú ý:

- Kí hiệu $f(x)$ để chỉ giá trị y tương ứng với x, nên hàm số còn được viết là $y = f(x)$.
- Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

2. Đồ thị hàm số

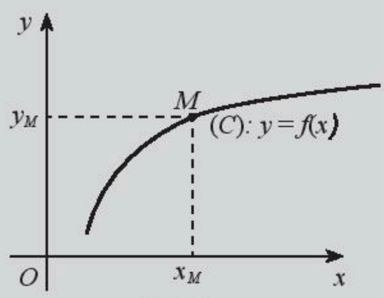
Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D.

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, ***đồ thị*** (C) của hàm số là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ với $x \in D$ và $y = f(x)$.

Vậy $(C) = \{M(x; f(x)) \mid x \in D\}$.

Chú ý:

Điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi $x_M \in D$ và $y_M = f(x_M)$.



Hình 1

3. Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

Với hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, ta nói:

- Hàm số ***đồng biến*** trên khoảng $(a; b)$ nếu

  $\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

- Hàm số ***nghịch biến*** trên khoảng $(a; b)$ nếu

  $\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Nhận xét:

Khi hàm số *đồng biến* (tăng) trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị của nó có dạng đi lên từ trái sang phải. Ngược lại, khi hàm số *nghịch biến* (giảm) trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị của nó có dạng đi xuống từ trái sang phải.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Sau khi đun nóng băng phiến lên đến gần 90 °C, người ta để nguội, quan sát, ghi nhận nhiệt độ và trạng thái của băng phiến sau mỗi phút như Bảng 1.

Bảng 1. Nhiệt độ và trạng thái của băng phiến khi để nguội

Thời gian nguội (phút)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nhiệt độ (°C)	86	84	82	81	80	80	80	80	79	77	75
Trạng thái	lỏng				lỏng và rắn				rắn		

a) Tại sao từ bảng trên, có thể nói nhiệt độ của băng phiến là một hàm số theo thời gian (nung nóng)? Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số trên.

b) Sau khi để nguội 3 phút, nhiệt độ băng phiến là bao nhiêu?

c) Băng phiến chuyển hoàn toàn sang trạng thái rắn sau bao nhiêu phút?

Giải

a) Bảng giá trị cho thấy nhiệt độ (kí hiệu là y) là một hàm số theo thời gian (kí hiệu là x) vì khi cho x một giá trị bất kì, ta luôn tìm được duy nhất một giá trị của y. Do vậy bảng này xác định một hàm số biểu thị nhiệt độ của băng phiến theo thời gian.

Từ bảng giá trị của hàm số, ta có tập xác định $D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ và tập giá trị $T = \{75; 77; 79; 80; 81; 82; 84; 86\}$.

b) Sau khi để nguội 3 phút, nhiệt độ băng phiến là 81 °C.

c) Băng phiến chuyển hoàn toàn sang trạng thái rắn sau 8 phút (lúc đó nhiệt độ băng phiến là 79 °C).

Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x)=\sqrt{-3x-2}$; b) $f(x)=\dfrac{2-x}{2+x}$; c) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{với } x \text{ là số hữu tỉ}\\ 0 & \text{với } x \text{ là số vô tỉ.}\end{cases}$

Giải

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $-3x-2 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\dfrac{2}{3}$. Vậy $D=\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right]$.

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $2+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

c) Khi x là số hữu tỉ, hàm số xác định và luôn lấy giá trị bằng 1; khi x là số vô tỉ, hàm số xác định và lấy giá trị bằng 0. Vậy $D=\mathbb{R}$.

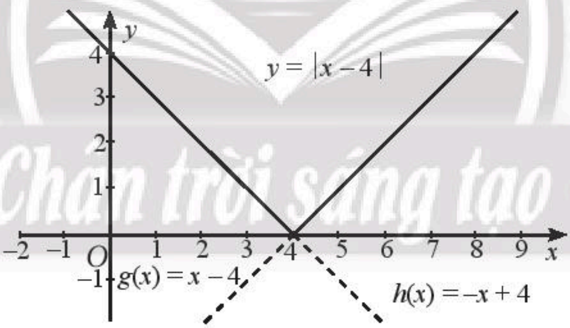
Bài 3. Vẽ đồ thị hàm số $y=f(x)=|x-4|$.

Giải

Hàm số này còn được viết như sau:

$$|x-4|=\begin{cases}x-4 & \text{với } x-4\geq 0\\ -(x-4) & \text{với } x-4<0\end{cases}=\begin{cases}x-4 & \text{với } x\geq 4\\ -x+4 & \text{với } x<4.\end{cases}$$

Ta vẽ đồ thị hàm số $g(x)=x-4$ và giữ lại phần đồ thị ứng với $x \geq 4$; ta cũng vẽ đồ thị hàm số $h(x)=-x+4$ và giữ lại phần đồ thị với $x<4$. Ta được đồ thị cần vẽ như sau:



Hình 2

Bài 4. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$; b) $f(x)=|2x-1|$.

Giải

a) Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ xác định khi $x-3\neq 0$ tức là $x\neq 3$ nên $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lấy x_1, x_2 là hai số tuỳ ý cùng thuộc mỗi khoảng $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$, sao cho $x_1<x_2$, ta có:

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1-3}-\frac{1}{x_2-3}=\frac{x_2-x_1}{(x_1-3)(x_2-3)}.$$

Do $x_1 < x_2$ nên $x_2 - x_1 > 0$.

Mặt khác, khi lấy x_1 và x_2 cùng nhỏ hơn 3 hoặc cùng lớn hơn 3, ta đều có $x_1 - 3$ và $x_2 - 3$ luôn cùng dấu nên $(x_1 - 3)(x_2 - 3) > 0$ hay $f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Ta kết luận hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

b) Hàm số $f(x) = |2x - 1|$ còn được viết như sau:

$$f(x) = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{với } 2x-1 \ge 0 \\ -(2x-1) & \text{với } 2x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 & \text{với } x \ge \dfrac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{với } x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 2x - 1$. Hàm số này xác định trên $\mathbb{R}$.

Lấy x_1, x_2 là hai số tuỳ ý, sao cho $x_1 < x_2$, ta có:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2).$$

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét hàm số $h(x) = -2x + 1$. Hàm số này xác định trên $\mathbb{R}$.

Lấy x_1, x_2 là hai số tuỳ ý, sao cho $x_1 < x_2$, ta có:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow -2x_1 + 1 > -2x_2 + 1 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2).$$

Suy ra hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$.

Vậy hàm số $f(x) = |2x - 1|$ nghịch biến trên $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. BÀI TẬP

1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{4x-1}{\sqrt{2x-5}}$; b) $f(x) = \dfrac{2-x}{(x+3)(x-7)}$; c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & \text{với } x \ge 0 \\ 1 & \text{với } x < 0. \end{cases}$

2. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \le 2 \\ x+2 & \text{với } x > 2; \end{cases}$ b) $f(x) = |x+3| - 2$.

3. Trong kinh tế thị trường, lượng *cầu* và lượng *cung* là hai khái niệm quan trọng. Lượng *cầu* chỉ khả năng về số lượng sản phẩm cần mua của bên mua (người tiêu dùng), tuỳ theo đơn giá bán sản phẩm; còn lượng *cung* chỉ khả năng cung cấp số lượng sản phẩm này cho thị trường của bên bán (nhà sản xuất) cũng phụ thuộc vào đơn giá bán sản phẩm.

Người ta khảo sát nhu cầu của thị trường đối với sản phẩm A theo đơn giá của sản phẩm này và thu được bảng sau:

Đơn giá sản phẩm A (đơn vị: nghìn đồng)	10	20	40	70	90
Lượng *cầu* (nhu cầu về số sản phẩm)	338	288	200	98	50

a) Hãy cho biết tại sao bảng giá trị trên xác định một hàm số? Hãy tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số đó (gọi là *hàm cầu*).

b) Giả sử lượng *cung* của sản phẩm A tuân theo công thức $y = f(x) = \dfrac{x^2}{50}$, trong đó x là đơn giá sản phẩm A và y là lượng *cung* ứng với đơn giá này. Hãy điền các giá trị của hàm số $f(x)$ (gọi là *hàm cung*) vào bảng sau:

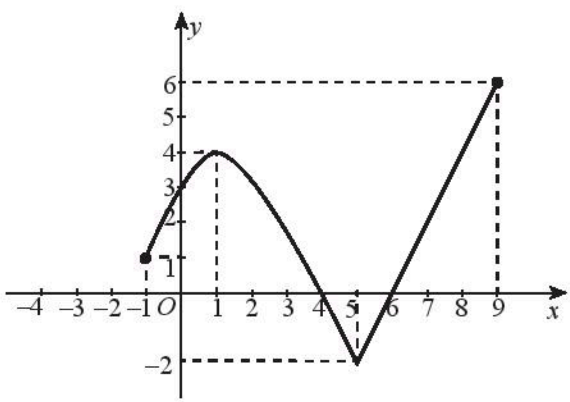
Đơn giá sản phẩm A (đơn vị: nghìn đồng)	10	20	40	70	90
Lượng *cung* (khả năng cung cấp về số sản phẩm)					

c) Ta nói thị trường của một sản phẩm là *cân bằng* khi lượng *cung* và lượng *cầu* bằng nhau. Hãy tìm đơn giá x của sản phẩm A khi thị trường cân bằng.

4. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{1}{-x-5}$;   b) $f(x) = |3x - 1|$.

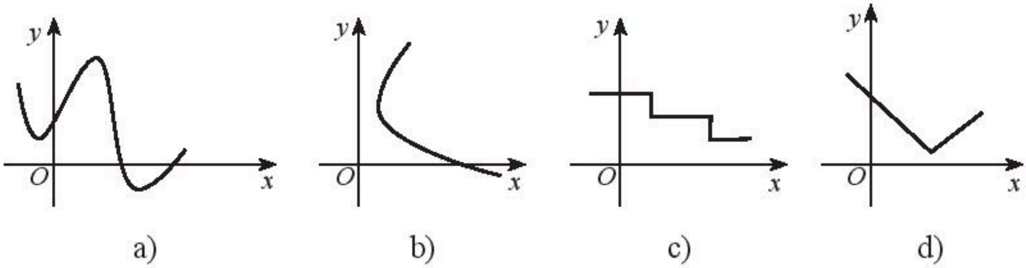
5. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số có đồ thị như sau:



Hình 3

6. Vẽ đồ thị hàm số sau: $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{với } x < -1 \\ 1 & \text{với } -1 \le x < 1 \\ x^2 & \text{với } x \ge 1. \end{cases}$

7. Trong các đường biểu diễn được cho trong Hình 4, chỉ ra trường hợp không phải là đồ thị hàm số và giải thích tại sao.



Hình 4

Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai theo biến x là hàm số cho bởi công thức có dạng

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

với a, b, c là các số thực và a khác 0.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

2. Đồ thị hàm số bậc hai

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ***đồ thị hàm số bậc hai*** $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$) là một parabol (P):

– Có ***đỉnh*** S với hoành độ $x_S = -\dfrac{b}{2a}$, tung độ $y_S = -\dfrac{\Delta}{4a}$;

– Có ***trục đối xứng*** là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy nếu $b \neq 0$, trùng với trục Oy nếu $b = 0$);

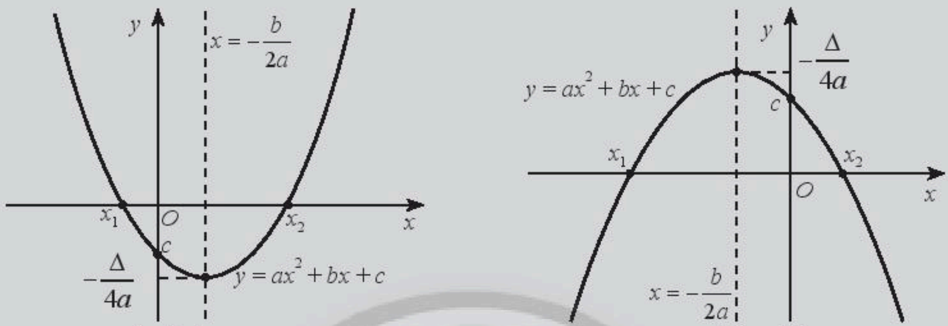
– Có bề lõm quay lên trên nếu $a > 0$, quay xuống dưới nếu $a < 0$;

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng c, tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ $(0; c)$.

Chú ý:

• Nếu $b = 2b'$ thì (P) có đỉnh $S\left(-\dfrac{b'}{a}; -\dfrac{\Delta'}{a}\right)$ với $\Delta' = b'^2 - ac$.

• Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ cắt trục hoành tại hai điểm lần lượt có hoành độ là hai nghiệm này (xem Hình 1).



a) $a > 0$ b) $a < 0$

Hình 1

• Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$):

1) *Xác định toạ độ đỉnh* $S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

2) *Vẽ trục đối xứng d* là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

3) *Tìm toạ độ giao điểm* của đồ thị với trục tung (điểm $A(0; c)$) và giao điểm của đồ thị với trục hoành (nếu có).

Xác định thêm điểm đối xứng với A qua trục đối xứng d, là điểm $B\left(\dfrac{-b}{a}; c\right)$.

4) *Vẽ parabol* có đỉnh S, có trục đối xứng d, đi qua các điểm tìm được.

3. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$), ta có bảng tóm tắt về sự biến thiên của hàm số này như sau:

$a > 0$	$a < 0$
Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{-b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{-b}{2a}; +\infty\right)$.	Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{-b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{-b}{2a}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên

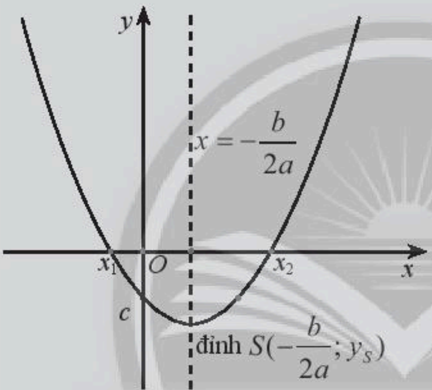
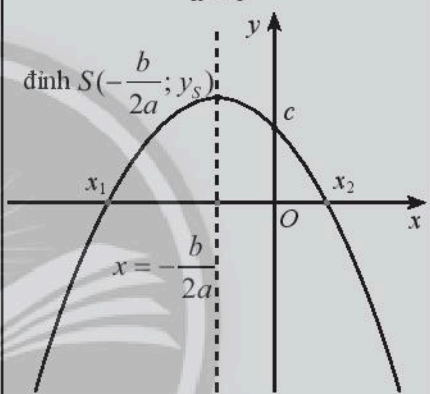
x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

4. Bảng tóm tắt tính chất hàm số bậc hai nhìn từ đồ thị

Khi quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$), đặc biệt là đỉnh S và hướng quay bề lõm của parabol, ta có thể nhận biết một số tính chất của hàm số như sau:

	$a > 0$	$a < 0$
Đồ thị hàm số bậc hai	 Hình 2	 Hình 3
Về giá trị nhỏ nhất/ giá trị lớn nhất	Mọi điểm trên đồ thị đều có tung độ **lớn** hơn hoặc bằng tung độ của đỉnh S nên hàm số đạt **giá trị nhỏ nhất** là $y = y_S$ (khi $x = x_S$).	Mọi điểm trên đồ thị đều có tung độ **nhỏ** hơn hoặc bằng tung độ của đỉnh S nên hàm số đạt **giá trị lớn nhất** là $y = y_S$ (khi $x = x_S$).
Về tập giá trị	Hàm số lấy mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng y_S nên $T = [y_S; +\infty)$.	Hàm số lấy mọi giá trị nhỏ hơn hoặc bằng y_S nên $T = (-\infty; y_S]$.
Về tính biến thiên	Từ trái sang phải, nhánh bên trái đồ thị *đi* xuống tới đỉnh S rồi sau đó đi lên ở nhánh bên phải. Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; x_S)$ và đồng biến trên khoảng $(x_S; +\infty)$.	Từ trái sang phải, nhánh bên trái đồ thị đi lên tới đỉnh S rồi sau đó đi xuống ở nhánh bên phải. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; x_S)$ và nghịch biến trên khoảng $(x_S; +\infty)$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = f(x) = -2x^2 - 3x + 5$; b) $y = f(x) = (x + 2)(x - 3)$;

c) $y = f(x) = (x + 3)^2 - 4$.

Giải

a) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y = -2x^2 - 3x + 5$ là parabol (P):

– Có đỉnh S với $x_S = -\dfrac{3}{4}$; $y_S = \dfrac{49}{8}$.

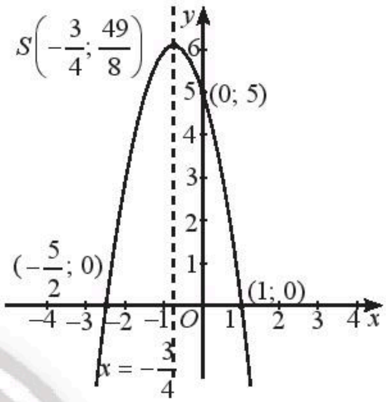
– Có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{3}{4}$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy).

– Có bề lõm quay xuống vì $a < 0$.

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5, tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ $(0; 5)$.

– Ngoài ra, phương trình $-2x^2 - 3x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$ và $x_2 = -\dfrac{5}{2}$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có toạ độ $(1; 0)$ và $\left(-\dfrac{5}{2}; 0\right)$.

Ta vẽ đồ thị như Hình 4.



Hình 4

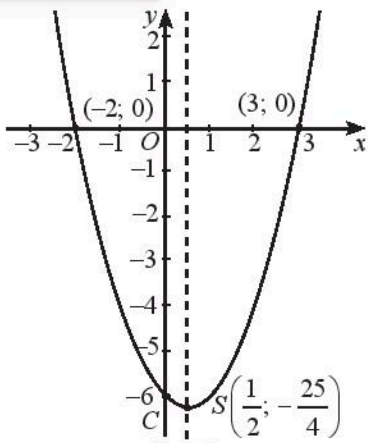
b) Ta có:

$$f(x) = (x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$$

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - x - 6$ là parabol (P):

– Có đỉnh S với $x_S = \dfrac{1}{2}$; $y_S = \dfrac{-25}{4}$.

– Có trục đối xứng là đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy).



Hình 5

– Có bề lõm quay lên vì $a > 0$.

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng –6, tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ (0; –6).

– Ngoài ra, phương trình $x^2 - x - 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 3$ và $x_2 = -2$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có toạ độ (3; 0) và (–2; 0).

Ta vẽ đồ thị như Hình 5.

c) Ta có: $y = f(x) = (x + 3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 5$.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 + 6x + 5$ là parabol (P):

– Có đỉnh S với $x_S = -3$; $y_S = -4$.

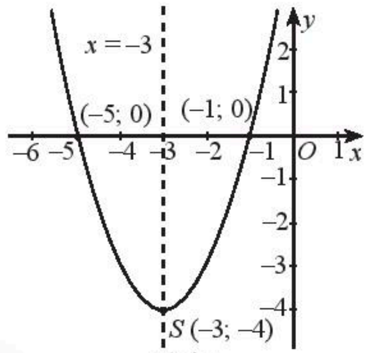
– Có trục đối xứng là đường thẳng $x = -3$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy).

– Có bề lõm quay lên vì $a > 0$.

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5, tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ (0; 5).

– Ngoài ra, phương trình $x^2 + 6x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = -5$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có toạ độ (–1; 0) và (–5; 0).

Ta vẽ đồ thị như Hình 6.



Hình 6

Bài 2. Tìm công thức hàm số bậc hai biết đồ thị hàm số là parabol có đỉnh $S(-2; 1)$ và đi qua gốc toạ độ.

Giải

Hàm số bậc hai có công thức tổng quát $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Đồ thị hàm số qua gốc toạ độ nên $c = 0$, suy ra công thức hàm số: $f(x) = ax^2 + bx$.

Đồ thị hàm số là parabol có đỉnh $S(-2; 1)$ nên $-\dfrac{b}{2a} = -2$ và $f(-2) = 1$.

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} b = 4a \\ a.(-2)^2 + b.(-2) = 1 \end{cases}$

Suy ra $a = -\dfrac{1}{4}$ và $b = -1$. Vậy $y = f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 - x$.

Bài 3. Tìm khoảng biến thiên và tập giá trị của hàm số.

a) $y = f(x) = -3x^2 + 2x - 2$;

b) $y = f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 - x$.

Giải

a) Hàm số $y = f(x) = -3x^2 + 2x - 2$ có $a = -3 < 0$ và toạ độ đỉnh gồm $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-3)} = \frac{1}{3}$, $y_S = -3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) - 2 = -\frac{5}{3}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{5}{3}$	↘ $-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Hàm số có tập giá trị $T = \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right]$.

b) Hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x$ có $a = -\frac{1}{4} < 0$, đồ thị có đỉnh $S(-2; 1)$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

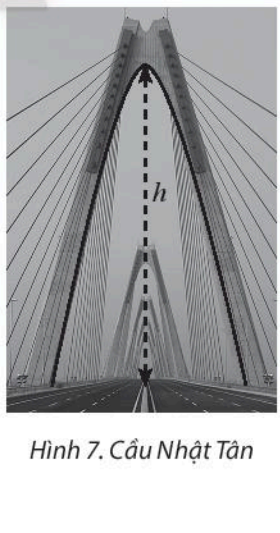
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$, nghịch biến trên $(-2; +\infty)$.

Hàm số có tập giá trị $T = (-\infty; 1]$.

Bài 4. Cầu Nhật Tân bắc qua sông Hồng được xem là chiếc cầu dây văng dài nhất Việt Nam năm 2022. Cầu có 5 trụ tháp chính kết nối các nhịp dây văng nâng đỡ toàn bộ phần chính của cây cầu, cũng là để tượng trưng cho 5 cửa ô cổ kính của Hà Nội. Mỗi trụ tháp được kiến trúc tạo dáng mĩ thuật phía trong bằng đường cong tựa như một parabol.

a) Giả sử rằng mặt trong của trụ cầu là một parabol như Hình 7. Khi không thể đo trực tiếp khoảng cách từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường, làm thế nào để ước tính độ cao này?



Hình 7. Cầu Nhật Tân

b) Giả sử biết độ rộng của mặt đường khoảng 43 m. Một người đã dùng dây dọi (không giãn) gắn lên thành trụ cầu ở vị trí B và điều chỉnh độ dài dây dọi để quả nặng vừa chạm đất (khi lặng gió), sau đó đo được chiều dài đoạn dây dọi sử dụng là 1,87 m và khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng là 20 cm. Nếu dùng dữ liệu tự thu thập được và tính toán theo cách ở trên thì người này sẽ ước tính được độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là bao nhiêu?

Hình 8

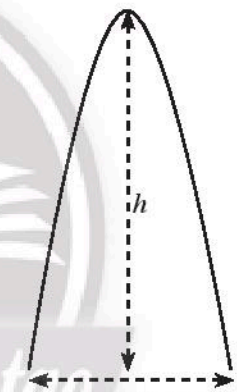
Giải

a) Vấn đề đặt ra trong thực tiễn là *không đo trực tiếp* khoảng cách từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường nhưng cần ước tính độ cao này.

Để giải quyết vấn đề thực tiễn này bằng toán học, ta dùng đồ thị hàm số bậc hai để mô phỏng cho đường biên mặt trong của trụ cầu. Từ công thức của hàm số tìm được ứng với đồ thị, ta tính độ cao cần tìm.

Bước 1. *Lựa chọn mô hình toán học*

Dùng đồ thị hàm số bậc hai mô phỏng cho đường biên mặt trong của trụ cầu như Hình 9a.



Hình 9a. Parabol mô phỏng đường biên phía trong của trụ cầu

Bước 2. *Phát biểu bài toán*

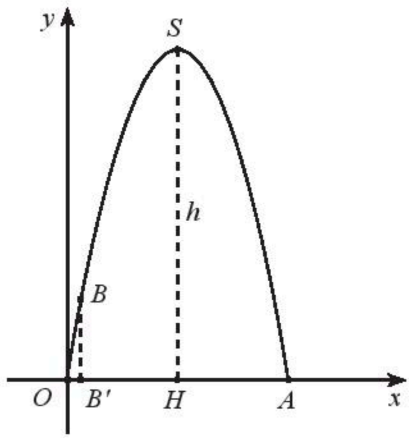
– Trong hệ trục toạ độ Oxy (được chọn như Hình 9b), tung độ đỉnh S của parabol là bao nhiêu?

Bước 3. *Giải quyết bài toán toán học*

Trước hết, ta tìm công thức hàm số, bằng cách:

– Đo khoảng cách OA giữa hai chân trụ của cầu, từ đó xác định toạ độ điểm A, H (với H là trung điểm của OA).

– Chọn một điểm B cụ thể trên thành trụ cầu, xác định hình chiếu B' trên mặt đường rồi đo BB' và OB'. Từ đây, xác định toạ độ điểm B.



Hình 9b. Chọn hệ trục toạ độ Oxy

– Tìm hàm số bậc hai có công thức tổng quát: $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị hàm số này qua gốc toạ độ và hai điểm A, B.

– Sau cùng tính tung độ đỉnh S.

***Bước 4**. Trả lời kết quả cho vấn đề thực tế*

Ước lượng kết quả *độ cao từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường* (có thể làm tròn tung độ đỉnh S đến đơn vị mét).

b) Chọn hệ trục toạ độ như Bước 2 ở câu a.

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ đi qua gốc toạ độ $O(0; 0)$ nên $c = 0$. Suy ra công thức hàm số là $ax^2 + bx$.

Mặt khác đồ thị hàm số qua 2 điểm $A(43; 0)$, $B(0,2; 1,87)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a\,.\,(0,2)^2 + b\,.\,0,2 = 1,87 \\ a\,.\,43^2 + b\,.\,43 = 0. \end{cases}$$

Suy ra $a = -\dfrac{187}{856}$; $b = \dfrac{8041}{856}$ nên có hàm số $y = -\dfrac{187}{856}x^2 + \dfrac{8041}{856}x$.

Hình chiếu của đỉnh S trên trục hoành là H nên

$$y_S = f(x_S) = f(x_H) = f\left(\frac{x_A}{2}\right) = f\left(\frac{43}{2}\right) \approx 100,98.$$

Vậy độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là khoảng 101 m.

(*Lưu ý:* Kết quả này là giả định theo số liệu do người này tự thu thập, không ảnh hưởng đến độ cao thật trong thực tế).

C. BÀI TẬP

1. Hàm số nào trong các hàm sau đây không phải là hàm số bậc hai?

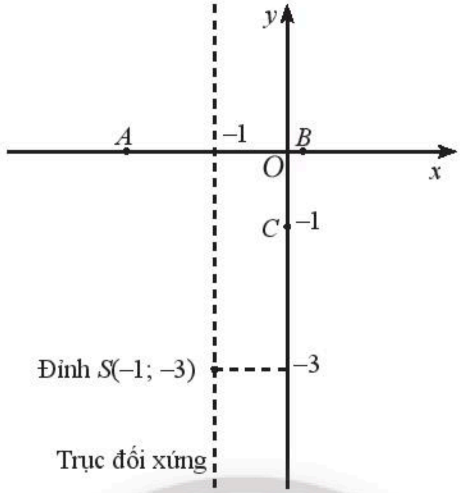
a) $y = 3x^2 + x - \sqrt{3}$;

b) $y = x^2 + |x+1|$;

c) $y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{với } x \geq 0 \\ -2x^2 - x & \text{với } x < 0; \end{cases}$

d) $y = 2(x^2 + 1) + 3x - 1$.

2. Cho hàm số bậc hai có đồ thị là parabol có đỉnh S, đi qua các điểm A, B, $C(0; -1)$ được cho trong Hình 10.



Hình 10

a) Vẽ đồ thị hàm số đã cho;

b) Tìm tập giá trị của hàm số và chỉ ra các khoảng biến thiên của hàm số.

3. Tìm công thức của hàm số có đồ thị vẽ được ở Bài tập 2.

4. Tìm công thức hàm số bậc hai biết:

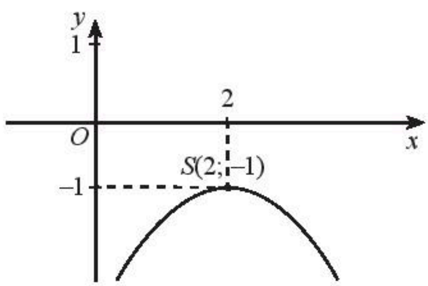
a) Đồ thị hàm số đi qua 3 điểm $A(1; -3)$, $B(0; -2)$, $C(2; -10)$.

b) Đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -16 và một trong hai giao điểm với trục hoành có hoành độ là -2.

5. Tìm khoảng biến thiên và tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = -2x^2 - 4x + 7$; b) $y = f(x) = x^2 - 6x + 1$.

6. Tìm tập xác định, giá trị lớn nhất của hàm số, tập giá trị và các khoảng biến thiên của hàm số biết đồ thị hàm số là một parabol có đỉnh S như Hình 11.



Hình 11

7. Giả sử hàm số bậc hai mô phỏng vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân là

$$y = f(x) = -\frac{187}{856}x^2 + \frac{8041}{856}x \text{ (đơn vị đo: mét).}$$

a) Hãy tính chiều dài đoạn dây dọi sử dụng nếu khoảng cách từ chân của trụ cầu đến quả nặng là 30 cm.

b) Hãy tính khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng nếu biết chiều dài đoạn dây dọi sử dụng là 15 m.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A. TRẮC NGHIỆM

1. Một hàm số có thể được cho bằng:

A. Bảng giá trị của hàm số; B. Đồ thị của hàm số;

C. Công thức của hàm số; D. Tất cả đều đúng.

2. Cho hàm số $y = f(x) = 2(x + 1)(x - 3) + 2x - 6$. Giá trị của hàm số khi $x = 3$ là:

A. 8; B. 0; C. –6; D. 3.

3. Hàm số $y = f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x^2-9}$ có tập xác định D là:

A. $D = [1; +\infty)$; B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$;

C. $D = [1; +\infty) \setminus \{3\}$; D. $D = [3; +\infty)$.

4. Hàm số nào trong các hàm sau đây không phải là hàm số bậc hai?

A. $y = f(x) = \sqrt{3}x^2 + x - 4$; B. $y = f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 5$;

C. $y = f(x) = -2x(x-1)$; D. $y = f(x) = 2(x^2+1) + 3x - 1$.

5. Tập giá trị của hàm số $y = f(x) = -2x^2 + \sqrt{2}x + 1$ là

A. $T = \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$; B. $T = \left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$;

C. $T = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$; D. $T = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$.

6. Hàm số $y = f(x) = -(x + 2)(x - 4)$ đồng biến trên khoảng:

A. $(-\infty; -1)$; B. $(1; +\infty)$; C. $(-\infty; 1)$; D. $(-1; +\infty)$.

7. Hàm số $y = f(x) = (x + 2)(x - 2)$ có:

A. Giá trị nhỏ nhất là 4; B. Giá trị lớn nhất là 4;

C. Giá trị lớn nhất là –4; D. Giá trị nhỏ nhất là –4.

8. Để hàm số $y = f(x) = (m - 2)(x + 5)^2 + (m^2 - 4)|x - 7| + 3$ là một hàm số bậc hai thì giá trị của m là:

A. 2; B. 2 hay –2; C. –2; D. 4.

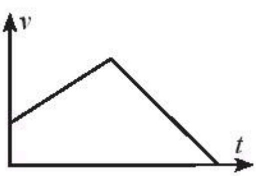
9. Đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^2 + 4(5m + 1)x + (3 - 2m)$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = -2$ khi m có giá trị là:

A. –3; B. $-\frac{2}{5}$; C. $\frac{3}{2}$; D. $-\frac{1}{5}$.

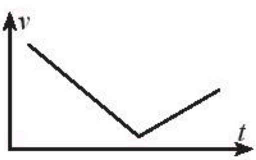
10. Một viên bi được thả không vận tốc đầu và lăn trên máng nghiêng như Hình 1.

Hình 1

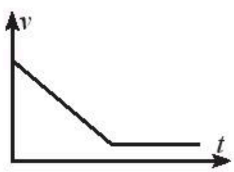
Đồ thị nào sau đây phù hợp với sự thay đổi vận tốc của viên bi theo thời gian?



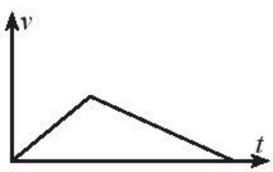
A.



B.



C.



D.

B. TỰ LUẬN

1. Ta có bảng giá trị của hàm *cầu* đối với sản phẩm A theo đơn giá của sản phẩm A như sau:

Đơn giá sản phẩm A (đơn vị: nghìn đồng)	10	20	40	70	90
Lượng *cầu* (nhu cầu về số sản phẩm)	338	288	200	98	50

a) Giả sử hàm *cầu* là một hàm số bậc hai theo đơn giá x, hãy viết công thức của hàm này, biết rằng $c = 392$.

b) Chứng tỏ rằng hàm số có thể viết thành dạng $y = f(x) = a(b - x)^2$.

c) Giả sử hàm *cầu* này lấy mọi giá trị trên đoạn [0; 100], hãy tính lượng *cầu* khi đơn giá sản phẩm A là 30, 50, 100.

d) Cùng giả thiết với câu c, nếu lượng *cầu* là 150 sản phẩm thì đơn giá sản phẩm A là khoảng bao nhiêu (đơn vị: nghìn đồng)?

2. Khi một vật từ vị trí y_0 được ném xiên lên cao theo góc α (so với phương ngang) với vận tốc ban đầu v_0 thì phương trình chuyển động của vật này là:

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan\alpha \,.\, x + y_0.$$

a) Vật bị ném xiên như vậy có chuyển động theo đường xiên hay không? Tại sao?

b) Giả sử góc ném có số đo là 45°, vận tốc ban đầu của vật là 3 m/s và vật được ném xiên từ độ cao 1 m so với mặt đất, hãy viết phương trình chuyển động của vật.

c) Một vận động viên ném lao đã lập kỉ lục với độ xa 90 m. Biết người này ném lao từ độ cao 0,9 m và góc ném là khoảng 45°. Hỏi vận tốc đầu của lao khi được ném đi là bao nhiêu?

(*Lưu ý*: Lấy giá trị $g = 10$ m/s^2 cho gia tốc trọng trường và làm tròn kết quả đến 2 chữ số thập phân.)

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1. a) Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $2x - 5 > 0$ nên $D = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

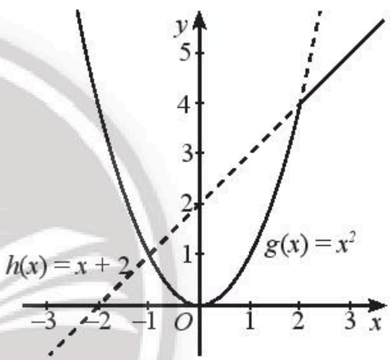
b) Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $(x + 3)(x - 7) \neq 0$ nên $D = \mathbb{R}\setminus\{-3; 7\}$.

c) Hàm số lấy giá trị bằng 1 khi $x < 0$ nên hàm số xác định với mọi $x < 0$.

Khi $x \geq 0$, hàm số xác định khi và chỉ khi $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

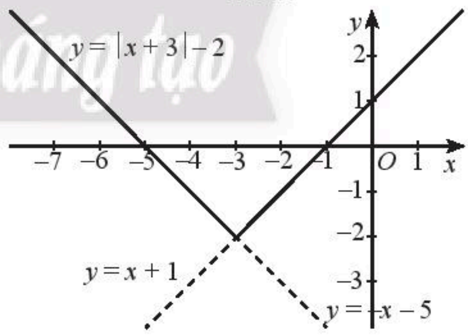
2. a) Vẽ đồ thị hàm số $g(x) = x^2$ và giữ lại phần đồ thị ứng với $x \leq 2$; vẽ đồ thị hàm số $h(x) = x + 2$ và giữ lại phần đồ thị ứng với $x > 2$. Ta được đồ thị hàm số cần vẽ (Hình 1).



Hình 1

b) Ta có: $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{với } x \geq -3 \\ -x - 5 & \text{với } x < -3. \end{cases}$

Ta được đồ thị hàm số cần vẽ (Hình 2).



Hình 2

3. a) Có thể thấy với mỗi mức đơn giá, đều có duy nhất một giá trị về lượng *cầu*. Do vậy bảng giá trị cho ở đề bài xác định một hàm số.

Hàm số có tập xác định $D = \{10; 20; 40; 70; 90\}$ và tập giá trị

$$T = \{338; 288; 200; 98; 50\}.$$

b)

Đơn giá sản phẩm A (đơn vị nghìn đồng)	10	20	40	70	90
Lượng *cung* (khả năng cung cấp về số sản phẩm)	2	8	32	98	162

c) Dựa vào hai bảng giá trị của lượng *cung* và lượng *cầu*, ta tìm được giá trị $x = 70$ thì lượng *cung* và lượng *cầu* đều bằng 98. Vậy thị trường của sản phẩm A cân bằng khi đơn giá của sản phẩm A này là 70 000 (đồng).

4. a) Lấy x_1, x_2 là hai số tuỳ ý cùng thuộc mỗi khoảng $(-\infty; -5)$, $(-5; +\infty)$, sao cho $x_1 < x_2$, ta chứng minh được $f(x_1) < f(x_2)$ nên hàm số luôn đồng biến trên các khoảng này.

b) Ta viết lại được: $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{với } x \geq \dfrac{1}{3} \\ -3x + 1 & \text{với } x < \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Bằng cách xét khoảng đồng biến và nghịch biến của hai hàm số $g(x) = 3x - 1$ và $h(x) = -3x + 1$, ta đi đến kết quả:

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

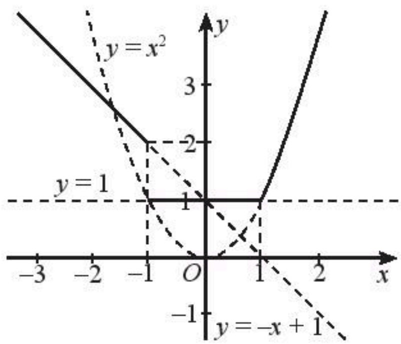
5.

– Đồ thị hàm số có dạng đi lên từ điểm có toạ độ $(-1; 1)$ đến điểm có toạ độ $(1; 4)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$;

– Đồ thị có dạng đi xuống từ điểm có toạ độ $(1; 4)$ đến điểm có toạ độ $(5; -2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$;

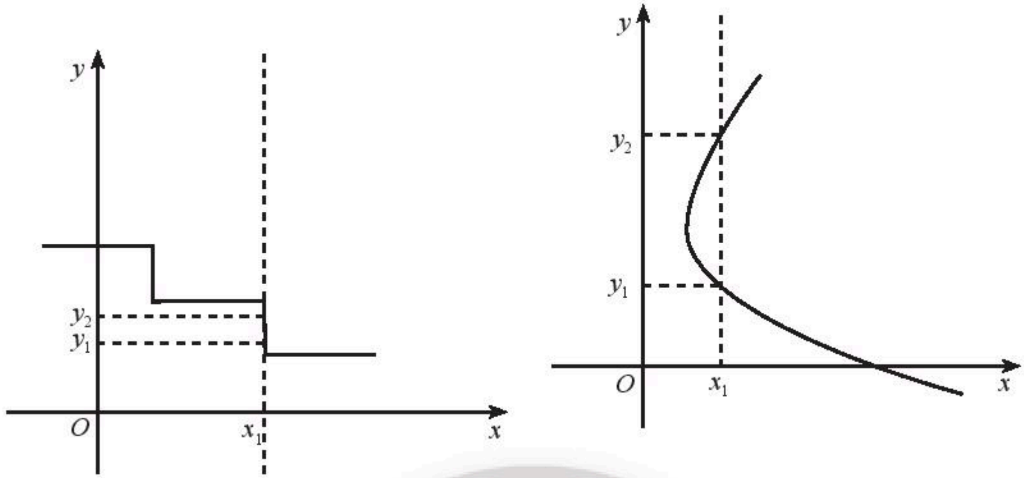
– Đồ thị có dạng đi lên từ điểm có toạ độ $(5; -2)$ đến điểm có toạ độ $(9; 6)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(5; 9)$.

6. Bằng cách vẽ đồ thị các hàm số $g(x) = -x + 1$ trên khoảng $(-\infty; -1)$, đồ thị hàm số $h(x) = 1$ trên nửa khoảng $[-1; 1)$, đồ thị hàm số $k(x) = x^2$ trên nửa khoảng $[1; +\infty)$ ta có đồ thị hàm số $f(x)$ (Hình 3).



Hình 3

7. Hai đường biểu diễn ở Hình b và Hình c không phải là đồ thị hàm số vì ứng với một giá trị của x, có đến hai (hay nhiều) giá trị khác nhau của y (Hình 4).



Hình 4

Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI

1.

– Hàm số $y = x^2 + |x+1|$ không phải là hàm số bậc hai vì công thức của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

– Hàm số

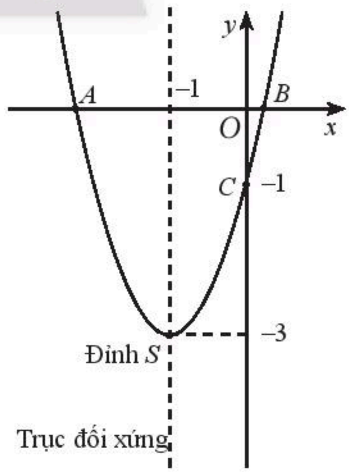
$$y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{với } x \geq 0 \\ -2x^2 - x & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

cũng không phải là hàm số bậc hai vì hàm số này được cho bằng hai công thức.

2. a) Đồ thị hàm số như Hình 1.

b) Đồ thị hàm số là parabol quay bề lõm lên nên hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng tung độ đỉnh của parabol.

Từ đồ thị, ta có đỉnh S có toạ độ $(-1; -3)$. Suy ra hàm số có tập giá trị là $[-3; +\infty)$. Cũng từ đồ thị hàm số, ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.



Hình 1

3. Hàm số bậc hai có công thức tổng quát: $y = ax^2 + bx + c$. Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên $c = -1$. Hoành độ đỉnh là $x_S = -1$ nên $-\dfrac{b}{2a} = -1$. Suy ra $b = 2a$.

Do đó công thức của hàm số là: $y = ax^2 + 2ax - 1$.

Đồ thị hàm số lại qua đỉnh $S(-1; -3)$ nên ta có: $-3 = a(-1)^2 + 2a(-1) - 1$.

Suy ra $a = 2$ và $b = 4$. Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x^2 + 4x - 1$.

4. Hàm số bậc hai có công thức tổng quát $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; -3)$ nên ta có: $a + b + c = -3$. (1)

Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0; -2)$ nên ta có: $c = -2$. (2)

Đồ thị hàm số đi qua điểm $C(2; -10)$ nên ta có: $4a + 2b + c = -10$. (3)

Thay (2) vào phương trình (1) và (3) ta có $\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a + 2b = -8 \end{cases}$. Suy ra $a = -3$; $b = 2$.

Vậy công thức hàm số là $y = -3x^2 + 2x - 2$.

b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -16 nên $c = -16$. Suy ra công thức hàm số: $f(x) = ax^2 + bx - 16$.

Một trong hai giao điểm của đồ thị với trục hoành có hoành độ bằng -2 nên $a\,.\,(-2)^2 + b\,.\,(-2) - 16 = 0$.

Đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$ nên $-\dfrac{b}{2a} = 3$ hay $-b = 6a$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} a.(-2)^2 + b.(-2) - 16 = 0 \\ -b = 6a \end{cases}$ ta được $a = 1$, $b = -6$.

Vậy $y = f(x) = x^2 - 6x - 16$.

5. a) Hàm số $y = f(x) = -2x^2 - 4x + 7$ có $a = -2 < 0$ và đồ thị hàm số là parabol có toạ độ đỉnh $S(-1; 9)$, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$, nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Hàm số có tập giá trị $T = (-\infty; 9]$.

b) Hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 1$ có $a = 1 > 0$ và đồ thị hàm số là parabol có đỉnh $S(3; -8)$, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 3)$, đồng biến trên $(3, +\infty)$.

Hàm số có tập giá trị $T = [-8; +\infty)$.

6.

– Hàm số có đồ thị là parabol nên là hàm số bậc hai. Hàm số này có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

– Parabol quay bề lõm xuống, có đỉnh $S(2; -1)$ nên hàm số có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Từ đây, ta cũng thấy hàm số có giá trị lớn nhất là -1 nên có tập giá trị là $T = (-\infty; -1]$.

7. Ta xét điểm B trên Hình 2.

a) Chiều dài l của đoạn dây dọi sử dụng là tung độ điểm B trên parabol có $x_B = 0,3$.

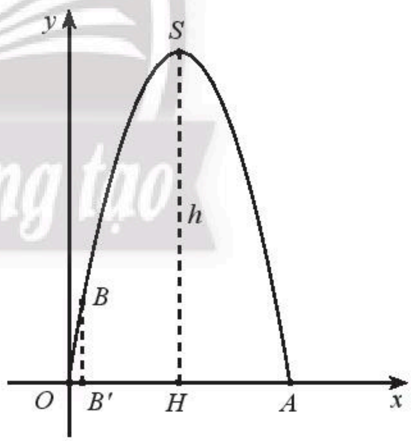
Nên ta có:

$$l = BB' = f(0,3) = -\frac{187}{856}(0,3)^2 + \frac{8041}{856}\,.\,0,3$$

$$\approx 2,8 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều dài dây dọi khoảng 2,8 m.

b) Khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng là hoành độ điểm B trên parabol với $y_B = 15$.



Hình 2

Ta có $-\dfrac{187}{856}x_B^2 + \dfrac{8041}{856}x_B = 15$.

Suy ra $x_1 \approx 1,6$ và $x_2 \approx 41,3$.

Vậy khoảng cách từ chân trụ cầu bên trái đến quả nặng là khoảng 1,6 m, khoảng cách từ chân trụ cầu bên phải đến quả nặng là khoảng 41,3 m.

Theo đề bài, ta chọn kết quả 1,6 m.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A. TRẮC NGHIỆM

1. D	**2.** B	**3.** C	**4.** B	**5.** D	**6.** C	**7.** D	**8.** C	**9.** B	**10.** C

B. TỰ LUẬN

1. a) Theo giả thiết, hàm cầu là một hàm số bậc hai nên công thức của hàm số có dạng: $y = f(x) = ax^2 + bx + 392$.

Ta chọn 2 cặp giá trị từ bảng đã cho lần lượt có $x = 10$, $x = 20$ thì được hệ phương trình sau: $\begin{cases} a\,.\,10^2 + b\,.\,10 + 392 = 338 \\ a\,.\,20^2 + b\,.\,20 + 392 = 288. \end{cases}$

Giải hệ phương trình này ta được $a = \dfrac{1}{50}; b = -\dfrac{28}{5}$.

Vậy $y = f(x) = \dfrac{1}{50}x^2 - \dfrac{28}{5}x + 392$.

b) Hàm số này còn có thể thu gọn thành dạng $y = f(x) = \dfrac{(140 - x)^2}{50} = \dfrac{1}{50}(140 - x)^2$.

c) Khi $x = 30$ thì lượng *cầu* là: $y = f(30) = 242$.

Khi $x = 50$ thì lượng *cầu* là: $y = f(50) = 162$.

Khi $x = 100$ thì lượng *cầu* là: $y = f(100) = 32$.

d) Nếu lượng *cầu* là 150 sản phẩm thì đơn giá sản phẩm A được tính nhờ phương trình sau: $\dfrac{1}{50}x^2 - \dfrac{28}{5}x + 392 = 150$.

Giải phương trình này, ta được $x_1 \approx 54{,}4$ và $x_2 \approx 226{,}6$.

Theo giả thiết câu c), hàm số xác định trên $[0; 100]$ nên chọn $x_1 \approx 54{,}4$.

Vậy nếu lượng *cầu* là 150 sản phẩm thì đơn giá sản phẩm A là khoảng 54 400 (đồng).

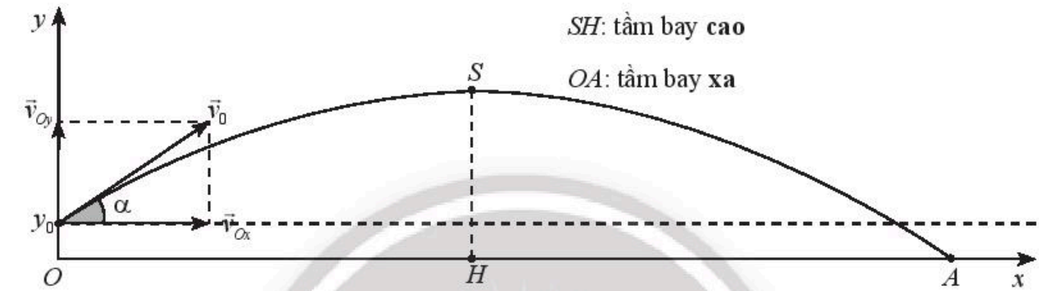
2. a) Với các giá trị đã biết là góc ném, vận tốc đầu và gia tốc trọng trường g là hằng số thì phương trình chuyển động trong ném xiên là một hàm số bậc hai theo x. Do vậy đồ thị hàm số là 1 parabol. Quỹ đạo chuyển động các vật cũng là một phần trên parabol này nên nó không thể chuyển động theo đường xiên.

b) Với góc ném có số đo là 45°, vận tốc ban đầu của vật là 3 m/s và vật được ném xiên từ độ cao 1 m so với mặt đất, ta có phương trình chuyển động của vật này là:

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha\ .\ x + y_0 = \frac{-10x^2}{2\ .\ 3^2\ .\ \cos^2 45^\circ} + \tan 45^\circ\ .\ x + 1 = -\frac{10}{9}x^2 + x + 1.$$

c) Theo giả thiết bài toán, ta có phương trình chuyển động của lao sau khi ném là:

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha . x + y_0 = \frac{-10x^2}{2v_0^2\ .\ \cos^2 45^\circ} + \tan 45^\circ . x + 0,9 = -\frac{10}{v_0^2}x^2 + x + 0,9$$



Mặt khác, lao được ném đi đạt độ xa 90 m tức là $OA = 90$. Nói cách khác điểm $A(90; 0)$ thuộc đồ thị hàm số nên ta có:

Xét hàm số $f(90) = 0$ hay $-\frac{10}{v_0^2} . 90^2 + 90 + 0,9 = 0$.

Giải theo ẩn v_0, ta được: $v_0^2 = \frac{90000}{101}$. Suy ra $v_0 \approx 29,85$ (m/s).

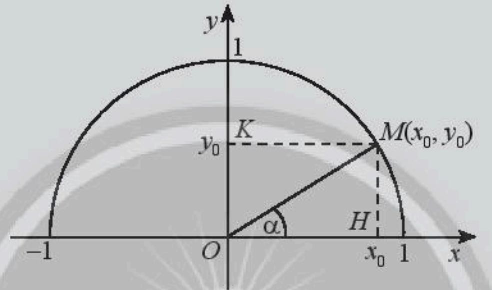
Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương IV. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giá trị lượng giác



Hình 1

Với mỗi góc α ($0° \le \alpha \le 180°$) ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ điểm M, ta có:

– Tung độ y_0 của M là ***sin*** của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha = y_0$;

– Hoành độ x_0 của M là ***côsin*** của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha = x_0$;

– Tỉ số $\dfrac{y_0}{x_0}$ $(x_0 \ne 0)$ là ***tang*** của góc α, kí hiệu là $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$;

– Tỉ số $\dfrac{x_0}{y_0}$ $(y_0 \ne 0)$ là ***côtang*** của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$.

Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác của góc* α.

2. Tính chất

– Mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc ***phụ nhau***:

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$; $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$;

$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$; $\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$.

– Mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc ***bù nhau***:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;

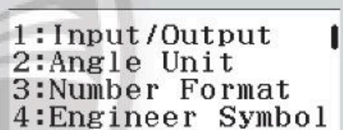
$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$ $(\alpha \ne 90°)$; $\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha$ $(0° < \alpha < 180°)$.

3. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Giá trị lượng giác \ α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\Vert$

4. Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của một góc

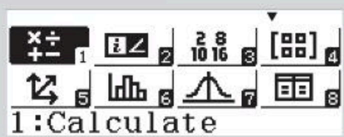
– Sau khi mở máy, ấn các phím SHIFT MENU để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.



– Ấn phím $\boxed{2}$ để vào chế độ cài đặt đơn vị đo góc.

– Ấn tiếp phím $\boxed{1}$ để xác định đơn vị đo góc là “độ”.

– Lại ấn phím MENU $\boxed{1}$ để vào chế độ tính toán.



B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Dùng định nghĩa tìm các giá trị lượng giác của góc 135°.

Giải

Lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$.

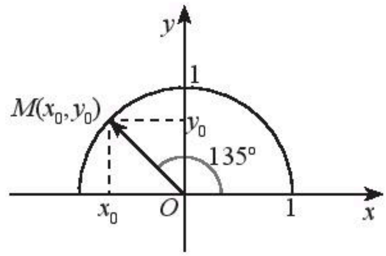
Ta có $\widehat{MOy} = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.

Ta tính được toạ độ điểm M là $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Vậy theo định nghĩa ta có:

$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\tan 135^\circ = -1$; $\cot 135^\circ = -1$.



Hình 2

Bài 2. Không dùng máy tính cầm tay, tính các giá trị lượng giác sau: $\sin 120^\circ$; $\cos 150^\circ$; $\tan 120^\circ$; $\cot 135^\circ$.

Giải

$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$; $\cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -\tan 45^\circ = -1$.

Bài 3. Dùng máy tính cầm tay, tính.

a) $\sin 144^\circ 23' 57''$; b) $\cos 123^\circ 5' 48''$;

c) $\tan 115^\circ 43' 26''$; d) $\cot 139^\circ 35' 28''$.

Giải

a) $\sin 144^\circ 23' 57'' \approx 0,582$; b) $\cos 123^\circ 5' 48'' \approx -0,546$;

c) $\tan 115^\circ 43' 26'' \approx -2,076$; d) $\cot 139^\circ 35' 28'' \approx -1,175$.

Bài 4. Dùng máy tính cầm tay, tìm x ($0^\circ \leq x \leq 180^\circ$), biết:

a) $\cos x = -0,511$; b) $\sin x = 0,456$;

c) $\tan x = -0,473$; d) $\cot x = -0,258$.

Giải

a) $\cos x = -0,511 \Rightarrow x \approx 120^\circ 43' 50''$;

b) $\sin x = 0,456 \Rightarrow x \approx 27^\circ 7' 45''$ hay $x \approx 152^\circ 52' 15''$;

c) $\tan x = -0,473 \Rightarrow x \approx 154^\circ 41' 9''$;

d) $\cot x = -0,258 \Rightarrow x \approx 104^\circ 28' 1''$.

C. BÀI TẬP

1. Tính giá trị của $T = 4\cos 60^\circ + 2\sin 135^\circ + 3\cot 120^\circ$.

2. Chứng minh rằng:

a) $\sin 138^\circ = \sin 42^\circ$; b) $\tan 125^\circ = -\cot 35^\circ$.

3. Tìm góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$) trong mỗi trường hợp sau:

a) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; d) $\cot\alpha = -1$.

4. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

a) $\tan B = -\tan(A + C)$; b) $\sin C = \sin(A + B)$.

5. Chứng minh rằng với mọi góc x ($0^\circ \le x \le 90^\circ$), ta đều có:

a) $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$; b) $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;

c) $\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ $(x \ne 90^\circ)$; d) $\cot^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ $(x \ne 0^\circ)$.

6. Cho góc x với $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $S = 4\sin^2 x + 8\tan^2 x$.

7. Dùng máy tính cầm tay, tính.

a) $\sin 138^\circ 12'24''$; b) $\cos 144^\circ 35'12''$; c) $\tan 152^\circ 35'44''$.

8. Dùng máy tính cầm tay, tìm x, biết:

a) $\cos x = -0{,}234$; b) $\sin x = 0{,}812$; c) $\cot x = -0{,}333$.

Bài 2. ĐỊNH LÍ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÍ SIN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lí côsin trong tam giác

Định lí côsin

Với mọi tam giác ABC, nếu đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ thì ta luôn có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Hệ quả

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \qquad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}; \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lí sin trong tam giác

Định lí sin

Với mọi tam giác ABC, đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hệ quả

$a = 2R\sin A$; $\qquad b = 2R\sin B$; $\qquad c = 2R\sin C$;

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$; $\qquad \sin B = \dfrac{b}{2R}$; $\qquad \sin C = \dfrac{c}{2R}$.

3. Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC. Ta kí hiệu:

- h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB.
- R, r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác.
- p là nửa chu vi tam giác.
- S là diện tích tam giác.

Ta có các ***công thức tính diện tích tam giác*** sau:

1) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$; $\qquad$ 2) $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$;

3) $S = \dfrac{abc}{4R}$; $\qquad$ 4) $S = pr$;

5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (***công thức Heron***).

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 120°$, $AC = 6$ cm và $BC = 10$ cm. Tính độ dài cạnh AB và các góc A, B của tam giác đó.

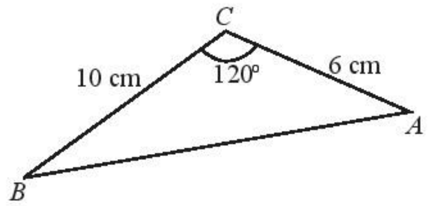
Giải

Theo định lí côsin, ta có:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC\,.\,BC\,.\cos C$

$= 6^2 + 10^2 - 2\,.\,6\,.\,10\,.\cos 120^\circ = 196.$

Vậy $AB = \sqrt{196} = 14$ (cm).



Hình 1

Theo hệ quả của định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,.\,AB\,.\,AC} = \frac{14^2 + 6^2 - 10^2}{2\,.\,14\,.\,6} = \frac{11}{14}.$$

Suy ra $\widehat{A} \approx 38^\circ 12' 48''$; $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 21^\circ 47' 12''$.

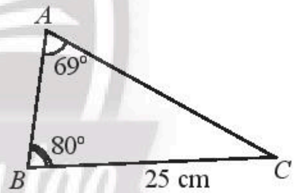
Bài 2. Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 8$, $b = 15$, $c = 20$. Tính góc A của tam giác ABC.

Giải

Theo hệ quả của định lí côsin, ta có: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,.\,b\,.\,c} = \dfrac{15^2 + 20^2 - 8^2}{2\,.\,15\,.\,20} = 0{,}935.$

Suy ra $\widehat{A} \approx 20^\circ 46' 19''$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 69^\circ$, $\widehat{B} = 80^\circ$, $BC = 25$ cm. Tính độ dài các cạnh AC, AB và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.



Hình 2

Giải

Đặt $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$.

Ta có: $a = 25$ cm; $\widehat{C} = 180^\circ - (80^\circ + 69^\circ) = 31^\circ$.

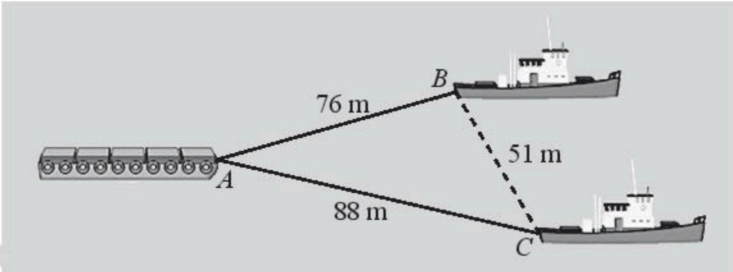
Áp dụng định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Suy ra: $AC = b = \dfrac{a \sin B}{\sin A} = \dfrac{25\,.\sin 80^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 26{,}37$ (cm);

$$AB = c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{25\,.\sin 31^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 13{,}79 \text{ (cm)};$$

$$R = \frac{a}{2\,.\sin A} = \frac{25}{2\,.\sin 69^\circ} \approx 13{,}39 \text{ (cm)}.$$

Bài 4. Hai tàu kéo cách nhau 51 m, cùng kéo một chiếc xà lan như Hình 3. Biết chiều dài của hai sợi cáp lần lượt là 76 m và 88 m, tính góc được tạo bởi hai sợi cáp.



Hình 3

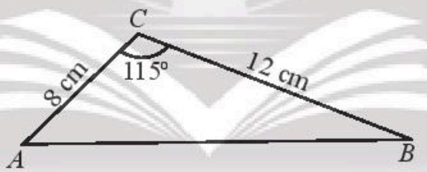
Giải

Gọi vị trí của xà lan và hai con tàu lần lượt là A, B, C. Theo hệ quả của định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,.\,AB\,.\,AC} = \frac{76^2 + 88^2 - 51^2}{2\,.\,76\,.\,88} \approx 0{,}8163.$$

Vậy góc được tạo bởi hai sợi cáp là: $\widehat{A} \approx 35^\circ 16' 57''$.

Bài 5. Tính diện tích tam giác ABC trong Hình 4.



Hình 4

Giải

Diện tích tam giác ABC:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}\,.\,12\,.\,8\,.\,\sin 115^\circ \approx 43{,}5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài 6. Cho tam giác ABC có cạnh $a = 2\sqrt{3}$ cm, $b = 2$ cm và $\widehat{C} = 30^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Giải

a) Diện tích tam giác ABC:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}\,.\,2\sqrt{3}\,.\,2\,.\,\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\,.\,2\sqrt{3}\,.\,2\,.\,\frac{1}{2} = \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) Áp dụng định lí côsin, ta có:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 . a . b . \cos C = 12 + 4 - 2 . 2\sqrt{3} . 2 . \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

Suy ra $c = 2$ cm.

Áp dụng định lí sin, ta có:

$$R = \frac{c}{2 . \sin C} = \frac{2}{2 . \sin 30^\circ} = \frac{2}{2 . \frac{1}{2}} = 2 \text{ (cm)}.$$

c) Ta có công thức $S = p . r$.

Suy ra $r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2+2} \approx 0,46$ (cm).

Bài 7. Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 15$ cm, $b = 13$ cm, $c = 14$ cm.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Giải

a) Ta có $p = \frac{1}{2}(15 + 13 + 14) = 21$ (cm).

Áp dụng công thức Heron, ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) Ta có $S = \frac{abc}{4R}$, suy ra $R = \frac{abc}{4S} = \frac{15.13.14}{4 . 84} = 8,125$ (cm).

c) Ta có công thức $S = p . r$.

Suy ra $r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4$ (cm).

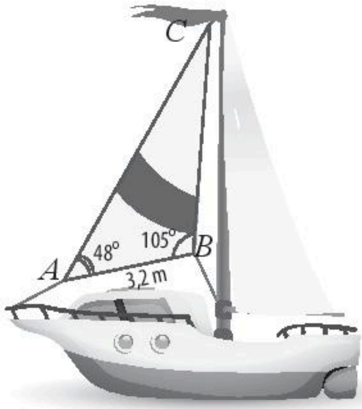
Bài 8. Cho tam giác ABC có ba cạnh là a, b, c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng: $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Giải

Ta có các công thức: $S = \frac{1}{2} a.b.\sin C$; $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$.

Suy ra: $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Bài 9. Tính diện tích một cánh buồm hình tam giác có chiều dài một cạnh là 3,2 m và hai góc kề cạnh đó có số đo lần lượt là 48° và 105° (Hình 5).



Hình 5

Giải

Gọi ba đỉnh của cánh buồm là A, B, C. Đặt $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$.

Ta có: $c = 3{,}2$ m; $\widehat{C} = 180^\circ - (105^\circ + 48^\circ) = 27^\circ$.

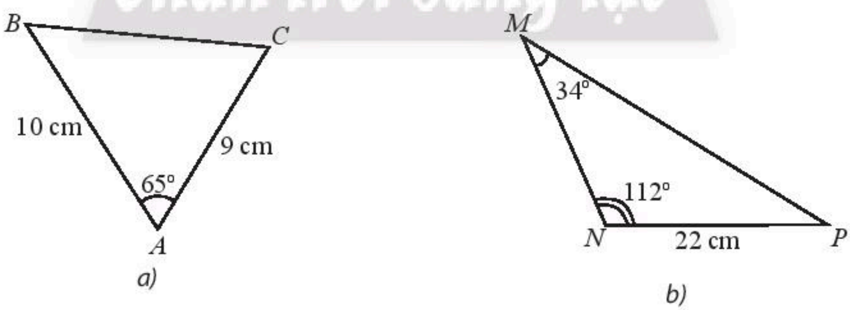
Áp dụng định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Suy ra: $AC = b = \dfrac{c\sin B}{\sin C} = \dfrac{3{,}2\,.\,\sin 105^\circ}{\sin 27^\circ} \approx 6{,}8$ (m);

Ta có $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\,.\,6{,}8\,.\,3{,}2\,.\,\sin 48^\circ \approx 8{,}1$ (m^2).

C. BÀI TẬP

1. Tính độ dài các cạnh chưa biết trong các tam giác sau:



Hình 6

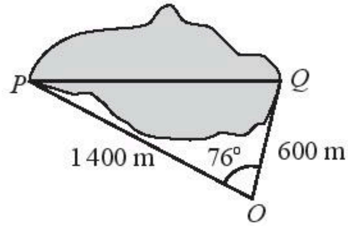
2. Cho tam giác ABC, biết cạnh $a = 75$ cm, $\widehat{B} = 80^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

a) Tính các góc, các cạnh còn lại của tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

3. Tính góc lớn nhất của tam giác ABC, biết các cạnh là $a = 8$, $b = 12$, $c = 6$.

4. Tính khoảng cách giữa hai điểm P và Q của một hồ nước (Hình 7). Cho biết từ một điểm O cách 2 điểm P và Q lần lượt là 1 400 m và 600 m người quan sát nhìn thấy một góc 76°.



Hình 7

5. Cho tam giác ABC với $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$. Chứng minh rằng:

$$1 + \cos A = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}.$$

6. Cho tam giác ABC có $a = 24$ cm, $b = 26$ cm, $c = 30$ cm.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

7. Cho tam giác MNP có $MN = 10$, $MP = 20$ và $\widehat{M} = 42^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác MNP.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP. Tính diện tích tam giác ONP.

8. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh các tam giác GBC, GAB, GAC có diện tích bằng nhau.

9. Cho tam giác ABC và cho các điểm B', C' trên cạnh AB và AC.

Chứng minh $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \dfrac{AB.AC}{AB'.AC'}$.

10. Tính diện tích bề mặt của một miếng bánh mì kebab hình tam giác có hai cạnh lần lượt là 10 cm, 12 cm và góc tạo bởi hai cạnh đó là 35°.

Bài 3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giải tam giác

Giải tam giác là tìm số đo các cạnh và các góc còn lại của tam giác đó khi ta biết được các yếu tố đủ để xác định tam giác đó.

2. Phương pháp giải tam giác

– Nếu biết 2 cạnh và góc xen giữa hai cạnh đó: Sử dụng định lí côsin.

– Nếu biết 1 cạnh và 2 góc bất kì của tam giác: Sử dụng định lí sin.

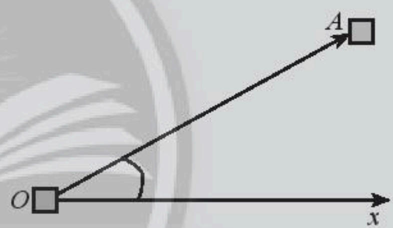
– Nếu biết 3 cạnh của tam giác: Sử dụng định lí côsin.

– Có thể dùng các công thức tính diện tích để hỗ trợ giải tam giác.

3. Áp dụng giải tam giác vào thực tế

Vận dụng giải tam giác giúp ta giải quyết rất nhiều bài toán trong thực tế, đặc biệt trong thiết kế và xây dựng.

Chú ý: Nếu người quan sát đặt mắt tại điểm O nhìn lên thấy một vật tại điểm A và vẽ tia Ox song song với mặt đất thì $\widehat{xOA}$ gọi là góc nâng tại O khi nhìn thấy A.



Hình 1

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải tam giác ABC, biết $AB = 75$ m, $AC = 100$ m và $\widehat{A} = 32°$.

Giải

Đặt $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Ta cần tính cạnh a và hai góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$.

Áp dụng định lí côsin, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 75^2 + 100^2 - 2\,.\,75\,.\,100\,.\,\cos 32° \approx 2\,904{,}3.$$

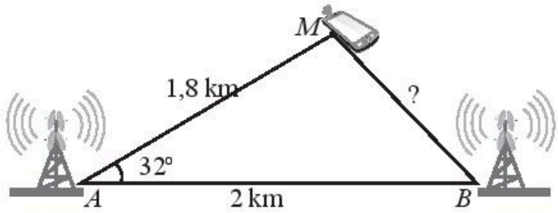
Suy ra $a \approx \sqrt{2904{,}3} \approx 53{,}9$ (m).

Áp dụng hệ quả định lí côsin, ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx \frac{53{,}9^2 + 75^2 - 100^2}{2\,.\,53{,}9\,.\,75} \approx -0{,}182.$$

Suy ra $\widehat{B} \approx 100°29'10''$, $\widehat{C} \approx 47°30'50''$.

Bài 2. Tính khoảng cách từ vị trí của một người đang gọi điện thoại di động đến trạm phát sóng B với số liệu đã cho trong Hình 2.



Hình 2

Giải

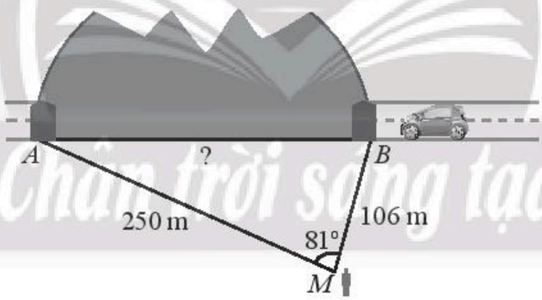
Áp dụng định lí côsin trong tam giác MAB, ta có:

$MB^2 = AB^2 + AM^2 - 2\,.\,AB\,.\,AM\,.\cos A = 2^2 + 1{,}8^2 - 2\,.\,2\,.\,1{,}8\,.\cos 32° \approx 1{,}134.$

Suy ra $MB \approx \sqrt{1{,}134} \approx 1{,}065$ (km).

Vậy khoảng cách từ vị trí của người đó đến trạm phát sóng B là 1,065 km.

Bài 3. Tính chiều dài của đường hầm AB với số liệu cho trong Hình 3.



Hình 3

Giải

Gọi vị trí của người quan sát là điểm M và gọi A, B lần lượt là hai đầu đường hầm. Ta có tam giác MAB với $MA = 250$ m; $MB = 106$ m và $\widehat{M} = 81°$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác MAB, ta có:

$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2\,.\,MA\,.\,MB\,.\cos M = 250^2 + 106^2 - 2\,.\,250\,.\,106\,.\cos 81° \approx 65\,444{,}97.$

Suy ra $AB \approx \sqrt{65\,444{,}97} \approx 255{,}82$ (m).

Vậy chiều dài của đường hầm AB khoảng 255,82 m.

Bài 4. Hai máy bay cùng cất cánh từ một sân bay nhưng bay theo hai hướng khác nhau. Một chiếc di chuyển với tốc độ 450 km/h theo hướng tây và chiếc còn lại di chuyển theo hướng hợp với hướng bắc một góc 25° về phía tây với tốc độ 630 km/h. Hỏi sau 90 phút, hai máy bay cách nhau bao xa? Giả sử chúng đang ở cùng độ cao.

Giải

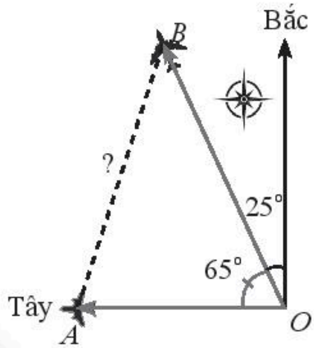
Gọi O, A, B lần lượt là vị trí sân bay và hai máy bay sau 90 phút. Ta có:

$OA = 450 \cdot \frac{3}{2} = 675$ (km); $OB = 630 \cdot \frac{3}{2} = 945$ (km);

$\widehat{AOB} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OAB, ta có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\widehat{AOB}$$
$$= 675^2 + 945^2 - 2 \cdot 675 \cdot 945 \cdot \cos 65^\circ$$
$$\approx 809\,495.$$



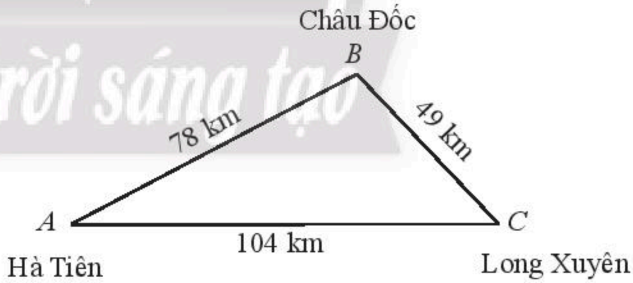
Hình 4

Suy ra $AB \approx \sqrt{809\,495} \approx 900$ (km).

Vậy sau 90 phút, hai máy bay cách nhau khoảng 900 km.

Bài 5.

Người ta dự định làm hai đường cao tốc BA và BC từ Châu Đốc đến Hà Tiên và từ Châu Đốc đến Long Xuyên như Hình 5. Hãy tính góc tạo bởi hướng của hai cao tốc.



Hình 5

Giải

$$\cos B = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC} \approx \frac{78^2 + 49^2 - 104^2}{2 \cdot 78 \cdot 49} = \frac{-111}{364} \Rightarrow \widehat{B} \approx 107^\circ 45' 18''.$$

Vậy góc tạo bởi hướng của hai cao tốc là $107^\circ 45' 18''$.

C. BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC với $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ và $a = b$. Chứng minh rằng: $c^2 = 2a^2(1 - \cos C)$.

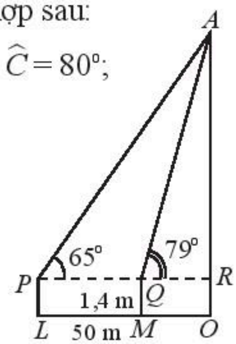
2. Tính các góc chưa biết của tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $\widehat{A} = 42^\circ$, $\widehat{B} = 63^\circ$;

b) $BC = 10$, $AC = 20$, $\widehat{C} = 80^\circ$;

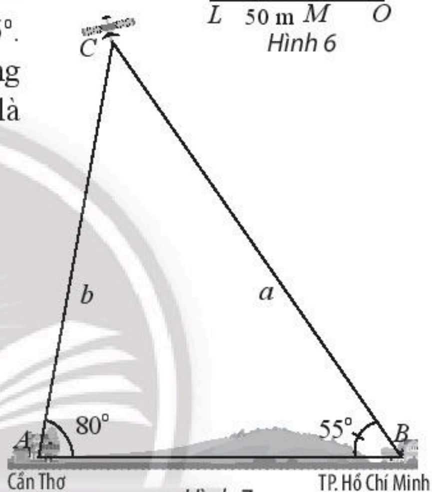
c) $AB = 15$, $AC = 25$, $BC = 30$.

3. Để xác định chiều cao của một toà nhà cao tầng, một người đứng tại điểm M, sử dụng giác kế nhìn thấy đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RQA} = 79^\circ$, người đó lùi ra xa một khoảng cách $LM = 50$ m thì nhìn thấy đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RPA} = 65^\circ$. Hãy tính chiều cao của toà nhà, biết rằng khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kế đó là $PL = QM = 1{,}4$ m (Hình 6).



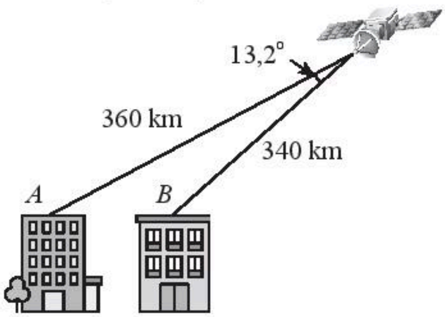
Hình 6

4. Một vệ tinh quay quanh Trái Đất, đang bay phía trên hai trạm quan sát ở hai thành phố Hồ Chí Minh và Cần Thơ. Khi vệ tinh nằm giữa hai trạm này, góc nâng của nó được quan sát đồng thời là 55° tại thành phố Hồ Chí Minh và 80° tại Cần Thơ. Hỏi khi đó vệ tinh cách trạm quan sát tại Cần Thơ bao xa? Biết rằng, khoảng cách giữa hai trạm quan sát là 127 km.

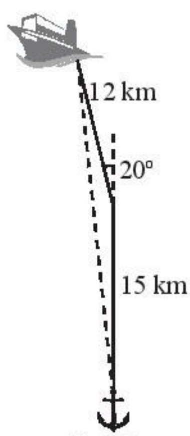


Hình 7

5. Tính khoảng cách AB giữa nóc hai toà cao ốc. Cho biết khoảng cách từ hai điểm đó đến một vệ tinh viễn thông lần lượt là 360 km, 340 km và góc nhìn từ vệ tinh đến A và B là $13{,}2^\circ$ (Hình 8).



Hình 8



Hình 9

6. Một chiếc tàu khởi hành từ bến cảng, đi về hướng bắc 15 km, sau đó bẻ lái 20° về hướng tây bắc và đi thêm 12 km nữa (Hình 9). Tính khoảng cách từ tàu đến bến cảng.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A. TRẮC NGHIỆM

1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin a = \sin(180^\circ - a)$; B. $\cos a = \cos(180^\circ - a)$;

C. $\tan a = \tan(180^\circ - a)$; D. $\cot a = \cot(180^\circ - a)$.

2. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$; B. $\cos 45^\circ = \sin 135^\circ$;

C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$; D. $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$.

3. Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$; B. $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$;

C. $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$; D. $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$.

4. Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là đúng?

A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$.

5. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A nhọn;

B. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A tù;

C. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A nhọn;

D. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A vuông.

6. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 9$ cm. Giá trị $\cos A$ là:

A. $\frac{2}{3}$; B. $\frac{1}{3}$; C. $-\frac{2}{3}$; D. $\frac{1}{2}$.

7. Cho tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 18$ cm và có diện tích bằng 64 cm^2. Giá trị $\sin A$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B. $\frac{3}{8}$; C. $\frac{4}{5}$; D. $\frac{8}{9}$.

8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = 30$ cm. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G. Diện tích tam giác GFC là:

A. 50 cm^2; B. $50\sqrt{2}$ cm^2; C. 75 cm^2; D. $15\sqrt{105}$ cm^2.

9. Tam giác ABC có diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh CA lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

A. $2S$; B. $3S$; C. $4S$; D. $6S$.

10. Cho $\widehat{xOy} = 30°$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng:

A. 1,5; B. $\sqrt{3}$; C. $2\sqrt{2}$; D. 2.

B. TỰ LUẬN

1. Cho tam giác ABC với ba cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$$

2. Cho tam giác ABC. Biết $a = 24$; $b = 36$; $\widehat{C} = 52°$. Tính cạnh c và hai góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$.

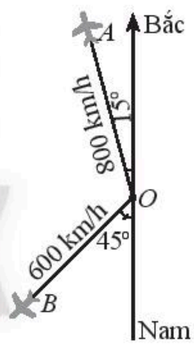
3. Hai chiếc tàu thuỷ P và Q cách nhau 50 m. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển, người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 40°$ và $\widehat{BQA} = 52°$. Tính chiều cao của tháp hải đăng đó.

4. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 99°$, $b = 6$, $c = 10$. Tính:

a) Diện tích tam giác ABC;

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

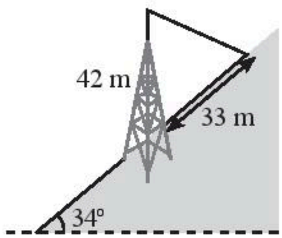
5. Hai máy bay rời một sân bay cùng một lúc. Một chiếc bay với vận tốc 800 km/h theo hướng lệch so với hướng bắc 15° về phía tây. Chiếc còn lại bay theo hướng lệch so với hướng nam 45° về phía tây với vận tốc 600 km/h (Hình 1). Hỏi hai máy bay đó cách nhau bao xa sau 3 giờ?



Hình 1

6. Cho tam giác ABC không vuông. Chứng minh rằng: $\dfrac{\tan A}{\tan B} = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$.

7. Một tháp viễn thông cao 42 m được dựng thẳng đứng trên một sườn dốc 34° so với phương ngang. Từ đỉnh tháp người ta neo một sợi cáp xuống một điểm trên sườn dốc cách chân tháp 33 m như Hình 2. Tính chiều dài của sợi dây cáp đó.



Hình 2

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

1. $T = 4\cos 60^\circ + 2\sin 135^\circ + 3\cot 120^\circ$

$= 4.\dfrac{1}{2} + 2.\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 3.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}.$

2. a) $\sin 138^\circ = \sin(180^\circ - 138^\circ) = \sin 42^\circ$.

b) $\tan 125^\circ = -\tan(180^\circ - 125^\circ) = -\tan 55^\circ = -\cot(90^\circ - 55^\circ) = -\cot 35^\circ$.

3. a) $\alpha = 150^\circ$; b) $\alpha = 60^\circ$ hay $\alpha = 120^\circ$;

c) $\alpha = 150^\circ$; d) $\alpha = 135^\circ$.

4. a) $\tan B = -\tan(180^\circ - B) = -\tan(A + C)$;

b) $\sin C = \sin(180^\circ - C) = \sin(A + B)$.

5. a) Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

b) Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;

c) Ta có: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ $(x \neq 90^\circ)$;

d) Ta có: $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cot^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ $(x \neq 0^\circ)$.

6. $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 120^\circ \Rightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan x = -\sqrt{3}$.

$S = 4\sin^2 x + 8\tan^2 x = 4.\dfrac{3}{4} + 8.3 = 27.$

7. a) $\sin 138^\circ 12' 24'' \approx 0{,}666$;

b) $\cos 144^\circ 35' 12'' \approx -0{,}815$;

c) $\tan 152^\circ 35' 44'' \approx -0{,}518$.

8. a) $\cos x = -0{,}234 \Rightarrow x \approx 103^\circ 31' 58''$;

b) $\sin x = 0{,}812 \Rightarrow x \approx 54^\circ 17' 30''$, hay $x \approx 125^\circ 42' 30''$;

c) $\cot x = -0{,}333 \Rightarrow x \approx 108^\circ 25' 4''$.

Bài 2. ĐỊNH LÍ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÍ SIN

1. a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,.\,AB\,.\,AC\,.\cos 65^\circ = 10^2 + 9^2 - 2\,.\,10\,.\,9\,.\cos 65^\circ \approx 104{,}929$
$\Rightarrow BC \approx 10{,}24$ (cm).

b) Ta có: $NP = 22$ cm; $\widehat{P} = 180^\circ - (112^\circ + 34^\circ) = 34^\circ$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\dfrac{MP}{\sin N} = \dfrac{MN}{\sin P} = \dfrac{NP}{\sin M}$.

Suy ra: $MP = \dfrac{NP \sin N}{\sin M} = \dfrac{22.\sin 112^\circ}{\sin 34^\circ} \approx 36{,}48$ (cm).

$\widehat{M} = \widehat{P} \Rightarrow \Delta NMP$ cân tại $N \Rightarrow NM = NP = 22$ (cm).

2. a) Ta có: $a = 75$ cm; $\widehat{A} = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Suy ra: $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A} = \dfrac{75\,.\sin 80^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 85{,}29$ (cm).

$c = \dfrac{a \sin C}{\sin A} = \dfrac{75.\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 55{,}67$ (cm).

b) $R = \dfrac{a}{2.\sin A} = \dfrac{75}{2\sin 60^\circ} = 25\sqrt{3}$ (cm).

3. Do b là cạnh lớn nhất nên góc B là góc lớn nhất. Ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,.\,a\,.\,c} = \frac{8^2 + 6^2 - 12^2}{2\,.\,8\,.\,6} \approx -\frac{11}{24}; \Rightarrow \widehat{B} \approx 117^\circ 16' 46''.$$

4. $PQ = \sqrt{OP^2 + OQ^2 - 2OP\,.\,OQ\,.\cos O}$

$= \sqrt{1400^2 + 600^2 - 2.1400\,.\,600\,.\cos 76^\circ} \approx 1383{,}32$ (m).

5. $1 + \cos A = 1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,.\,b\,.\,c} = \dfrac{(b+c)^2 - a^2}{2\,.\,b\,.\,c} = \dfrac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$.

6. a) $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c) = 40$.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{40.16.14.10} = 80\sqrt{14}$ (cm^2).

b) $r = \dfrac{S}{P} = \dfrac{80\sqrt{14}}{40} = 2\sqrt{14}$ (cm).

7. a) $S = \frac{1}{2}MN.MP.\sin M = \frac{1}{2}.10.20.\sin 42^\circ \approx 67$.

b) Ta có: $\widehat{NOP} = 2\widehat{NMP} = 84^\circ$.

$NP = \sqrt{MN^2 + MP^2 - 2MN.MP.\cos M}$

$= \sqrt{10^2 + 20^2 - 2.10.20.\cos 42^\circ} \approx 14,24$.

$R = \frac{NP}{2\sin M} \approx \frac{14,24}{2.\sin 42^\circ} \approx 10,64 \Rightarrow ON = OP = R \approx 10,64$.

Vậy $S_{ONP} = \frac{1}{2}ON.OP.\sin 84^\circ \approx \frac{1}{2}(10,64)^2.\sin 84^\circ \approx 56,30$.

8. Vẽ AH và GK vuông góc với BC. Ta có $AH = 3GK$, suy ra $S_{GBC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.

Chứng minh tương tự ta có: $S_{GBC} = S_{GAB} = S_{GAC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.

9. Ta có: $\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{\frac{1}{2}AB.AC.\sin A}{\frac{1}{2}AB'.AC'.\sin A} = \frac{AB.AC}{AB'.AC'}$.

10. Diện tích miếng bánh mì kebab là: $S = \frac{1}{2}.10.12.\sin 35^\circ \approx 34,4\ (\text{cm}^2)$.

Bài 3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

1. Áp dụng định lí côsin ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$.
Do $a = b$ nên $c^2 = 2a^2 - 2a^2.\cos C = 2a^2(1 - \cos C)$.

2. a) $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 42^\circ - 63^\circ = 75^\circ$.

b) Áp dụng định lí côsin, ta có:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos C = 10^2 + 20^2 - 2.10.20.\cos 80^\circ \approx 430,54$

$\Rightarrow AB \approx 20,75$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin A} = \frac{20}{\sin B} = \frac{20,75}{\sin 80^\circ}$.

$\Rightarrow \sin A \approx 0,475, \sin B \approx 0,949 \Rightarrow \widehat{A} \approx 28^\circ 21'34'', \widehat{B} \approx 71^\circ 37'21''$.

c) Áp dụng hệ quả định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{15^2 + 25^2 - 30^2}{2\,.\,15\,.\,25} = -\frac{1}{15}$$

$\Rightarrow \widehat{A} \approx 93°49'21''$.

Áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{30}{\sin 93°49'21''} = \frac{25}{\sin B} = \frac{15}{\sin C}.$$

$\Rightarrow \widehat{C} \approx 29°55'35''$; $\widehat{B} \approx 56°15'4''$.

3. Đặt $d = PQ = 50$ m; $h = AR$ là chiều cao từ giác kế đến đỉnh toà nhà.

Ta có: $\widehat{APR} = \alpha = 65°$, $\widehat{AQR} = \beta = 79°$.

Gọi: $d_1 = PR = \dfrac{h}{\tan\alpha}$; $d_2 = QR = \dfrac{h}{\tan\beta}$; ta có:

$$d = d_1 - d_2 = \frac{h}{\tan\alpha} - \frac{h}{\tan\beta} = h\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}\right).$$

Suy ra $h = \dfrac{d}{\dfrac{1}{\tan\alpha} - \dfrac{1}{\tan\beta}} = \dfrac{50}{\dfrac{1}{\tan 65°} - \dfrac{1}{\tan 79°}} \approx 183{,}9$ (m).

Vậy chiều cao của toà nhà là $AR + RO \approx 183{,}9 + 1{,}4 = 185{,}3$ (m).

4. Ta có $\widehat{C} = 180° - (80° + 55°) = 45°$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$AC = \frac{AB\,.\sin B}{\sin C} = \frac{127\,.\sin 55°}{\sin 45°} \approx 147 \text{ (km)}.$$

Vậy vệ tinh cách trạm quan sát tại thành phố Cần Thơ khoảng 147 km.

5. Áp dụng định lí côsin trong tam giác OAB, ta có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos\widehat{AOB} = 360^2 + 340^2 - 2.360.340.\cos 13{,}2° \approx 6867{,}88.$$

Suy ra $AB \approx \sqrt{6867{,}88} \approx 82{,}87$ (km).

Vậy khoảng cách giữa nóc hai toà cao ốc khoảng 83 km.

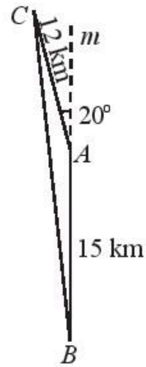
6. Ta có: $AB = 15$ km, $AC = 12$ km, $\widehat{CAm} = 20^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{CAB} = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$.

Áp dụng định lí côsin, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,.\,AB\,.\,AC\,.\cos A \Rightarrow BC \approx 26{,}59$ (km).

Vậy con tàu cách bến cảng khoảng 27 km.



Hình 1

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A. TRẮC NGHIỆM

1. A	**2.** D	**3.** C	**4.** C	**5.** A	**6.** A	**7.** D	**8.** C	**9.** D	**10.** D

B. TỰ LUẬN

1. Áp dụng định lí côsin ta có:

$$\frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc};\ \frac{\cos B}{b} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc};\ \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}.$$

$$\Rightarrow \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$$

2. Áp dụng định lí côsin:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 24^2 + 36^2 - 2\,.\,24\,.\,36\,.\,\cos 52^\circ \approx 808{,}14$.

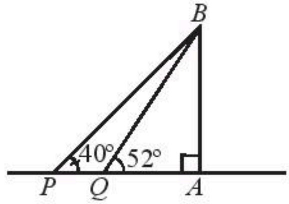
$\Rightarrow c \approx 28{,}43$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \dfrac{24}{\sin A} = \dfrac{36}{\sin B} = \dfrac{28{,}43}{\sin 52^\circ}$

$$\Rightarrow \sin A \approx \frac{24\,.\,\sin 52^\circ}{28{,}43} \approx 0{,}665;\ \sin B \approx \frac{36\,.\,\sin 52^\circ}{28{,}43} \approx 0{,}998.$$

$\Rightarrow \widehat{A} \approx 41^\circ 40'56''$, $\widehat{B} \approx 86^\circ 22'32''$.

3. Ta có: $\widehat{BPA}=40^{\circ}$, $\widehat{BQA}=52^{\circ}$, $\widehat{BAP}=90^{\circ}$, $PQ=50$ m.



Hình 1

$\Rightarrow \widehat{BQP}=128^{\circ}$, $\widehat{PBQ}=180^{\circ}-128^{\circ}-40^{\circ}=12^{\circ}$.

Áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{PQ}{\sin B}=\frac{BQ}{\sin P}\Rightarrow BQ=\frac{50.\sin 40^{\circ}}{\sin 12^{\circ}}\approx 154{,}6\text{ (m)}.$$

$\Rightarrow AB=BQ\,.\sin 52^{\circ}=154{,}6\,.\sin 52^{\circ}\approx 121{,}83$ (m).

4. a) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A\approx 29{,}63$;

b) Áp dụng định lí côsin, ta có: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow a\approx 12{,}44$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $R=\dfrac{a}{2.\sin A}\approx\dfrac{12{,}44}{2.\sin 99^{\circ}}\approx 6{,}30$.

$$r=\frac{S}{p}=\frac{2S}{a+b+c}\approx\frac{2\,.\,29{,}63}{6+10+12{,}44}\approx 2{,}08.$$

5. Ta có: $\widehat{AOB}=180^{\circ}-45^{\circ}-15^{\circ}=120^{\circ}$.

Áp dụng định lí côsin, ta có:

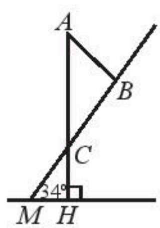
$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2-2OA\,.\,OB\,.\cos\widehat{AOB}}$$

$$=\sqrt{2\,400^2+1800^2-2\,.\,2\,400\,.\,1800\,.\cos 120^{\circ}}\approx 3\,650\text{ (km)}.$$

Vậy hai máy bay cách nhau khoảng 3 650 km.

6. Ta có: $$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\dfrac{a}{2R}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}\cdot\frac{\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{\dfrac{b}{2R}}=\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}.$$

7. Ta có: $AC=42$, $BC=33$, $\widehat{CMH}=34^{\circ}$, $\widehat{CHM}=90^{\circ}$



Hình 2

$\Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{MCH}=90^{\circ}-34^{\circ}=56^{\circ}$.

Áp dụng định lí côsin, ta có:

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC.BC.\cos C\Rightarrow AB\approx 36{,}1$ (m).

Chương V. VECTƠ

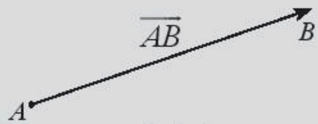
Bài 1. KHÁI NIỆM VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cho đoạn thẳng AB. Nếu ta chọn điểm A làm điểm đầu, điểm B làm điểm cuối thì ta được đoạn thẳng AB có hướng từ A đến B. Đoạn thẳng có định hướng AB được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$ và được gọi là vectơ $\overrightarrow{AB}$.

2.

- Vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là vectơ $\overrightarrow{AB}$ (Hình 1).
- Đường thẳng đi qua hai điểm A và B gọi là ***giá*** của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

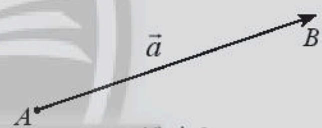


Hình 1

- Độ dài của đoạn thẳng AB gọi là ***độ dài*** của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.

  Như vậy ta có: $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

3. Một vectơ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối có thể viết là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$



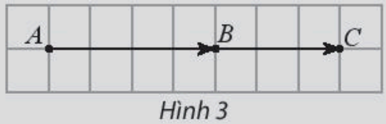
Hình 2

4. Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị.

5. Hai vectơ được gọi là ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

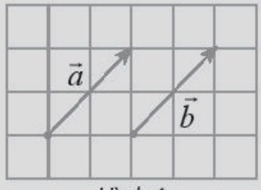
6. Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể ***cùng hướng*** hoặc ***ngược hướng***.

7. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.



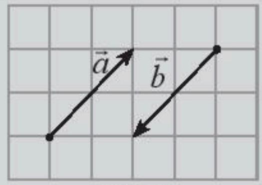
Hình 3

8. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.



Hình 4

9. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = -\vec{b}$. Khi đó, vectơ $\vec{b}$ được gọi là ***vectơ đối*** của vectơ $\vec{a}$.



Hình 5

10. Cho vectơ $\vec{a}$ và điểm O, ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

11. Với một điểm A bất kì, ta quy ước có một vectơ đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là A. Vectơ này được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là vectơ-không. Ta kí hiệu vectơ-không là $\vec{0}$. Như vậy $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots$ với mọi điểm $A, B, C, \ldots$.

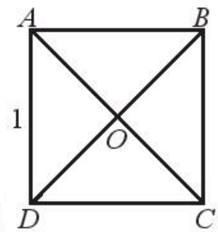
12. Vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng hướng với mọi vectơ.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và có cạnh bằng 1 (Hình 6).

a) Tìm điểm đầu, điểm cuối, giá và độ dài của các vectơ: $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{BD}$.

b) Tìm các vectơ đơn vị trong hình.



Hình 6

Giải

a) Vectơ $\overrightarrow{CA}$ có điểm đầu là C, điểm cuối là A và có giá là đường thẳng AC.

Vectơ $\overrightarrow{OA}$ có điểm đầu là O, điểm cuối là A và có giá là đường thẳng AO.

Vectơ $\overrightarrow{BD}$ có điểm đầu là B, điểm cuối là D và có giá là đường thẳng BD.

Ta có: $CA = BD = \sqrt{2}$; $OA = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{2}$; $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

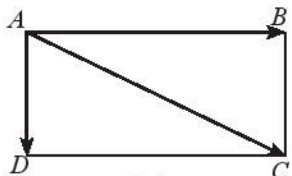
b) Các vectơ đơn vị là: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$.

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ (Hình 7).

a) Tìm vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$;

b) Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$;

c) Tìm các vectơ có độ dài bằng độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$.



Hình 7

Giải

a) Vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$ là $\overrightarrow{BC}$.

b) Vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$.

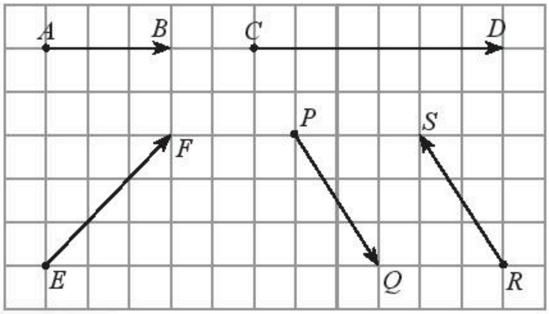
c) Vectơ có độ dài bằng độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$.

Bài 3. Trong Hình 8, tìm các vectơ:

a) cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$;

b) cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$;

c) vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{PQ}$.



Hình 8

Giải

a) Vectơ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{CD}$.

b) Vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{CD}$.

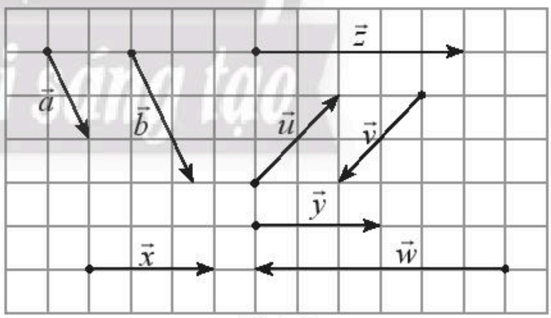
c) Vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{PQ}$ là $\overrightarrow{RS}$.

Bài 4. Tìm trong Hình 9, các vectơ:

a) cùng phương với vectơ $\vec{x}$;

b) cùng hướng với vectơ $\vec{a}$;

c) ngược hướng với vectơ $\vec{u}$.



Hình 9

Giải

a) Vectơ cùng phương với vectơ $\vec{x}$ là $\vec{y}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$.

b) Vectơ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ là $\vec{b}$.

c) Vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{u}$ là $\vec{v}$.

C. BÀI TẬP

1. Bạn hãy tìm sự khác biệt giữa hai đại lượng sau:

– Chiếc xe máy có giá tiền là 30 triệu đồng.

– Chiếc thuyền chạy với vận tốc là 30 km/h theo hướng tây nam.

2. Trong các đại lượng sau, đại lượng nào cần được biểu diễn bởi vectơ?
Nhiệt độ, lực, thể tích, tuổi, độ dịch chuyển, vận tốc.

3. Cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB, CD và có hai đường chéo cắt nhau tại O.

a) Gọi tên hai vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{AO}$.

b) Gọi tên hai vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$.

4. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh bằng a có tâm O và có $\widehat{BAD} = 60°$.

a) Tìm trong hình hai vectơ bằng nhau và có độ dài bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

b) Tìm trong hình hai vectơ đối nhau và có độ dài bằng $a\sqrt{3}$.

5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Hãy chỉ ra một cặp vectơ:

a) cùng hướng; b) ngược hướng; c) bằng nhau.

6. Gọi O là tâm của hình bát giác đều $ABCDEFGH$.

a) Tìm hai vectơ khác $\vec{0}$ và cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$.

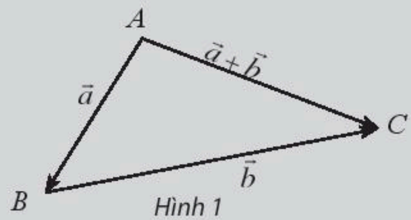
b) Tìm vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BD}$.

Bài 2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quy tắc ba điểm

Với ba điểm A, B, C, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

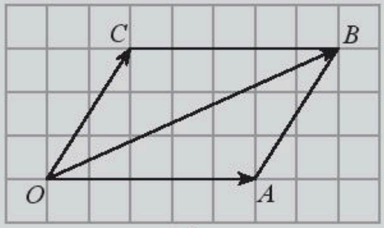


Hình 1

2. Quy tắc hình bình hành

Nếu $OABC$ là hình bình hành thì ta có

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$.



Hình 2

3. Tính chất của phép cộng các vectơ

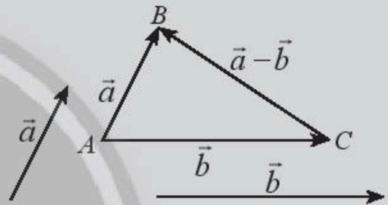
– Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

– Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$;

– Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

4. Hiệu của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. ***Hiệu của hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ và kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.



Hình 3

Chú ý: Cho ba điểm O, A, B như Hình 4, ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.

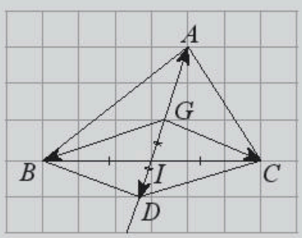
Hình 4

5. Tính chất vectơ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Hình 5

Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.



Hình 6

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$, tìm các vectơ sau:

a) $\vec{m} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{BC}$; b) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$; c) $\vec{m} - \vec{n}$.

Giải

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng vectơ, ta có:

a) $\vec{m} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

b) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AC} + \vec{0} = \overrightarrow{AC}$.

c) $\vec{m} - \vec{n} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}$.

Bài 2. Cho tam giác MNQ, thực hiện các phép trừ vectơ sau:

a) $\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{QN}$; b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QN}$.

Giải

a) $\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{NM}$; b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ}$.

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) + \overrightarrow{CB}$; b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

Giải

a) $\vec{a} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

Suy ra $\left|\vec{a}\right| = AD = 1$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\left|\vec{b}\right| = AC = \sqrt{2}$.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1 và M là trung điểm BC. Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; b) $\vec{b} = \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right)$.

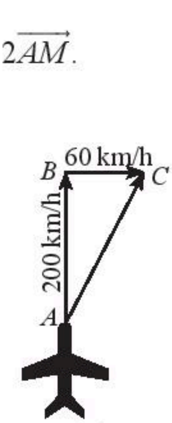
Giải

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Suy ra $\left|\vec{a}\right| = CB = 1$.

b) $\vec{b} = \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) = \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}\right) = 2\overrightarrow{AM}$.

Suy ra $\left|\vec{b}\right| = 2AM = \sqrt{3}$.

Bài 5. Một máy bay có vectơ vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vectơ theo hướng đông như Hình 7. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



Hình 7

Giải

Gọi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ lần lượt là vectơ vận tốc của máy bay và vận tốc của gió.

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{200^2+60^2}\approx 209$ (km/h).

Vậy độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên là khoảng 209 km/h.

C. BÀI TẬP

1. Cho hình thoi $ABCD$ và M là trung điểm cạnh AB, N là trung điểm cạnh CD. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MN}.$$

2. Chứng minh rằng với tứ giác $ABCD$ bất kì, ta luôn có:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$. b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

3. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.

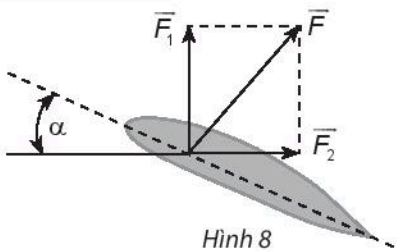
4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$;

c) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$; d) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

5. Cho ba lực $\vec{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\vec{F_2}=\overrightarrow{MB}$ và $\vec{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết độ lớn của $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ đều là 100 N và $\widehat{AMB}=60^\circ$. Tìm độ lớn của lực $\vec{F_3}$.

6. Khi máy bay nghiêng cánh một góc α, lực $\vec{F}$ của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng $\vec{F_1}$ và lực cản $\vec{F_2}$ (Hình 8). Cho biết $\alpha=45^\circ$ và $|\vec{F}|=a$. Tính $|\vec{F_1}|$ và $|\vec{F_2}|$ theo a.



Hình 8

7. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và có cạnh bằng a. Cho 2 điểm M, N thoả mãn:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0};\ \overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}.$$

Tìm độ dài các vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{NO}$.

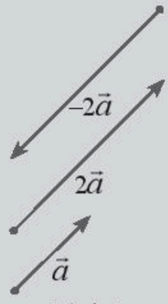
Bài 3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tích của một số với một vectơ và các tính chất

– Cho số k khác 0 và vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$.

Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.



Hình 1

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$.

– Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số thực h và k, ta có:

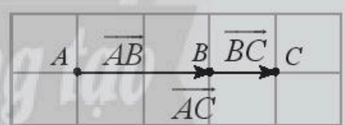
- $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h\left(k\vec{a}\right) = (hk)\vec{a}$;
- $1.\vec{a} = \vec{a}$;
- $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$.

2. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

3. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.



Hình 2

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Thực hiện các phép toán vectơ sau:

a) $2\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$; b) $(a+b)\vec{m}$; c) $5\left(-2\vec{e}\right)$; d) $\vec{c}-9\vec{c}$; e) $7\vec{c}-2\vec{c}$.

Giải

a) $2\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = 2\vec{u} - 2\vec{v}$;

b) $(a+b)\vec{m} = a\vec{m} + b\vec{m}$;

c) $5\left(-2\vec{e}\right) = (-5.2)\vec{e} = -10\vec{e}$;

d) $\vec{c} - 9\vec{c} = (1-9)\vec{c} = (-8)\vec{c} = -8\vec{c}$;

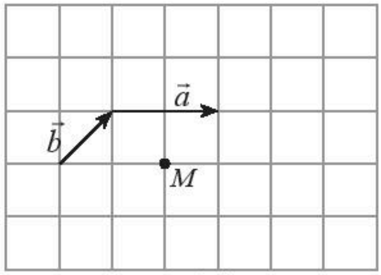
e) $7\vec{c} - 2\vec{c} = (7-2)\vec{c} = 5\vec{c}$.

Bài 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và một điểm M như Hình 3.

a) Hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{MN} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{MP} = -2\vec{b}$.

b) Cho biết mỗi ô vuông có cạnh bằng 1.

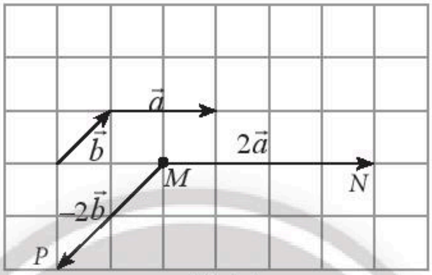
Tính: $|5\vec{a}|$, $|-5\vec{b}|$.



Hình 3

Giải

a)



Hình 4

b) $|5\vec{a}| = 5|\vec{a}| = 5\ .\ 2 = 10$; $|-5\vec{b}| = |-5|\ .\ |\vec{b}| = 5\ .\ |\vec{b}| = 5\sqrt{2}$.

Bài 3. Máy bay A bay với tốc độ a km/h, máy bay B bay ngược hướng và có tốc độ gấp năm lần máy bay A. Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B theo vectơ vận tốc $\vec{a}$ của máy bay A.

Giải

Vectơ vận tốc của máy bay B là: $\vec{b} = -5\vec{a}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC và hai điểm M, N thoả mãn: $\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Tìm các bộ ba điểm thẳng hàng.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ suy ra B, C, M thẳng hàng;

$\overrightarrow{CN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ suy ra C, N, A thẳng hàng.

C. BÀI TẬP

1. Cho hình bình hành $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

2. Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của đoạn AM. Chứng minh rằng:

a) $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$;

b) $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tuỳ ý.

3. Lấy một điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng:

a) I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

b) G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

4. Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm K sao cho $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

5. Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

6. Máy bay A bay với vận tốc $\vec{a}$, máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ chỉ bằng một nửa máy A. Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B theo vectơ vận tốc $\vec{a}$ của máy bay A.

Bài 4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

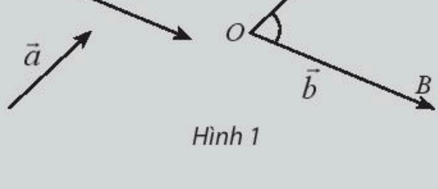
1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là ***góc giữa hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Hình 1

Chú ý:

– Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

– Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.

– Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.

– Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tuỳ ý (từ 0° đến 180°).

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}\,.\,\vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|\,.\,\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Chú ý:

– Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$.

– Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$.

– Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là *bình phương vô hướng* của vectơ $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|\,.\,|\vec{a}|\,.\,\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

3. Tính chất của tích vô hướng

– Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k, ta có:

- $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a}$; • $\vec{a}\,.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{c}$; • $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}\,.\,\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$.

– Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ, ta suy ra:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{b}^2$; • $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

4. Áp dụng của tích vô hướng

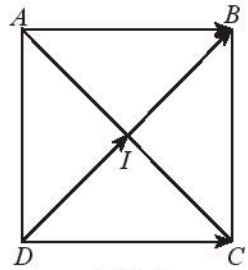
Trong Vật lí, tích vô hướng giúp tính công A sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển là vectơ $\vec{d}$. Ta có công thức: $A = \vec{F}\,.\,\vec{d}$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I. Tìm các góc:

a) $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$;

b) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$.



Hình 2

Giải

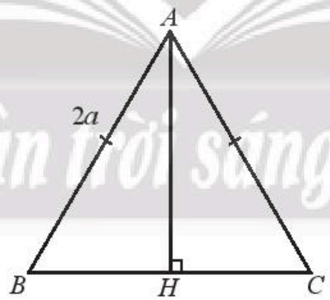
a) Do hai vectơ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên ta có $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}\right) = 0^\circ$.

Do hai vectơ $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng nên ta có $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right) = 180^\circ$.

b) Do hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ vuông góc nên ta có $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^\circ$.

Bài 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và có đường cao AH. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AH} \,.\, \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{HB} \,.\, \overrightarrow{HC}$.

Giải



Hình 3

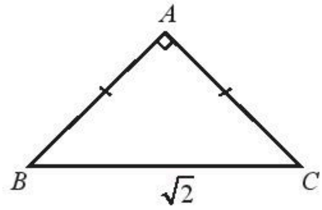
$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \left|\overrightarrow{AC}\right| . \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 2a \,.\, 2a \,.\, \cos 60^\circ = 4a^2 \,.\, \frac{1}{2} = 2a^2;$$

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \left|\overrightarrow{BC}\right| . \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 2a \,.\, 2a \,.\, \cos 120^\circ = 4a^2 \,.\left(-\frac{1}{2}\right) = -2a^2;$$

$$\overrightarrow{AH} \,.\, \overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AH}\right| . \left|\overrightarrow{BC}\right| . \cos\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}\right) = \left|\overrightarrow{AH}\right| . \left|\overrightarrow{BC}\right| . \cos 90^\circ = 0.$$

$$\overrightarrow{HB} \,.\, \overrightarrow{HC} = \left|\overrightarrow{HB}\right| . \left|\overrightarrow{HC}\right| . \cos\left(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}\right) = a \,.\, a \,.\, \cos 180^\circ = a^2(-1) = -a^2.$$

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có cạnh BC bằng $\sqrt{2}$. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}$.



Hình 4

Giải

Tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = \sqrt{2}$ suy ra $AB = AC = 1$.

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 1\,.\,1\,.\cos 90^\circ = 0.$$

$$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right) = 1\,.\sqrt{2}\,.\cos 45^\circ = \sqrt{2}\,.\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = 1\,.\sqrt{2}\,.\cos 135^\circ = \sqrt{2}\,.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$$

Bài 4. Cho hai vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ vuông góc có cùng độ dài bằng 1 và cho biết $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ và tính số đo góc $(\vec{a}, \vec{b})$.

Giải

Ta có $\vec{a}\,.\,\vec{b} = (4\vec{i} - \vec{j})\,.\,(\vec{i} + 4\vec{j}) = 4\vec{i}^2 + 16\vec{i}\,.\,\vec{j} - \vec{j}\,.\,\vec{i} - 4\vec{j}^2 = 4 - 4 = 0.$

Vậy $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$. Suy ra $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^\circ$.

Bài 5. Tính công sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn 20 N kéo một vật dịch chuyển theo một vectơ $\vec{d}$ có độ dài 50 m và cho biết $\left(\vec{F},\vec{d}\right) = 60^\circ$.

Giải

Ta có $A = \vec{F}\,.\,\vec{d} = \left|\vec{F}\right|.\left|\vec{d}\right|.\cos(\vec{F},\vec{d}) = 20\,.\,50\,.\cos 60^\circ = 20\,.\,50\,.\,\frac{1}{2} = 500$ (J).

C. BÀI TẬP

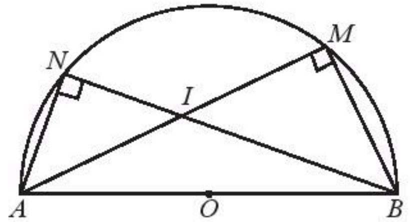
1. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$.

Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{CB}$.

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và cho $AD = 2a$, $AB = a$. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AO}$;   b) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}$.

3. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi M và N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho AM và BN cắt nhau tại I như Hình 5.



Hình 5

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$.

b) Tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$ theo R.

4. Tính công sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn 60 N kéo một vật dịch chuyển một vectơ $\vec{d}$ có độ dài 200 m. Cho biết $\left(\vec{F}, \vec{d}\right) = 60°$.

5. Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 6 và 8 và có tích vô hướng là 24. Tính góc giữa hai vectơ đó.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A. TRẮC NGHIỆM

1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3$, $BC = 4$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là:

A. 5; B. 6; C. 7; D. 9.

2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Số các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là:

A. 2; B. 3; C. 4; D. 6.

3. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$; B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$;

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$; D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

4. Cho hai điểm phân biệt A và B. Điều kiện để điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB là:

A. $IA = IB$; B. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$; C. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

5. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$; B. $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$;

C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$; D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

6. Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$;

B. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$;

C. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}$;

D. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.

7. Cho tam giác ABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}+2\vec{b}$;

B. $\vec{a}-2\vec{b}$ và $2\vec{a}-\vec{b}$;

C. $5\vec{a}+\vec{b}$ và $-10\vec{a}-2\vec{b}$;

D. $\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}-\vec{b}$.

8. Tam giác ABC vuông ở A và có $\widehat{B}=50^\circ$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=130^\circ$;

B. $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})=40^\circ$;

C. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB})=50^\circ$;

D. $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=120^\circ$.

9. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}\,.\,\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$;

B. $\vec{a}\,.\,\vec{b}=0$;

C. $\vec{a}\,.\,\vec{b}=-1$;

D. $\vec{a}\,.\,\vec{b}=-|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|$.

10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}<\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$;

B. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}<\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$;

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}<\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$;

D. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}<\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}$.

B. TỰ LUẬN

1. Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng. Trong trường hợp nào thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$:

a) cùng hướng?

b) ngược hướng?

2. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng phương. Chứng tỏ rằng có ít nhất hai vectơ cùng hướng trong ba vectơ đó.

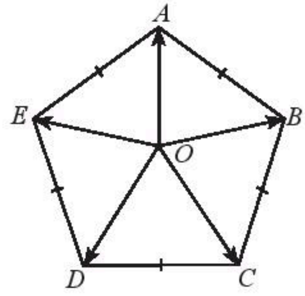
3. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H là trực tâm tam giác ABC và B' là điểm đối xứng với B qua tâm O. Hãy so sánh các vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{HC}$.

4. Chứng minh rằng với hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có:

$$\left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right| \leq \left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|.$$

5. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.



Hình 1

6. Cho tam giác ABC, gọi A' là điểm đối xứng với B qua A, gọi B' là điểm đối xứng với C qua B, gọi C' là điểm đối xứng với A qua C. Chứng minh rằng với một điểm O tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$.

7. Tam giác ABC là tam giác gì nếu nó thoả mãn một trong các điều kiện sau đây?

a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$;

b) Vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$.

8. Tứ giác $ABCD$ là tứ giác gì nếu nó thoả mãn một trong các điều kiện sau đây?

a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{DB} = k\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.

9. Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM = MN = NB$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNC có cùng trọng tâm.

10. Cho ba điểm O, M, N và số thực k. Lấy các điểm M' và N' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

11. Cho tam giác ABC, O là điểm sao cho ba vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ có độ dài bằng nhau và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Tính các góc $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$.

12. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EA. Chứng minh hai tam giác EMP và NQR có cùng trọng tâm.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. KHÁI NIỆM VECTƠ

1. Một đại lượng chỉ số lượng; đại lượng còn lại chỉ rõ giá trị và hướng.

2. Các đại lượng cần được biểu diễn bởi vectơ: lực, độ dịch chuyển, vận tốc.

3. a) Hai vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{AO}$ là $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{OC}$.

b) Hai vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CD}$.

4. a) Hai vectơ $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OC}$ bằng nhau và có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$ đối nhau và có độ dài bằng $a\sqrt{3}$.

5. a) $\overrightarrow{AO}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{DO}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BD}$.

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

6. a) Hai vectơ $\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EA}$ khác $\vec{0}$ và cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$.

b) Vectơ $\overrightarrow{HF}$ bằng vectơ $\overrightarrow{BD}$.

Bài 2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

1. Gọi O là tâm của hình thoi. Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}$.

2. a) Theo quy tắc ba điểm của phép cộng vectơ, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$.

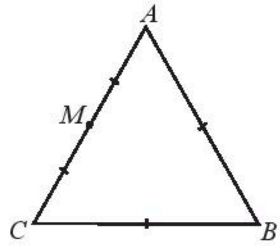
Suy ra $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

3. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = a$.

Gọi M là trung điểm cạnh AC.

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = -2\overrightarrow{BM}$.

Khi đó: $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right| = 2\left|\overrightarrow{BM}\right| = 2BM = a\sqrt{3}$.



Hình 1

4. a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm AC, BD.

Do đó $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

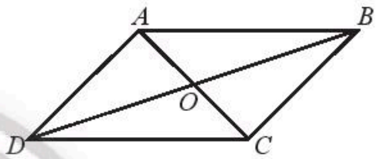
b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

c) Ta có $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$.

Mà $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (do $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.



Hình 2

d) Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

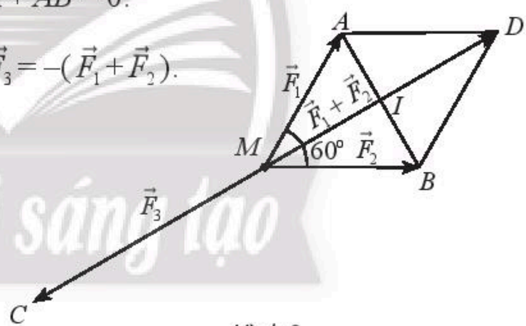
5. M đứng yên nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ suy ra $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$.

Ta cần tính $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Cường độ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đều là 100 N

$\Rightarrow \left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = 100$.

Dựng hình bình hành $MADB$.



Hình 3

Gọi I là giao điểm của AB và MD, khi đó I là trung điểm của AB và MD.

Mặt khác $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên tam giác ABM đều.

Khi đó $MI \perp AB \Rightarrow \Delta AIM$ vuông tại I.

$\Rightarrow MI = AM \sin\widehat{MAI} = 100 \,.\, \sin 60^\circ = 50\sqrt{3} \Rightarrow MD = 2MI = 2 \,.\, 50\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$.

Mà $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = -\overrightarrow{MD}$.

Do đó $\vec{F}_3$ có hướng ngược với hướng của $\overrightarrow{MD}$ và có độ lớn $\left|\vec{F}_3\right| = \left|-\overrightarrow{MD}\right| = 100\sqrt{3}$.

6. Ta có $\cos 45^\circ = \dfrac{\left|\vec{F}_2\right|}{a} \Rightarrow \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}\right| \,.\, \cos 45^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\sin 45^\circ = \frac{\left|\vec{F_1}\right|}{a} \Rightarrow \left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F}\right| . \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

7. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ suy ra M là trung điểm của AD. Khi đó $MA = \frac{a}{2}$.

$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ suy ra N là trọng tâm của tam giác BDC. Ta có $NO = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Bài 3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

1. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO} = 2 . \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AG}$.

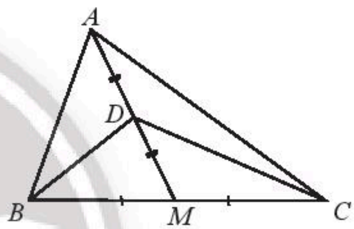
2. a) Vì M là trung điểm của BC nên:

$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DM}$.

Mặt khác, do D là trung điểm của đoạn AM nên $\overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{DA}$. Suy ra $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

Khi đó: $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DM}$

$= 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM}) = \vec{0}$.



Hình 1

b) Ta có: $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

$= \left(2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OD}\right) + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}\right) + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}\right)$.

$= 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 4\overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Vậy $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tuỳ ý.

3. a) Với điểm M bất kì, ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$.

Vì I là trung điểm của AB nên: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Do đó: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MI}$.

b) Với điểm M bất kì, ta có:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

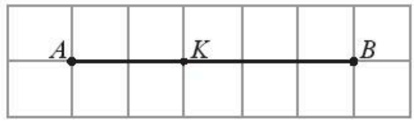
Do đó: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

4. Vì $3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ nên $3\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$.

Suy ra $\overrightarrow{KA}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{KB}=-\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right)$.

Do đó $\dfrac{5}{3}\overrightarrow{KA}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Nên $\overrightarrow{AK}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.



Hình 2

Vậy K nằm giữa A và B sao cho $AK=\dfrac{2}{5}AB$.

5. MN là đường trung bình của tam giác ABC nên ta có: $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

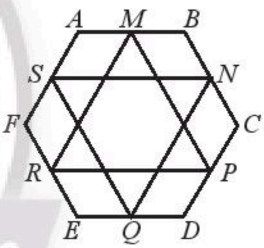
Tương tự ta có: $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{RS}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EA}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CE}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EA}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\vec{0}$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác MPR, ta có:

$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}=\vec{0}$.



Hình 3

Mặt khác:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GN}$; $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GQ}$; $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RG}+\overrightarrow{GS}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{RG}\right)+\left(\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}\right)$

$=\vec{0}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}$

(vì $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{RG}=-\overrightarrow{GM}-\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GR}=-\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}\right)=\vec{0}$).

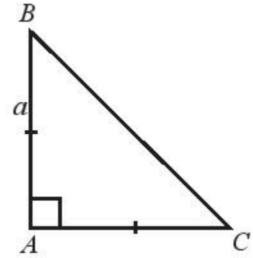
Do đó $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}$.

Mà $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\vec{0}$ nên $\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$

Vậy G là trọng tâm của tam giác NQS.

6. Vectơ vận tốc của máy bay B là: $\vec{b}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$.

Bài 4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ



Hình 1

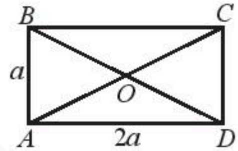
1. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0;$

$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{CB} = \left(-\overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CB} = -\left(\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}\right).$

Ta có: $CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{CB} = -\left(\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}\right) = -\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|.\cos\widehat{ACB}$

$$= -CA\,.\,CB\,.\cos 45^\circ = -a\,.\,a\sqrt{2}\,.\frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2.$$



Hình 2

2. a) $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right) = \cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

Khi đó $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AO} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AO}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)$

$= a\,.\,\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\,.\,\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{a^2}{2};$

b) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD} = 0.$

3. a) AB là đường kính nên $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$AM \perp MB$ và $AN \perp NB$.

Ta có: $\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}\,.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) = \overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{BM}.$

Mà $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BM}$ (do $AM \perp BM$) nên $\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{BM} = 0.$

Vậy $\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AB} + 0 = \overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AB}.$

Tương tự, ta có: $\overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{BA}.$

b) $\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\,.\left(-\overrightarrow{AB}\right)$

$= \overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\,.\left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}\right) = \overrightarrow{AB}\,.\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2.$

4. $A = \left|\vec{F}\right|.\left|\vec{d}\right|.\cos 60^\circ = 60\,.\,200\,.\cos 60^\circ = 6\,000$ (J).

5. Gọi α là góc giữa hai vectơ. Ta có $\cos\alpha = \dfrac{24}{6\,.\,8} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A. TRẮC NGHIỆM

1. A	**2.** A	**3.** C	**4.** C	**5.** C	**6.** A	**7.** C	**8.** D	**9.** A	**10.** D

B. TỰ LUẬN

1. a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng khi A không nằm giữa B và C.

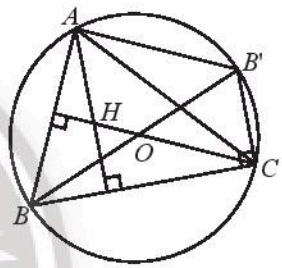
b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng khi A nằm giữa B và C.

2. Trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ chọn hai vectơ tuỳ ý:

– Nếu chúng cùng hướng thì đó là hai vectơ cần tìm;

– Nếu chúng ngược hướng thì vectơ còn lại sẽ cùng hướng với một trong hai vectơ đã chọn.

3. Ta có BB' là đường kính, suy ra $B'C$ vuông góc với BC, suy ra $B'C // AH$. Tương tự ta có $AB' // CH$. Vậy $AB'CH$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ và $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

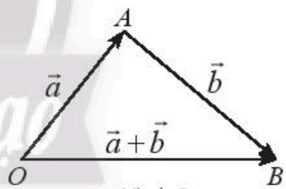


Hình 1

4. Vẽ ba điểm O, A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Ta có $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$. Trong tam giác OAB ta có bất đẳng thức

$|OA - AB| \le OB \le OA + AB$

$\Rightarrow |\vec{a}| - |\vec{b}| \le |\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.



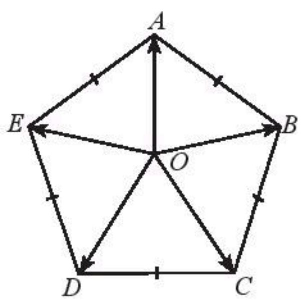
Hình 2

5. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$.

Ta có: $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Do OA nằm trên đường phân giác của $\widehat{BOE}$ và $\widehat{DOC}$ của hai tam giác cân BOE và DOC nên ta có các vectơ $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}), (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ nằm trên đường thẳng OA, suy ra $\vec{u}$ nằm trên đường thẳng OA. Chứng minh tương tự ta cũng có vectơ $\vec{u}$ nằm trên đường thẳng OB.

Vậy $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.



Hình 3

6. Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'C}$

$$=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{CA}$$

$$=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$$

$$=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}.$$

7. a) Gọi M là trung điểm BC ta có:

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|\Rightarrow 2\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|\Rightarrow 2AM=CB.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

b) Vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right)=0.$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2=0\Rightarrow AB^2-AC^2=0\Rightarrow AB=AC.$$

Vậy ABC là tam giác cân tại A.

8. a) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

b) $\overrightarrow{DB}=k\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\Rightarrow\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=k\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DC}\Rightarrow AB\,//\,DC$

$\Rightarrow ABCD$ là hình thang.

9. Gọi I là trung điểm của AB thì I cũng là trung điểm của MN. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có $\vec{0}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GC}$.

Vậy G cũng là trọng tâm của tam giác MNC.

10. Ta có: $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{ON'}-\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{ON}-k\overrightarrow{OM}=k(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})=k\overrightarrow{MN}$.

11. Ta có $OA=OB=OC$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta lại có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, suy ra O cũng là trọng tâm tam giác ABC.

Vậy ABC là tam giác đều, suy ra: $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{COA}=120°$.

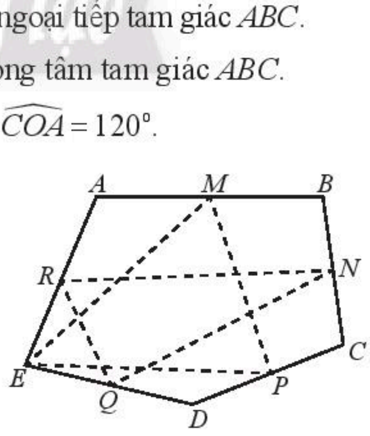
12. Gọi G là trọng tâm tam giác NQR, ta có:

$$\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR}=\vec{0}$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GA})=\vec{0}$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GE})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}.$$



Hình 4

Vậy G cũng là trọng tâm tam giác EMP.

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương VI. THỐNG KÊ

Bài 1. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Số gần đúng

Trong thực tế cuộc sống cũng như trong khoa học kĩ thuật, có nhiều đại lượng mà ta không thể xác định được giá trị chính xác. Khi đó, ta dùng ***số gần đúng*** để biểu thị các đại lượng này.

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

a) Sai số tuyệt đối

– Nếu a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là ***sai số tuyệt đối*** của số gần đúng a.

– Nếu biết $\Delta_a \le d$ thì d được gọi là ***độ chính xác*** của số gần đúng a. Ta cũng nói a là số gần đúng của $\overline{a}$ với độ chính xác d và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

b) Sai số tương đối

– ***Sai số tương đối*** của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a, là tỉ số giữa sai số tuyệt đối Δ_a và $|a|$, tức là $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.

– Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

3. Số quy tròn

a) Quy tắc làm tròn số

Quy tắc làm tròn số đến một hàng nào đó (gọi là hàng quy tròn) như sau:

– Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.

– Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng quy tròn.

b) Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước

Để quy tròn số gần đúng a với độ chính xác d, ta quy tròn a ở hàng gấp 10 lần hàng lớn nhất của độ chính xác.

Các bước quy tròn của số gần đúng a với độ chính xác d cho trước:

– Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.

– Bước 2: Quy tròn số a ở hàng gấp 10 lần hàng tìm được ở Bước 1.

c) Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước

Để tìm một số gần đúng a của số đúng $\overline{a}$ với độ chính xác d ta thực hiện các bước sau:

– Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.

– Bước 2: Quy tròn $\overline{a}$ đến hàng tìm được ở trên.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Gọi $\overline{x}$ là độ dài đường chéo của hình chữ nhật có chiều dài 3 và chiều rộng 2. Biết $3,60 < \sqrt{13} < 3,61$.

a) Trong hai số $\sqrt{13}$ và 3,60 thì số nào là số đúng, số nào là số gần đúng của $\overline{x}$?

b) Hãy ước lượng sai số tuyệt đối và sai số tương đối khi dùng số gần đúng ở trên.

Giải

a) Theo định lí Pythagore thì $\overline{x} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ nên $\sqrt{13}$ là giá trị đúng của $\overline{x}$ và $x = 3,60$ là giá trị gần đúng của $\overline{x}$.

b) Vì $0 < \overline{x} - 3,60 < 3,61 - 3,60 = 0,01$ nên $|\overline{x} - 3,60| < 0,01$.

Do đó, sai số tuyệt đối là $\Delta_x < 0,01$. Sai số tương đối là $\delta_x < \dfrac{0,01}{3,60} \approx 0,28\%$.

Bài 2. Cho số gần đúng $a = 9\,981$ với độ chính xác $d = 100$.

Hãy viết số quy tròn của số a và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

Giải

Hàng lớn nhất của độ chính xác $d = 100$ là hàng trăm nên ta quy tròn a đến hàng nghìn.

Vậy số quy tròn của a là 10 000.

Vì số đúng $\overline{a}$ thoả mãn $9\,981 - 100 = 9\,881 \le \overline{a} \le 9\,981 + 100 = 10\,081$ nên $9\,881 - 10\,000 = -119 \le \overline{a} - 10\,000 \le 10\,081 - 10\,000 = 81$. Do đó sai số tuyệt đối của 10 000 là $\Delta_{10\,000} = |\overline{a} - 10\,000| \le 119$.

Sai số tương đối của số quy tròn là $\delta_{10\,000} \le \dfrac{119}{10\,000} = 0,0119 \approx 1,2\%$.

Bài 3. a) Cho $\overline{a} = 1{,}54308$. Hãy xác định số gần đúng của $\overline{a}$ với độ chính xác $d = 0{,}0003$.

b) Cho $\overline{b} = -34\,524$. Hãy xác định số gần đúng của $\overline{b}$ với độ chính xác $d = 120$.

Giải

a) Hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của $d = 0{,}0003$ là hàng phần chục nghìn. Quy tròn $\overline{a}$ đến hàng phần chục nghìn ta được số gần đúng của $\overline{a}$ là $a = 1{,}5431$.

b) Hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của $d = 120$ là hàng trăm. Quy tròn $\overline{b}$ đến hàng trăm ta được số gần đúng của $\overline{b}$ là $b = -34\,500$.

C. BÀI TẬP

1. Trong các số sau, số nào là số gần đúng?

a) Dân số Việt Nam năm 2020 là 97,34 triệu người.

b) Số gia đình văn hoá ở khu phố mới là 45.

c) Đường bờ biển Việt Nam dài khoảng 3 260 km.

d) Vào năm 2022, Việt Nam có 63 tỉnh, thành phố trực thuộc trung ương.

2. Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác d.

a) $a = 0{,}012345679$ với $d = 0{,}001$; b) $b = -1737{,}183$ với $d = 0{,}01$;

c) $c = 456\,572$ với $d = 1\,000$.

3. Cho biết $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992104989...$

a) Hãy quy tròn $\sqrt[3]{2}$ đến hàng phần nghìn và ước lượng sai số tương đối.

b) Hãy tìm số gần đúng của $\sqrt[3]{2}$ với độ chính xác 0,00007.

4. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng trong những trường hợp sau:

a) 37213824 ± 100; b) $-5{,}63057 \pm 0{,}0005$.

5. Gọi $\overline{h}$ là độ dài đường cao của tam giác đều có cạnh bằng 6 cm. Tìm số quy tròn của h với độ chính xác $d = 0{,}01$.

6. Cho số gần đúng $a = 0{,}1031$ với độ chính xác $d = 0{,}002$.

Hãy viết số quy tròn của số a và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

7. Sử dụng cùng lúc 3 thiết bị khác nhau để đo thành tích chạy 100 m của một vận động viên, người ta được kết quả như sau:

Thiết bị	A	B	C
Kết quả	$9{,}592 \pm 0{,}004$	$9{,}593 \pm 0{,}005$	$9{,}589 \pm 0{,}006$

Tính sai số tương đối của từng thiết bị. Thiết bị nào có sai số tương đối nhỏ nhất?

8. Nam đo được đường kính của một hình tròn là $24 \pm 0,2$ cm. Nam tính được chu vi hình tròn là $p = 75,36$ cm. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối của p, biết $3,141 < \pi < 3,142$.

9. Nhà sản xuất công bố chiều dài và chiều rộng của một tấm thép hình chữ nhật lần lượt là $100 \pm 0,5$ cm và $70 \pm 0,5$ cm. Hãy tính diện tích của tấm thép.

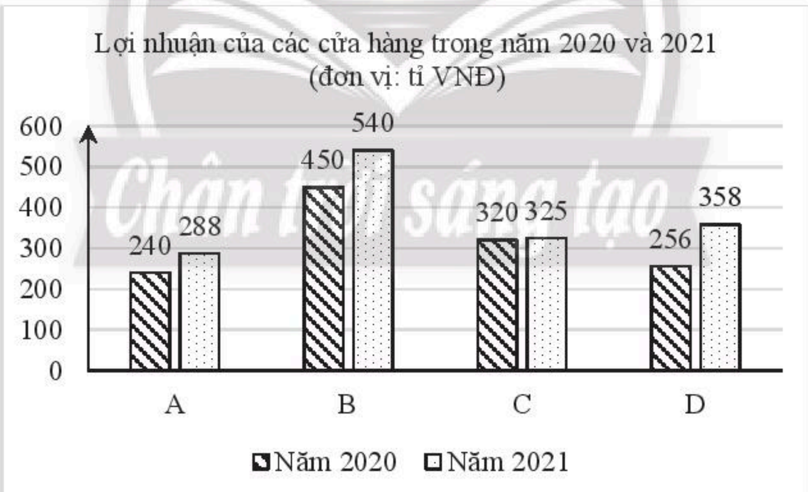
Bài 2. MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG VÀ BIỂU ĐỒ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Dựa vào các thông tin đã biết và sử dụng mối liên hệ Toán học giữa các số liệu, ta có thể phát hiện ra được số liệu không chính xác trong một số trường hợp.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Biểu đồ dưới đây biểu diễn lợi nhuận mà 4 chi nhánh A, B, C, D của một doanh nghiệp thu được trong năm 2020 và 2021.



Hãy kiểm tra xem các phát biểu sau là đúng hay sai:

a) Lợi nhuận thu được của các chi nhánh trong năm 2021 đều cao hơn năm 2020.

b) So với năm 2020, lợi nhuận của các chi nhánh thu được trong năm 2021 đều tăng trên 10%.

c) Chi nhánh B có tỉ lệ lợi nhuận tăng cao nhất.

Giải

– Phát biểu a) là đúng.

– Chi nhánh C có tỉ lệ lợi nhuận tăng $\frac{325-320}{320} \approx 1,56\% < 10\%$ nên phát biểu b) là sai.

– Chi nhánh B có tỉ lệ lợi nhuận tăng $\frac{540-450}{450} = 20\%$.

Chi nhánh D có tỉ lệ lợi nhuận tăng $\frac{358-256}{256} = 39,8\%$.

Do đó phát biểu c) là sai.

Bài 2. Biểu đồ dưới đây biểu thị diện tích lúa cả năm của hai tỉnh An Giang và Kiên Giang từ năm 2010 đến năm 2019 (đơn vị: nghìn hecta).

(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

Hãy kiểm tra xem các phát biểu sau là đúng hay sai, tại sao?

a) Ở năm 2010, diện tích lúa của tỉnh Kiên Giang cao hơn hai lần diện tích lúa của tỉnh An Giang.

b) Từ năm 2016, diện tích lúa của tỉnh An Giang đạt trên 650 nghìn hecta.

c) Diện tích lúa của cả hai tỉnh An Giang và Hậu Giang đều giảm vào năm 2014 sau đó tăng trở lại vào năm 2015.

d) Những năm diện tích lúa của tỉnh An Giang tăng thì diện tích lúa của tỉnh Kiên Giang cũng tăng.

Giải

– Phát biểu a) là sai.

– Phát biểu b) là sai vì sau từ năm 2017 đến 2019, diện tích lúa của An Giang nhỏ hơn 650 nghìn hecta.

– Phát biểu c) là đúng.

– Phát biểu d) là sai vì trong năm 2016, diện tích lúa của An Giang tăng trong khi diện tích lúa của Kiên Giang lại giảm.

C. BÀI TẬP

1. Tâm ghi lại số liệu từ trang web của Tổng cục Thống kê bảng nhiệt độ không khí trung bình các tháng trong năm 2020 tại một trạm quan trắc đặt ở thành phố Vinh.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ	20,9	20,7	23,7	23	29,5	32,2	4,5	29,6	28,9	23,8	23,1	18,4

Bạn Tâm đã ghi nhầm nhiệt độ của một tháng trong bảng trên. Theo em bạn Tâm đã ghi nhầm số liệu của tháng mấy? Tại sao?

2. Biểu đồ dưới đây biểu diễn số áo phông và áo sơ mi một cửa hàng bán được theo bốn mùa trong năm.

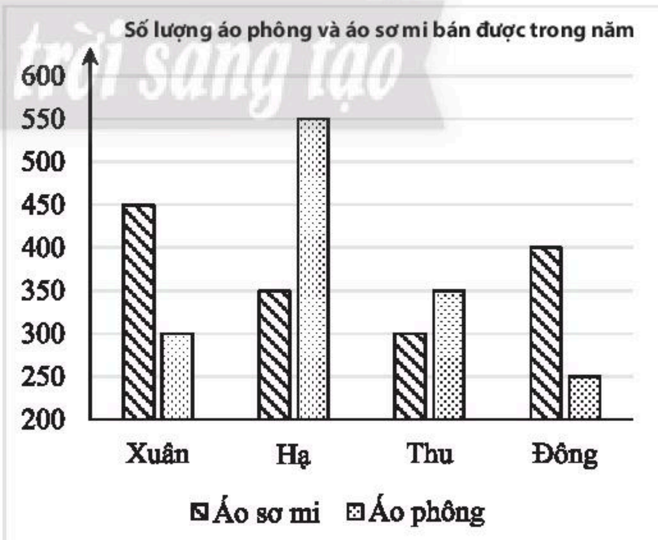
Hãy kiểm tra xem các phát biểu sau là đúng hay sai. Tại sao?

a) Vào mùa hạ, số lượng áo phông bán được gấp 3 lần số lượng áo sơ mi.

b) Vào mùa xuân, số áo sơ mi bán được nhiều gấp 1,5 lần số áo phông.

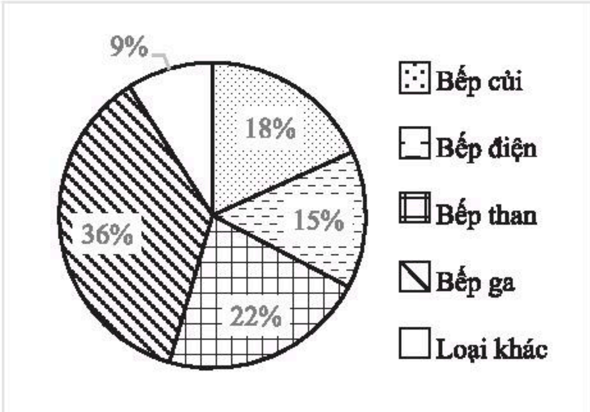
c) Trong cả năm, tổng số áo sơ mi bán được nhiều hơn tổng số áo phông.

d) Tổng số áo sơ mi và áo phông bán được vào mùa thu là thấp nhất so với các mùa khác.



3. Phương vẽ biểu đồ biểu thị tỉ lệ số lượng mỗi loại bếp mà gia đình các bạn trong lớp sử dụng thường xuyên để đun nấu theo bảng thống kê dưới đây.

Loại bếp	Số gia đình
Bếp củi	10
Bếp điện	12
Bếp than	8
Bếp ga	20
Loại khác	5



Hãy cho biết Phương vẽ biểu đồ chính xác chưa. Nếu chưa thì cần điều chỉnh lại như thế nào cho đúng?

Bài 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Số trung bình

– Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Số trung bình (hay ***số trung bình cộng***) của mẫu số liệu này, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính bởi công thức $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

– Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số

Giá trị	x_1	x_2	…	x_k
Tần số	n_1	n_2	…	n_k

Khi đó, công thức tính số trung bình trở thành $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n}$, trong đó $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Ta gọi n là ***cỡ mẫu***.

Chú ý: Kí hiệu $f_k = \dfrac{n_k}{n}$ là tần số tương đối (hay còn gọi là tần suất) của x_k trong mẫu số liệu thì số trung bình còn có thể biểu diễn là $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k$.

– ***Ý nghĩa của số trung bình:*** Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu. Nó là một số đo xu thế trung tâm của mẫu đó.

2. Trung vị và tứ phân vị

Sắp xếp lại mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

– ***Trung vị*** của mẫu, kí hiệu là M_e, là giá trị ở chính giữa dãy $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Cụ thể:

+ Nếu $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ thì trung vị mẫu là $M_e = x_{k+1}$.

+ Nếu $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ thì trung vị mẫu là $M_e = \dfrac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$.

– ***Ý nghĩa của trung vị:*** Trung vị được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu. Trung vị là giá trị nằm ở chính giữa của mẫu số liệu theo nghĩa: luôn có ít nhất 50% số liệu trong mẫu lớn hơn hoặc bằng trung vị và ít nhất 50% số liệu trong mẫu nhỏ hơn hoặc bằng trung vị. Khi trong mẫu xuất hiện thêm một giá trị rất lớn hoặc rất nhỏ thì số trung bình sẽ bị thay đổi đáng kể nhưng trung vị thì ít thay đổi.

– ***Tứ phân vị*** của một mẫu ngẫu nhiên gồm 3 giá trị, đó là ***tứ phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba*** (lần lượt kí hiệu là Q_1, Q_2, Q_3). Ba giá trị này chia tập hợp dữ liệu đã sắp xếp thành bốn phần đều nhau. Cụ thể:

+ Giá trị tứ phân vị thứ hai, Q_2, chính là trung vị của mẫu.

+ Giá trị tứ phân vị thứ nhất, Q_1, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

+ Giá trị tứ phân vị thứ ba, Q_3, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

– ***Ý nghĩa của tứ phân vị:*** Các điểm tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần chứa khoảng 25% tổng số số liệu đã thu thập được. Tứ phân vị thứ nhất Q_1 còn được gọi là tứ phân vị dưới và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía dưới. Tứ phân vị thứ ba Q_3 còn được gọi là tứ phân vị trên và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía trên.

3. Mốt

– Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là ***mốt*** của mẫu số liệu, kí hiệu là M_o.

– ***Ý nghĩa của mốt:*** Mốt đặc trưng cho giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu.

Chú ý: Một mẫu số liệu có thể có nhiều mốt. Khi tất cả các giá trị trong mẫu số liệu có tần số xuất hiện bằng nhau thì mẫu số liệu đó không có mốt.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trong một đợt khảo sát về tốc độ viết của học sinh lớp 3, người ta cho hai nhóm học sinh chép một đoạn văn trong 15 phút. Bảng dưới đây thống kê số chữ mỗi bạn viết được.

Nhóm 1	72	79	77	75	74	77	71	
Nhóm 2	70	65	68	90	73	78	72	84

a) Có bao nhiêu học sinh tham gia đợt khảo sát?

b) Sử dụng số trung bình để so sánh tốc độ viết của học sinh hai nhóm.

c) Sử dụng trung vị để so sánh tốc độ viết của học sinh hai nhóm.

Giải

a) Số học sinh tham gia khảo sát là: $7 + 8 = 15$.

b) Số chữ trung bình mỗi học sinh nhóm 1 viết được là:

$$\frac{1}{7}(72 + 79 + 77 + 75 + 74 + 77 + 71) = 75.$$

Số chữ trung bình mỗi học sinh nhóm 2 viết được là:

$$\frac{1}{8}(70 + 65 + 68 + 90 + 73 + 78 + 72 + 84) = 75.$$

Vậy nếu so sánh theo số trung bình thì tốc độ viết của học sinh hai nhóm là bằng nhau.

c) Sắp xếp số chữ học sinh nhóm 1 viết được theo thứ tự không giảm, ta được dãy:

71; 72; 74; 75; 77; 77; 79.

Trung vị của nhóm 1 là 75.

Sắp xếp số chữ học sinh nhóm 2 viết được theo thứ tự không giảm, ta được dãy:

65; 68; 70; 72; 73; 78; 84; 90.

Trung vị của nhóm 2 là (72 + 73) : 2 = 72,5.

Vậy nếu so sánh theo trung vị thì tốc độ viết của học sinh nhóm 1 cao hơn của học sinh nhóm 2.

Bài 2. Khối lượng cơ thể lúc trưởng thành của 10 con chim được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: gam).

155	165	150	155	165	170	165	150	155	160

Hãy tìm các tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu trên.

Giải

Sắp xếp khối lượng của 10 con chim theo thứ tự không giảm:

150; 150; 155; 155; 155; 160; 165; 165; 165; 170.

Vì $n = 10$ là số chẵn nên tứ phân vị thứ hai $Q_2 = (155 + 160) : 2 = 157,5$.

Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2: 150; 150; 155; 155; 155.

Vậy $Q_1 = 155$.

Tứ phân vị thứ ba là trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2: 160; 165; 165; 165; 170.

Vậy $Q_3 = 165$.

Mẫu số liệu có 2 mốt là 155 và 165.

Bài 3. Số nhân khẩu trong các hộ gia đình ở một xóm được thống kê ở bảng sau:

Số nhân khẩu	1	2	3	4	5	6
Số hộ gia đình	1	4	7	11	5	2

Có bao nhiêu hộ gia đình trong xóm? Hãy tìm số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu trên.

Giải

Số hộ gia đình trong xóm là: 1 + 4 + 7 + 11 + 5 + 2 = 30.

Số nhân khẩu trung bình của mỗi hộ gia đình là

$(1 . 1 + 4 . 2 + 7 . 3 + 11 . 4 + 5 . 5 + 2 . 6) : 30 = 3,7$.

Sắp xếp số nhân khẩu của 30 gia đình theo thứ tự không giảm, ta được

1	2	2	2	2	3	3	**3**	3	3	3	3	4	4	**4**
4	4	4	4	4	4	4	**4**	5	5	5	5	5	6	6

Vì $n = 30$ là số chẵn nên tứ phân vị thứ hai là $Q_2 = (4 + 4) : 2 = 4$.

Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của hàng trên của bảng, tức là $Q_1 = 3$.

Tứ phân vị thứ ba là trung vị của hàng dưới của bảng trên, tức là $Q_3 = 4$.

Mốt của mẫu số liệu là 4.

Bài 4. Số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đông Nam Bộ và Đồng bằng sông Cửu Long vào năm 2019 được cho ở bảng thống kê sau:

Đông Nam Bộ	10	8	8	9	6	24							
Đồng bằng sông Cửu Long	14	10	8	8	7	10	9	13	9	7	10	6	8

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

a) Mỗi khu vực nêu trên có bao nhiêu tỉnh/thành phố?

b) Sử dụng số trung bình để so sánh số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố ở hai khu vực.

c) Sử dụng trung vị để so sánh số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố ở hai khu vực.

d) Hãy giải thích tại sao lại có sự khác biệt khi so sánh bằng số trung bình và trung vị.

e) Hãy tìm mốt của hai khu vực.

Giải

a) Khu vực Đông Nam Bộ có 6 tỉnh/thành phố. Khu vực Đồng bằng sông Cửu Long có 13 tỉnh/thành phố.

b) Trung bình số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đông Nam Bộ là $(10 + 8 + 8 + 9 + 6 + 24) : 6 \approx 10,83$.

Trung bình số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đồng bằng sông Cửu Long là

$$(14 + 10 + 8 + 8 + 7 + 10 + 9 + 13 + 9 + 7 + 10 + 6 + 8) : 13 \approx 9,15.$$

Vậy nếu so sánh theo số trung bình thì số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đông Nam Bộ nhiều hơn của các tỉnh Đồng bằng sông Cửu Long.

c) Trung vị số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đông Nam Bộ là 8,5 và của các tỉnh Đồng bằng sông Cửu Long là 9.

Vậy nếu so sánh theo trung vị thì số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đông Nam Bộ ít hơn của các tỉnh Đồng bằng sông Cửu Long.

d) Sự khác biệt khi so sánh bằng số trung bình và bằng trung vị là do có 1 tỉnh/thành phố khu vực Đông Nam Bộ có quá nhiều đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã so với các tỉnh/thành phố khác.

e) Mốt của số liệu khu vực Đông Nam Bộ là 8. Mốt của số liệu khu vực Đồng bằng sông Cửu Long là 8 và 10.

C. BÀI TẬP

1. Hãy tìm số trung bình, tứ phân vị và mốt của các mẫu số liệu sau:

a) 15; 15; 12; 14; 17; 16; 16; 15; 15.

b) 5; 7; 4; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 7; 2.

c) 7; 6; 8; 7; 7; 4; 5; 10; 9; 9; 8; 5.

d) 87; 87; 88; 88; 70, 83; 85; 86; 97; 89; 92; 89; 90.

2. Hãy tìm số trung bình, tứ phân vị và mốt của các mẫu số liệu sau:

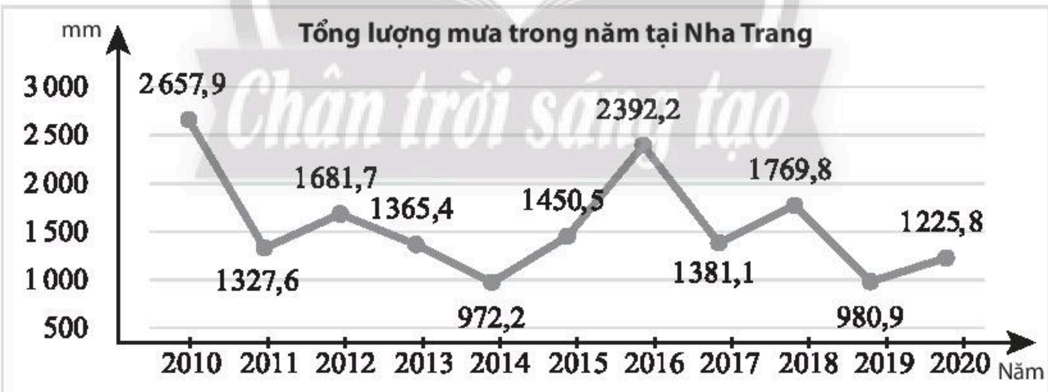
a)

Giá trị	6	7	8	9	10
Tần số	5	8	4	2	1

b)

Giá trị	26	27	28	29	30
Tần số	10	8	4	2	1

3. Tổng lượng mưa trong năm tại một trạm quan trắc đặt tại Nha Trang từ năm 2010 đến 2020 được thể hiện trong biểu đồ sau (đơn vị: mm).



a) Hãy tính lượng mưa trung bình tại trạm quan trắc trên từ năm 2010 đến 2020.

b) Hãy tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

4. Số huy chương vàng và bạc trong các giải thể thao quốc tế mà đoàn thể thao Việt Nam đạt được tại các giải đấu ở châu Á trong các năm từ năm 2010 đến 2019 được thống kê ở bảng sau:

Năm	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Huy chương vàng	39	43	115	52	56	62	130	82	74	120
Huy chương bạc	61	63	121	47	58	73	134	87	74	105

(*Nguồn: Tổng cục Thống kê*)

a) Tìm số trung bình và trung vị huy chương vàng và huy chương bạc mà đoàn thể thao Việt Nam đạt được trong 10 năm trên.

b) Hãy so sánh số huy chương vàng đoàn thể thao Việt Nam đạt được trong giai đoạn 2010 – 2014 với giai đoạn 2015 – 2019.

5. Bảng sau ghi lại độ tuổi của hai nhóm vận động viên tham gia một cuộc thi.

Nhóm 1	20	32	27	31	32	30	32	29	17	29	22	31
Nhóm 2	22	29	22	30	22	31	29	21	32	20	31	29

a) Hãy so sánh độ tuổi của hai nhóm vận động viên theo số trung bình và trung vị.

b) Tìm tứ phân vị của độ tuổi vận động viên cả hai nhóm gộp lại.

6. Minh và Thuỷ ghi lại số thư điện tử mà mỗi người nhận được mỗi ngày trong 10 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên từ tháng 01/2021 ở bảng sau:

Minh	6	7	3	6	1	4	1	4	5	1
Thuỷ	2	3	1	2	3	4	1	2	20	2

a) Hãy tìm số trung bình, trung vị và mốt của số thư điện tử mà mỗi bạn nhận được theo số liệu trên.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì ai nhận được nhiều thư điện tử hơn?

c) Nếu so sánh theo trung vị thì ai nhận được nhiều thư điện tử hơn?

d) Nên dùng số trung bình hay số trung vị để so sánh xem ai nhận được nhiều thư điện tử hơn mỗi ngày?

7. Bạn Út ghi lại khối lượng của một số quả xoài Keo và xoài Thanh Ca ở bảng sau (đơn vị: gam).

Xoài Keo	370	320	350	290	300	350	310	330	340	370	390	
Xoài Thanh Ca	350	310	410	390	380	370	320	350	330	340	370	400

a) Sử dụng số trung bình, hãy so sánh khối lượng của hai loại xoài.

b) Sử dụng trung vị, hãy so sánh khối lượng của hai loại xoài.

c) Hãy tính các tứ phân vị của hai mẫu số liệu trên.

d) Nếu bạn Út mua 5 kg xoài Keo thì sẽ được khoảng bao nhiêu quả?

Nếu bạn Út mua 5 kg xoài Thanh Ca thì sẽ được khoảng bao nhiêu quả?

8. Số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đồng bằng sông Hồng và khu vực Trung du và miền núi phía Bắc vào năm 2019 được cho như sau:

Đồng bằng sông Hồng: 30; 7; 7; 10; 10; 15; 9; 7; 5; 9; 6.

Trung du và miền núi phía Bắc: 10; 12; 7; 6; 8; 8; 7; 10; 9; 12; 9; 7; 11; 10.

(*Nguồn: Tổng cục Thống kê*)

a) Mỗi khu vực nêu trên có bao nhiêu tỉnh/thành phố?

b) Sử dụng số trung bình, hãy so sánh số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố ở hai khu vực.

c) Sử dụng trung vị, hãy so sánh số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố ở hai khu vực.

d) Hãy giải thích tại sao lại có sự khác biệt khi so sánh bằng số trung bình và trung vị.

e) Hãy tìm tứ phân vị và mốt của hai khu vực.

Bài 4. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Sắp xếp lại mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$.

– ***Khoảng biến thiên*** của một mẫu số liệu, kí hiệu là R, là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó, tức là: $R = x_n - x_1$.

– ***Khoảng tứ phân vị***, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu giữa Q_3 và Q_1, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

– ***Ý nghĩa của khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị***

+ Khoảng biến thiên đặc trưng cho độ phân tán của toàn bộ mẫu số liệu.

+ Khoảng tứ phân vị đặc trưng cho độ phân tán của một nửa các số liệu, có giá trị thuộc đoạn từ Q_1 đến Q_3 trong mẫu.

+ Khoảng tứ phân vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị rất lớn hoặc rất bé trong mẫu.

– ***Giá trị ngoại lệ***

+ Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định các ***giá trị ngoại lệ*** trong mẫu, đó là các giá trị quá nhỏ hay quá lớn so với đa số các giá trị của mẫu. Cụ thể, phần tử x trong mẫu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$.

+ Khi mẫu có giá trị ngoại lệ, người ta thường sử dụng trung vị và khoảng tứ phân vị để đo mức độ tập trung và mức độ phân tán của đa số các phần tử trong mẫu số liệu.

2. Phương sai và độ lệch chuẩn

Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

– ***Phương sai*** của mẫu số liệu này, kí hiệu là S^2, được tính bởi công thức

$$S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2] = \frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) - \overline{x}^2.$$

trong đó $\overline{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu.

– Căn bậc hai của phương sai được gọi là ***độ lệch chuẩn***, kí hiệu là S.

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số

Giá trị	x_1	x_2	…	x_k
Tần số	n_1	n_2	…	n_k

– Khi đó, công thức tính phương sai trở thành

$$S^2 = \frac{1}{n}[n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_k(x_k - \overline{x})^2]$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

– Có thể biến đổi công thức tính phương sai trên thành

$$S^2 = \frac{1}{n}(n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_k x_k^2) - \overline{x}^2.$$

– ***Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn***

+ Phương sai là trung bình cộng của các bình phương độ lệch từ mỗi giá trị của mẫu số liệu đến số trung bình.

+ Phương sai và độ lệch chuẩn được dùng để đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì các giá trị của mẫu càng cách xa nhau (có độ phân tán lớn).

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Kiểm tra khối lượng của một số quả măng cụt của hai lô hàng A và B được kết quả như sau (đơn vị: gam)

Lô A	85	82	84	83	80	82	84	85	80	81	80	82	85	85
Lô B	81	80	82	84	82	82	85	80	80	83	84	86	78	87

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của khối lượng măng cụt ở mỗi lô.

b) Hãy tìm phương sai và độ lệch chuẩn của khối lượng măng cụt ở mỗi lô.

c) Khối lượng của măng cụt ở lô hàng nào đều hơn?

Giải

Sắp xếp khối lượng các quả măng cụt ở lô A và lô B theo thứ tự không giảm, ta được:

Lô A	80	80	80	81	82	82	82	83	84	84	85	85	85	85
Lô B	78	80	80	80	81	82	82	82	83	84	84	85	86	87

a) Đối với lô A, khối lượng cao nhất và thấp nhất tương ứng là 85 và 80. Do đó khoảng biến thiên của lô A là $R(A) = 85 - 80 = 5$.

Đối với lô B, khối lượng cao nhất và thấp nhất tương ứng là 87 và 78. Do đó khoảng biến thiên của lô B là $R(B) = 87 - 78 = 9$.

Đối với lô A, $Q_1^A = 81$, $Q_3^A = 85$ nên $\Delta_Q^A = 85 - 81 = 4$.

Đối với lô B, $Q_1^B = 80$, $Q_3^B = 84$ nên $\Delta_Q^B = 84 - 80 = 4$.

b) Khối lượng trung bình của cân nặng măng cụt lô A là

$$\overline{x}(A) = \frac{1}{14}(3.80 + 81 + 3.82 + 83 + 2.84 + 4.85) = \frac{579}{7}.$$

Phương sai của cân nặng măng cụt lô A là

$$S(A)^2 = \frac{1}{14}(3.80^2 + 81^2 + 3.82^2 + 83^2 + 2.84^2 + 4.85^2) - \frac{579^2}{7^2} \approx 3,63.$$

Độ lệch chuẩn của măng cụt lô A là $S(A) = \sqrt{S(A)^2} \approx \sqrt{3,63} \approx 1,91.$

Khối lượng trung bình của cân nặng măng cụt lô B là

$$\overline{x}(A) = \frac{1}{14}(78 + 3.80 + 81 + 3.82 + 83 + 2.84 + 85 + 86 + 87) = \frac{577}{7}.$$

Phương sai của cân nặng măng cụt lô B là

$$S(A)^2 = \frac{1}{14}(78^2 + 3.80^2 + 81^2 + 3.82^2 + 83^2 + 2.84^2 + 85^2 + 86^2 + 87^2) - \frac{577^2}{7^2}$$
$$\approx 6,10.$$

Độ lệch chuẩn của măng cụt lô B là $S(B) = \sqrt{S(B)^2} \approx \sqrt{6,10} \approx 2,47.$

c) Sử dụng khoảng biến thiên và độ lệch chuẩn ta đều thấy khối lượng măng cụt ở lô A đều hơn lô B.

Bài 2. Một bệnh viện thống kê số ca nhập viện do tai nạn giao thông mỗi ngày trong tháng 9/2020 ở bảng sau:

Số ca	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12	15
Số ngày	2	3	4	6	3	2	2	3	2	1	1	1

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

b) Hãy tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

c) Xác định các giá trị ngoại lệ (nếu có) của mẫu số liệu.

Giải

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là 15 – 0 = 15.

Do cỡ mẫu $n = 30$ nên tứ phân vị thứ nhất bằng số hạng lớn thứ 8 trong dãy số liệu, vậy $Q_1 = 2$.

Tứ phân vị thứ ba bằng số hạng thứ 22 trong dãy số liệu, vậy $Q_3 = 7$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = 7 - 2 = 5$.

b) Trung bình của mẫu số liệu là $\overline{x} = \dfrac{136}{30}$.

Phương sai của mẫu số liệu là $S^2 = 11,72$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $S = 3,42$.

c) Ta có $Q_1 - 1,5\Delta_Q = 2 - 1,5.5 = -5,5$ và $Q_3 + 1,5\Delta_Q = 7 + 1,5.5 = 14,5$ nên mẫu có 1 giá trị ngoại lệ là 15.

Bài 3. Kết quả bài thi môn Toán của các bạn học sinh tổ 1 và tổ 2 cho ở bảng sau:

Tổ 1	7	8	9	6	7	8	7	9	10	7	8	6	8	9	8
Tổ 2	6	7	8	7	9	5	8	8	9	10	7	8	0	9	7

a) Sử dụng số trung bình, hãy so sánh điểm thi của các bạn tổ 1 và tổ 2.

b) Sau khi bỏ đi các giá trị ngoại lệ (nếu có) ở các điểm thi mỗi tổ, hãy so sánh lại điểm thi của các bạn tổ 1 và tổ 2.

c) Nên dùng số trung bình hay trung vị để so sánh điểm thi của các bạn tổ 1 và tổ 2.

Giải

a) Điểm trung bình của học sinh tổ 1 và tổ 2 lần lượt là 7,8 và 7,2. Nếu so sánh theo số trung bình thì điểm thi các bạn tổ 1 cao hơn điểm thi các bạn tổ 2.

b) Tổ 1 có $Q_1 = 7$; $Q_2 = 8$; $Q_3 = 9$; $\Delta_Q = 9 - 7 = 2$. Điểm số các bạn tổ 1 không có giá trị ngoại lệ nào.

Tổ 2 có $Q_1 = 7$; $Q_2 = 8$; $Q_3 = 9$, $\Delta_Q = 9 - 7 = 2$. Điểm số các bạn tổ 2 có 1 giá trị ngoại lệ là 0.

Sau khi bỏ đi điểm 0 này thì điểm trung bình của các bạn tổ 2 là 7,71.

Vậy điểm các bạn tổ 2 gần bằng điểm các bạn tổ 1.

c) Nên dùng số trung vị để so sánh điểm thi của các bạn tổ 1 và tổ 2 vì trong điểm thi của các bạn tổ 2 có xuất hiện giá trị ngoại lệ.

Bài 4. Bảng sau ghi giá bán ra lúc 11 giờ của 2 mã cổ phiếu A và B trong 10 ngày liên tiếp (đơn vị: nghìn đồng).

A	94	93,2	95	96,6	96	94	97	95,8	98	99,4
B	80	80,3	80,5	80,5	80,1	80,1	79,7	79,5	79,6	80

Người ta lập bảng sau để theo dõi độ dao động giá của từng mã cổ phiếu sau mỗi ngày giao dịch.

A	–0,8	1,8							
B	0,3	0,2							

a) Hãy điền các số liệu còn lại vào bảng trên.

b) Hãy tính độ lệch chuẩn, khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của độ dao động giá mỗi ngày của hai mã cổ phiếu trên.

c) Một cổ phiếu được gọi là có rủi ro cao nếu nó có biên độ dao động giá lớn. Hãy cho biết trong hai mã cổ phiếu trên, mã nào có độ rủi ro cao hơn.

Giải

a)

A	–0,8	1,8	1,6	–0,6	–2	3	–1,2	2,2	1,4
B	0,3	0,2	0	–0,4	0	–0,4	–0,2	0,1	0,4

b) Độ lệch chuẩn của độ dao động giá mã cổ phiếu A và B lần lượt là 1,66 và 0,27.

Khoảng biến thiên của độ dao động giá mã cổ phiếu A và B lần lượt là 5,0 và 0,8.

Khoảng tứ phân vị của độ dao động giá mã cổ phiếu A và B lần lượt là 3 và 0,55.

c) Mã cổ phiếu A có độ rủi ro cao hơn mã cổ phiếu B.

C. BÀI TẬP

1. Hãy tìm phương sai, khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và giá trị ngoại lệ (nếu có) của mỗi mẫu số liệu sau:

a) 90; 56; 50; 45; 46; 48; 52; 43.

b) 19; 11; 1; 16; 19; 12; 14; 10; 11.

c) 6,7; 6,2; 9,7; 6,3; 6,8; 6,1; 6,2.

d) 0,79; 0,68; 0,35; 0,38; 0,05; 0,35.

2. Hãy tìm phương sai, khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và giá trị ngoại lệ (nếu có) của mỗi mẫu số liệu cho bởi bảng tần số sau:

a)

Giá trị	0	4	6	9	10	17
Tần số	1	3	5	4	2	1

b)

Giá trị	2	23	24	25	26	27
Tần số	1	6	8	9	4	2

3. Một kĩ thuật viên thống kê lại số lần máy bị lỗi từng ngày trong tháng 5/2021 ở bảng sau:

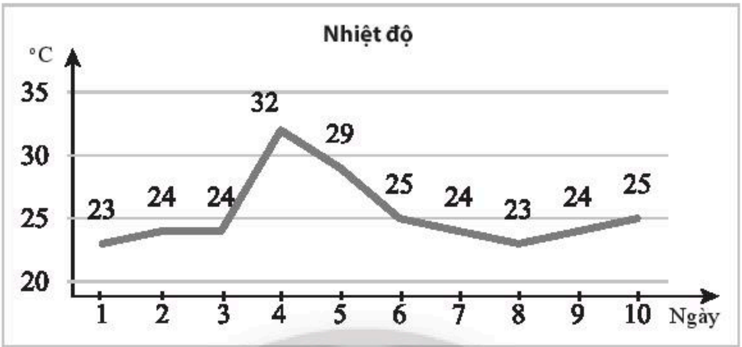
Số lỗi	0	1	2	3	4	5	6	7	12	15
Số ngày	2	3	4	6	6	3	2	3	1	1

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

b) Xác định các giá trị ngoại lệ (nếu có) của mẫu số liệu.

c) Hãy tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

4. Biểu đồ sau ghi lại nhiệt độ lúc 12 giờ trưa tại một trạm quan trắc trong 10 ngày liên tiếp (đơn vị: °C).



a) Hãy viết mẫu số liệu thống kê nhiệt độ từ biểu đồ trên.

b) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

c) Hãy tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

5. Khuê và Trọng ghi lại số tin nhắn điện thoại mà mỗi người nhận được từ ngày 1/9 đến ngày 15/9 năm 2020 ở bảng sau:

Khuê	2	4	3	4	6	2	3	2	4	5	3	4	6	7	3
Trọng	3	4	1	2	2	3	4	1	2	30	2	2	2	3	6

a) Hãy tìm phương sai của từng dãy số liệu.

b) Sau khi bỏ đi các giá trị ngoại lệ (nếu có), hãy so sánh số lượng tin nhắn mỗi bạn nhận được theo số trung bình và theo trung vị.

6. Bảng sau ghi giá bán ra lúc 11 giờ trưa của 2 mã cổ phiếu A và B trong 10 ngày liên tiếp (đơn vị: nghìn đồng).

Ngày	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	45	45,1	45,3	35,5	45,6	45,5	45,4	45,5	45,4	45,2
B	47	47,4	47,8	68,4	49	48,8	48,8	48,8	48,6	49,2

a) Biết có 1 trong 10 ngày trên có sự bất thường trong giá cổ phiếu. Hãy tìm ngày đó và giải thích.

b) Sau khi bỏ đi ngày có giá bất thường, hãy cho biết giá cổ phiếu nào ổn định hơn. Tại sao?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. TRẮC NGHIỆM

1. Số quy tròn của 45,6534 với độ chính xác $d = 0{,}01$ là:

A. 45,65; B. 45,6; C. 45,7; D. 45.

2. Cho biết $\sqrt[3]{3} = 1{,}44224957...$. Số gần đúng của $\sqrt[3]{3}$ với độ chính xác 0,0001 là:

A. 1,4422; B. 1,4421; C. 1,442; D. 1,44.

3. Cho số gần đúng $a = 0{,}1571$. Số quy tròn của a với độ chính xác $d = 0{,}002$ là:

A. 0,16; B. 0,15; C. 0,157; D. 0,159.

4. Độ dài cạnh của một hình vuông là $8 \pm 0{,}2$ cm thì chu vi của hình vuông đó bằng:

A. 32 cm; B. $32 \pm 0{,}2$ cm; C. $64 \pm 0{,}8$ cm; D. $32 \pm 0{,}8$ cm.

5. Trung vị của mẫu số liệu 4; 6; 7; 6; 5; 4; 5 là:

A. 4; B. 5; C. 6; D. 7.

6. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu 6; 7; 9; 4; 7; 5; 6; 6; 7; 9; 5; 6 là:

A. 3; B. 4; C. 5; D. 6.

7. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu 2; 4; 5; 6; 6; 7; 3; 4 là:

A. 3; B. 3,5; C. 4; D. 4,5.

8. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu 4; 7; 5; 6; 6; 7; 9; 5; 6 là:

A. 1; B. 1,5; C. 2; D. 2,5.

9. Dãy số liệu 5; 6; 0; 3; 5; 10; 3; 4 có các giá trị ngoại lệ là:

A. 0; B. 10; C. 0; 10; D. $\varnothing$.

10. Phương sai của dãy số liệu 4; 5; 0; 3; 3; 5; 6; 10 là:

A. 6,5; B. 6,75; C. 7; D. 7,25.

B. TỰ LUẬN

1. Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác d:

a) $a = -0{,}4356217$ với $d = 0{,}0001$;

b) $b = 0{,}2042$ với $d = 0{,}001$.

2. Tuấn đo được bán kính của một hình tròn là $5 \pm 0{,}2$ cm. Tuấn tính chu vi hình tròn là $p = 31{,}4$ cm. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối của p, biết $3{,}14 < \pi < 3{,}142$.

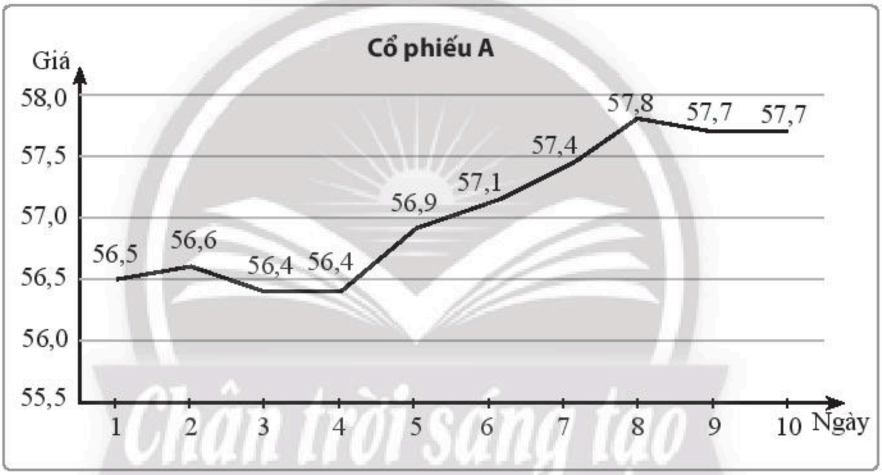
3. Bảng sau ghi lại số sách mà các bạn học sinh tổ 1 và tổ 2 quyên góp được cho thư viện trường.

Tổ 1	10	6	9	7	7	6	9	6	9	1	9	6
Tổ 2	6	8	8	7	9	9	7	9	30	7	10	5

a) Sử dụng số trung bình và trung vị, hãy so sánh số sách mà mỗi học sinh tổ 1 và tổ 2 quyên góp được cho thư viện trường.

b) Hãy xác định giá trị ngoại lệ (nếu có) cho mỗi mẫu số liệu. So sánh số sách mà mỗi học sinh tổ 1 và tổ 2 quyên góp được cho thư viện trường sau khi bỏ đi các giá trị ngoại lệ.

4. Giá bán lúc 10h sáng của một mã cổ phiếu A trong 10 ngày liên tiếp được ghi lại ở biểu đồ sau (đơn vị: nghìn đồng).



a) Viết mẫu số liệu thống kê giá của mã cổ phiếu A từ biểu đồ trên.

b) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

c) Tính trung bình, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

5. Tổng số giờ nắng trong các năm từ 2014 đến 2019 tại hai trạm quan trắc đặt tại Vũng Tàu và Cà Mau được ghi lại ở bảng sau:

Năm	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
Vũng Tàu	2693,8	2937,8	2690,3	2582,5	2593,9	2814,0
Cà Mau	2195,8	2373,4	2104,6	1947,0	1963,7	2063,9

a) Sử dụng số trung bình, hãy so sánh số giờ nắng mỗi năm của Vũng Tàu và Cà Mau trong 6 năm trên.

b) Sử dụng số trung vị, hãy so sánh số giờ nắng mỗi năm của Vũng Tàu và Cà Mau trong 6 năm trên.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

1. Các số 97,34; 3 260 là số gần đúng.

2. a) Hàng lớn nhất của độ chính xác $d = 0{,}001$ là hàng phần nghìn nên ta quy tròn a đến hàng phần trăm. Vậy số quy tròn của a là 0,01.

b) Hàng lớn nhất của độ chính xác $d = 0{,}01$ là hàng phần trăm nên ta quy tròn b đến hàng phần mười. Vậy số quy tròn của b là –1 737,2.

c) Hàng lớn nhất của độ chính xác $d = 1\,000$ là hàng nghìn nên ta quy tròn c đến hàng chục nghìn. Vậy số quy tròn của c là 460 000.

3. a) Số quy tròn của $\sqrt[3]{2}$ đến hàng phần nghìn là $a = 1{,}260$.

Vì $1{,}2599 \leq \sqrt[3]{2} \leq 1{,}260$ nên $1{,}2599 - 1{,}260 = -0{,}0001 \leq \sqrt[3]{2} - 1{,}260 \leq 0$.

Do đó sai số tuyệt đối của a là $\Delta_a = \left|\sqrt[3]{2} - 1{,}260\right| \leq 0{,}0001$.

Vậy sai số tương đối của a là $\delta_a \leq \dfrac{0{,}0001}{1{,}260} \approx 7{,}9\,.\,10^{-3}\,\%$.

b) Hàng của chữ số khác không đầu tiên bên trái của $d = 0{,}00007$ là phần trăm nghìn. Quy tròn $\sqrt[3]{2}$ đến hàng phần trăm nghìn ta được số gần đúng là 1,25992.

4. a) 37 214 000; b) –5,631.

5. Độ dài đường cao $\overline{h} = 3\sqrt{3}$. Ta có $3\sqrt{3} = 5{,}1961524\ldots$ (cm).

Vì hàng lớn nhất của $d = 0{,}01$ là hàng phần trăm nên quy tròn $3\sqrt{3}$ đến hàng phần mười. Số quy tròn của $\overline{h}$ với độ chính xác $d = 0{,}01$ là $h = 5{,}2$.

6. Hàng lớn nhất của độ chính xác $d = 0{,}002$ là hàng phần nghìn nên ta quy tròn a đến hàng phần trăm. Vậy số quy tròn của a là 0,10.

Vì số đúng $\overline{a}$ thoả mãn $0{,}1031 - 0{,}002 = 0{,}1011 \leq \overline{a} \leq 0{,}1031 + 0{,}002 = 0{,}1051$.

Nên $0{,}1011 - 0{,}10 = 0{,}0011 \leq \overline{a} - 0{,}10 \leq 0{,}1051 - 0{,}10 = 0{,}0051$.

Do đó, sai số tuyệt đối của 0,10 là $\Delta_{0,10} = |\overline{a} - 0,10| \leq 0,0051$.

Vậy sai số tương đối của số quy tròn là $\delta_{0,10} \leq \dfrac{0,0051}{0,10} = 0,051 \approx 5,1\%$.

7. Xét kết quả của thiết bị A. Do $\Delta_A \leq d = 0,004$ nên $\delta_A \leq \dfrac{0,004}{9,592} \approx 4,170 \,.\, 10^{-2}\%$.

Xét kết quả của thiết bị B. Ta có $\delta_B \leq \dfrac{0,005}{9,593} \approx 5,212 \,.\, 10^{-2}\%$.

Xét kết quả của thiết bị C. Ta có $\delta_C \leq \dfrac{0,006}{9,589} \approx 6,257 \,.\, 10^{-2}\%$.

Vậy thiết bị A có sai số tương đối nhỏ nhất.

8. Gọi $\overline{a}$ và $\overline{p}$ lần lượt là đường kính và chu vi của hình tròn.

Ta có $23,8 \leq \overline{a} \leq 24,2$.

Nên $3,141 \,.\, 23,8 = 74,7558 \leq \overline{p} = \pi\overline{a} \leq 3,142 \,.\, 24,2 = 76,0364$.

Do đó $74,7558 - 75,36 = -0,6042 \leq \overline{p} - 75,36 \leq 76,0364 - 75,36 = 0,6764$.

Vậy sai số tuyệt đối của p là $\Delta_p = |\overline{p} - 75,36| \leq 0,6764$.

9. Gọi $\overline{a}$ và $\overline{b}$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng thực của tấm thép.

Ta có $99,5 \leq \overline{a} \leq 100,5$, và $69,5 \leq \overline{b} \leq 70,5$.

Suy ra $99,5 \,.\, 69,5 = 6\,915,25 \leq \overline{a}\,.\,\overline{b} \leq 100,5 \,.\, 70,5 = 7\,085,25$.

Do đó $6\,915,25 - 7\,000 = -84,75 \leq \overline{a}\,.\,\overline{b} - 7\,000 \leq 7\,085,25 - 7\,000 = 85,25$.

Vậy diện tích tấm thép là $7\,000 \pm 85,25$ (cm^2).

Bài 2. MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG VÀ BIỂU ĐỒ

1. Tâm ghi nhầm nhiệt độ của tháng 7. Do tháng 7 là vào mùa hè nên nhiệt độ trung bình trong tháng đó ở thành phố Vinh phải cao hơn 4,5 °C.

2. Phát biểu a) và d) là sai. Phát biểu b) và c) là đúng.

3. Phương nhầm giữa số gia đình dùng bếp điện và bếp than.

Bài 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU

1. a) $\overline{x} = 15; Q_1 = 14{,}5; Q_2 = 15; Q_3 = 16; M_o = 15.$

b) $\overline{x} = \dfrac{63}{11}; Q_1 = 4; Q_2 = 6; Q_3 = 7; M_o = 7.$

c) $\overline{x} = \dfrac{85}{12}; Q_1 = 5{,}5; Q_2 = 7; Q_3 = 8{,}5; M_o = 7.$

d) $\overline{x} = 87; Q_1 = 85{,}5; Q_2 = 88; Q_3 = 89{,}5; M_o \in \{87; 88; 89\}.$

2. a) $\overline{x} = 7{,}3; Q_1 = 6{,}5; Q_2 = 7; Q_3 = 8; M_o = 7.$

b) $\overline{x} = 27{,}04; Q_1 = 26; Q_2 = 27; Q_3 = 28; M_o = 26.$

3. a) $\overline{x} = 1564{,}1.$

b) $Q_1 = 1225{,}8; Q_2 = 1381{,}1; Q_3 = 1769{,}8.$

4. a) Trung bình số huy chương vàng và trung bình số huy chương bạc đạt được trong 10 năm là 77,3 và 82,3.

Trung vị số huy chương vàng và trung vị số huy chương bạc đạt được trong 10 năm là 68 và 73,5.

b) Trung bình và trung vị số huy chương vàng đạt được trong giai đoạn 2010 – 2014 là 61 và 52.

Trung bình và trung vị số huy chương vàng đạt được trong giai đoạn 2015 – 2019 là 93,6 và 82.

Vậy nếu so sánh theo số trung bình và số trung vị thì Việt Nam đều giành được nhiều huy chương vàng hơn trong giai đoạn 2015 – 2019 so với giai đoạn 2010 – 2014.

5. a) Nhóm 1: $\overline{x} = 27{,}67; M_e = 29{,}5.$

Nhóm 2: $\overline{x} = 26{,}5; M_e = 29.$

Vậy độ tuổi của các vận động viên nhóm 1 cao hơn nhóm 2.

b) $Q_1 = 22; Q_2 = 29; Q_3 = 31.$

6. a) Minh: $\overline{x} = 3{,}8; M_e = 4; M_o = 1$. Thuỷ: $\overline{x} = 4; M_e = 2; M_o = 2.$

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì Thuỷ nhận được nhiều thư điện tử hơn Minh.

c) Nếu so sánh theo số trung vị thì Minh nhận được nhiều thư điện tử hơn Thuỷ.

d) Nên dùng số trung vị để so sánh.

7. a) Khối lượng trung bình xoài Keo là 338,18 g. Khối lượng trung bình xoài Thanh Ca là 360 g. Vậy nếu so sánh theo số trung bình thì khối lượng xoài Thanh Ca cao hơn khối lượng xoài Keo.

b) Trung vị của khối lượng xoài Keo là 340 g. Trung vị khối lượng xoài Thanh Ca là 360 g. Vậy nếu so sánh theo trung vị thì khối lượng xoài Thanh Ca cao hơi khối lượng xoài Keo.

c) Xoài Keo: $Q_1 = 310$; $Q_2 = 340$; $Q_3 = 370$.

Xoài Thanh Ca: $Q_1 = 335$; $Q_2 = 360$; $Q_3 = 385$.

d) Do $5\,000 : 338{,}18 \approx 14{,}79$ nên nếu bạn Út mua 5 kg xoài Keo thì sẽ được khoảng 14 đến 15 quả.

Do $5\,000 : 360 \approx 13{,}89$ nên nếu bạn Út mua 5 kg xoài Thanh Ca thì sẽ được khoảng 13 đến 14 quả.

8. a) Khu vực Đồng bằng sông Hồng (ĐBSH) có 11 tỉnh/thành phố; Khu vực Trung du và miền núi phía Bắc (TDMNPB) có 14 tỉnh/thành phố.

b) Trung bình số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của khu vực ĐBSH là 10,45 và của khu vực TDMNPB là 9. Do đó theo số trung bình thì các tỉnh/thành phố khu vực ĐBSH có nhiều đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã hơn khu vực TDMNPB.

c) Trung vị số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực ĐBSH và TDMNPB đều là 9.

Vậy nếu so sánh theo trung vị thì số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực ĐBSH và TDMNPB là bằng nhau.

d) Có sự khác biệt khi so sánh bằng số trung bình và số trung vị là do có một tỉnh/thành phố khu vực ĐBSH có quá nhiều đơn vị hành chính quận/huyện/thị xã so với các tỉnh/thành phố khác.

e) ĐBSH $Q_1 = 7$; $Q_2 = 9$; $Q_3 = 10$; $M_o = 7$.

TDMNPB $Q_1 = 7$; $Q_2 = 9$; $Q_3 = 10$; $M_o \in \{7; 10\}$.

Bài 4. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU

1. a) $S^2 = 202,69$; $R = 47$; $\Delta_Q = 8,5$. Giá trị ngoại lệ là 90.

b) $S^2 = 26,91$; $R = 18$, $\Delta_Q = 7$. Không có giá trị ngoại lệ.

c) $S^2 = 1,41$; $R = 3,6$, $\Delta_Q = 0,6$. Giá trị ngoại lệ là 9,7.

d) $S^2 = 0,059$; $R = 0,74$, $\Delta_Q = 0,33$. Không có giá trị ngoại lệ.

2. a) $S^2 = 13,40$; $R = 17$; $\Delta_Q = 4$. Giá trị ngoại lệ là 17.

b) $S^2 = 17,74$; $R = 25$; $\Delta_Q = 1$. Giá trị ngoại lệ là 2 và 27.

3. a) $R = 15$; $Q_1 = 2$; $Q_3 = 5$, $\Delta_Q = 3$.

b) Do $Q_1 - 1,5\Delta_Q = -2,5$ và $Q_3 + 1,5\Delta_Q = 9,5$ nên mẫu có 2 giá trị ngoại lệ là 12 và 15.

c) $S^2 = 9,79$; $S = 3,13$.

4. a)

Nhiệt độ	23	24	24	32	29	25	24	23	24	25

b) $R = 32 - 23 = 9$; $Q_1 = 24$; $Q_3 = 25$; $\Delta_Q = 1$.

c) $S^2 = 7,61$; $S \approx 2,76$.

5. a) Khuê: $S^2 = 2,25$; Trọng $S^2 = 48,12$.

b) Khuê: $Q_1 = 3$; $Q_3 = 5$; $\Delta_Q = 2$; $Q_1 - 1,5\Delta_Q = 0$; $Q_3 + 1,5\Delta_Q = 8$. Mẫu số liệu của Khuê không có giá trị ngoại lệ.

Trọng: $Q_1 = 2$; $Q_3 = 4$; $\Delta_Q = 2$; $Q_1 - 1,5\Delta_Q = -1$; $Q_3 + 1,5\Delta_Q = 7$. Mẫu số liệu của Trọng có một giá trị ngoại lệ là 30.

Sau khi bỏ đi giá trị ngoại lệ thì số trung bình của mẫu của Khuê và của Trọng lần lượt là 3,87 và 2,64; trung vị của mẫu của Khuê và của Trọng lần lượt là 4 và 2. Do đó so sánh theo cả trung bình và trung vị thì Khuê có nhiều tin nhắn mỗi ngày hơn Trọng.

6. a) Kiểm tra được giá trị ngoại lệ rơi vào ngày thứ 4.

b) Bỏ đi giá cổ phiếu ngày thứ 4 rồi so sánh phương sai mẫu, ta thấy giá của mã cổ phiếu A ổn định hơn giá của mã cổ phiếu B.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. TRẮC NGHIỆM

1. C	**2.** A	**3.** A	**4.** D	**5.** B	**6.** C	**7.** B	**8.** C	**9.** B	**10.** D

B. TỰ LUẬN

1. a) –0,436; b) 0,20.

2. $\Delta_p = \left|\overline{p} - 31,4\right| < 2\ .\ 3,142\ .\ 5,2 - 31,4 = 1,2768$.

3. a) Tổ 1: $\overline{x} = 7,08; M_e = 7; Q_1 = 6; Q_3 = 9; \Delta_Q = 3$.

Tổ 2: $\overline{x} = 9,58; M_e = 8; Q_1 = 7; Q_3 = 9; \Delta_Q = 2$.

Vậy nếu so sánh theo số trung bình và trung vị thì số sách các bạn tổ 2 quyên góp được nhiều hơn các bạn tổ 1.

b) Có 1 giá trị ngoại lệ là 1 ở tổ 1 và 30 ở tổ 2.

Sau khi bỏ đi giá trị này thì: tổ 1 có $\overline{x} = 7,64; M_e = 7$; tổ 2 có $\overline{x} = 7,73; M_e = 8$.

Vậy sau khi bỏ đi các giá trị ngoại lệ thì khi so sánh theo số trung bình và trung vị các bạn tổ 2 vẫn quyên góp được nhiều sách hơn các bạn tổ 1.

4. a)

Giá	56,5	56,6	56,4	56,4	56,9	57,1	57,4	57,8	57,7	57,7

b) $R = 1,4$, $\Delta_Q = 1,2$.

c) $\overline{x} = 57,05$; $S = 0,54$.

5. a) Trung bình số giờ nắng mỗi năm tại Vũng Tàu là 2718,7 giờ và tại Cà Mau là 2108,1 giờ. Do đó nếu sử dụng số trung bình thì thời gian nắng mỗi năm ở Vũng Tàu nhiều hơn ở Cà Mau.

b) Trung vị số giờ nắng mỗi năm tại Vũng Tàu là 2692,05 giờ và tại Cà Mau là 2084,25 giờ. Do đó nếu sử dụng trung vị thì thời gian nắng mỗi năm ở Vũng Tàu nhiều hơn ở Cà Mau.

Chịu trách nhiệm xuất bản

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung

Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN – TRẦN THANH HÀ

Biên tập mĩ thuật: BÙI XUÂN DƯƠNG

Thiết kế sách: BÙI XUÂN DƯƠNG

Trình bày bìa: THÁI HỮU DƯƠNG

Minh hoạ: BÙI XUÂN DƯƠNG

Sửa bản in: VŨ NHÂN KHÁNH – MÃ TRƯỜNG VINH

Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

Bài tập Toán 10, tập một (Chân trời sáng tạo)

Mã số: G2BHXT001M22

In………bản, (QĐ in số….) Khổ 17x24 cm.

Đơn vị in:……………………..

Cơ sở in:……………………….

Số ĐKXB: 1146-2022/CXBIPH/9-708/GD

Số QĐXB:......... ngày…. tháng…. năm 20….

In xong và nộp lưu chiểu tháng…. năm 20….

Mã số ISBN: Tập 1: 978-604-0-32734-5

Tập 2: 978-604-0-32735-2

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ BÀI TẬP LỚP 10 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Bài tập NGỮ VĂN 10, TẬP MỘT
2. Bài tập NGỮ VĂN 10, TẬP HAI
3. Bài tập TOÁN 10, TẬP MỘT
4. Bài tập TOÁN 10, TẬP HAI
5. TIẾNG ANH 10 Friends Global - Workbook
6. Bài tập LỊCH SỬ 10
7. Bài tập ĐỊA LÍ 10
8. Bài tập VẬT LÍ 10
9. Bài tập HOÁ HỌC 10
10. Bài tập SINH HỌC 10
11. Bài tập HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM, HƯỚNG NGHIỆP 10 (BẢN 1)
12. Bài tập HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM, HƯỚNG NGHIỆP 10 (BẢN 2)
13. Bài tập GIÁO DỤC KINH TẾ VÀ PHÁP LUẬT 10
14. Bài tập GIÁO DỤC QUỐC PHÒNG VÀ AN NINH 10

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội; CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng; CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam; CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
- **Cửu Long:** CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

ISBN 978-604-0-32734-5

9 786040 327345

Giá: 21.000 đ