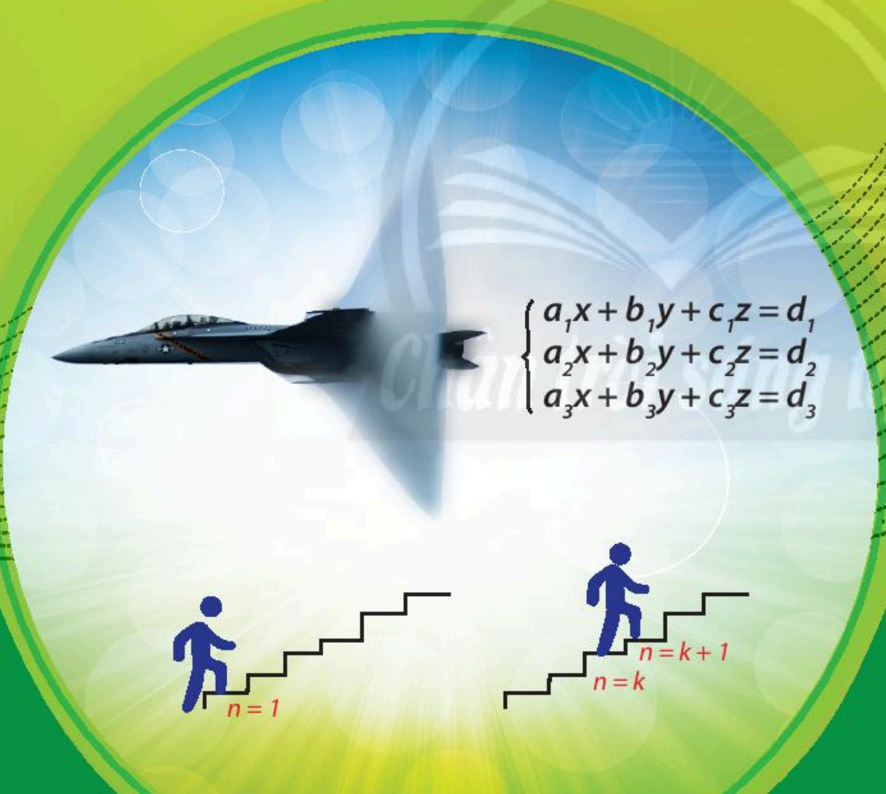
TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – ĐẶNG VĂN ĐOẠT

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 10



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – ĐẶNG VĂN ĐOẠT

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP
TOÁN
10

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Mỗi bài học trong sách Chuyên đề học tập Toán 10 thường có các phần như sau:

Hoạt động khởi động	Gợi mở, kết nối người học vào chủ đề bài học.
Hoạt động khám phá	Gợi ý để người học tìm ra kiến thức mới.
Kiến thức trọng tâm	Nội dung kiến thức cần lĩnh hội.
Thực hành	Các bài tập cơ bản theo yêu cầu cần đạt.
Vận dụng	Ứng dụng kiến thức để giải quyết vấn đề.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

Lời nói đầu

Các bạn học sinh, quý thầy, cô giáo thân mến!

Sách **Chuyên đề học tập Toán 10** thuộc bộ sách **Chân trời sáng tạo** được biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Sách bao gồm ba chuyên đề:

Chuyên đề 1. **Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn và ứng dụng.**

Chuyên đề 2. **Phương pháp quy nạp toán học và nhị thức Newton.**

Chuyên đề 3. **Ba đường conic và ứng dụng.**

Các chuyên đề này nhằm mục đích:

– Cung cấp thêm một số kiến thức và kĩ năng toán học nhằm đáp ứng yêu cầu phân hoá, tạo cơ hội cho học sinh vận dụng Toán học để giải quyết các vấn đề liên môn và thực tiễn, góp phần hình thành cơ sở khoa học cho giáo dục STEM.

– Giúp học sinh hiểu vai trò và những ứng dụng của Toán học trong thực tiễn; làm cơ sở cho định hướng nghề nghiệp sau Trung học phổ thông; tạo cơ hội cho học sinh nhận biết năng khiếu, sở thích của mình, từ đó tạo đam mê khi học Toán.

Mỗi chuyên đề đều có nêu các kiến thức cơ bản sẽ học và các yêu cầu cần đạt của chuyên đề. Các bài học đều xây dựng theo tinh thần định hướng phát triển năng lực và thường được thống nhất theo các bước: khởi động, khám phá, thực hành, vận dụng.

Chúng tôi hi vọng rằng sách **Chuyên đề học tập Toán 10** sẽ hỗ trợ quý thầy cô trong quá trình dạy học, đồng thời giúp các bạn học sinh hứng thú hơn khi học tập bộ môn Toán.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để sách ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

Mục lục

Trang

Chuyên đề 1

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN VÀ ỨNG DỤNG

Ở lớp dưới, chúng ta đã được học cách giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu về hệ phương trình bậc nhất ba ẩn và cách giải hệ phương trình này bằng phương pháp Gauss. Chúng ta cũng sẽ học cách vận dụng hệ phương trình bậc nhất ba ẩn để giải quyết một số vấn đề trong thực tiễn cuộc sống.

Sau chuyên đề này, bạn có thể:

– Nhận biết được hệ phương trình bậc nhất ba ẩn, nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

– Giải được hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng phương pháp Gauss.

– Tìm được nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng máy tính cầm tay.

– Vận dụng hệ phương trình bậc nhất ba ẩn để giải quyết một số vấn đề trong khoa học và trong thực tiễn cuộc sống.

Bài 1. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

Từ khoá: Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn; Nghiệm; Phương pháp Gauss.

Chúng ta đã biết cách mô tả mối liên hệ giữa hai ẩn số x, y phải thoả mãn đồng thời hai điều kiện $a_1x + b_1y = c_1$ $\left(a_1^2 + b_1^2 > 0\right)$ và $a_2x + b_2y = c_2$ $\left(a_2^2 + b_2^2 > 0\right)$ bằng cách sử dụng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Trong bài học này, ta sẽ học cách giải quyết tình huống cần mô tả mối liên hệ giữa ba ẩn số x, y, z phải thoả mãn đồng thời ba điều kiện:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1;\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \text{ và } a_3x + b_3y + c_3z = d_3.$$

1. Định nghĩa hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

1 Ba lớp 10A, 10B, 10C gồm 128 học sinh cùng tham gia lao động trồng cây. Mỗi học sinh lớp 10A trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi học sinh lớp 10B trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi học sinh lớp 10C trồng được 6 cây bạch đàn. Cả 3 lớp trồng được 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Gọi x, y, z lần lượt là số học sinh của các lớp 10A, 10B, 10C.

a) Lập các hệ thức thể hiện mối liên hệ giữa x, y và z.

b) Trong bảng dữ liệu sau, chọn các số liệu phù hợp với số học sinh của mỗi lớp 10A, 10B, 10C và giải thích sự lựa chọn của bạn.

x	y	z
41	43	44
40	43	45
42	43	43

Ở 1, ta nhận được ba hệ thức thể hiện mối liên hệ giữa x, y và z. Mỗi hệ thức đó được gọi là một phương trình bậc nhất ba ẩn (với ẩn là x, y, z). Ba phương trình đó tạo thành một hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

Tổng quát ta có:

• ***Phương trình bậc nhất ba ẩn*** là hệ thức có dạng:

$$ax + by + cz = d,$$

trong đó x, y, z gọi là ba ***ẩn*** và a, b, c, d là các số thực cho trước gọi là các ***hệ số***, thoả mãn a, b, c không đồng thời bằng 0.

Mỗi bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ thoả mãn phương trình trên gọi là một ***nghiệm*** của phương trình bậc nhất ba ẩn.

• ***Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn*** là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

trong đó x, y, z là ba ***ẩn***, a_i, b_i, c_i, d_i là các số thực cho trước gọi là các ***hệ số***. Ở đây các hệ số a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ không đồng thời bằng 0.

Mỗi bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ thoả mãn đồng thời cả ba phương trình của hệ gọi là một ***nghiệm*** của hệ phương trình.

Giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Chú ý: Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn còn được gọi tắt là *hệ phương trình bậc nhất ba ẩn*.

Ví dụ 1

Hệ phương trình nào dưới đây là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn? Mỗi bộ ba số (1; 2; 2), (–1; 2; 3) có là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn đó không?

(1) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 4 \\ -x + 2y + z = 8 \\ 3x + 4y - z = 2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x - 2y^2 + 4z = 6 \\ 4x - 5y + 2z = -3 \\ x + 3y - z = -1. \end{cases}$

Giải

Hệ phương trình (1) là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

Hệ phương trình (2) không phải là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn, vì phương trình thứ nhất của hệ có chứa y^2.

• Thay $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$ vào vế trái của từng phương trình ở hệ (1) và so sánh với vế phải, ta được:

Phương trình thứ nhất: $2 - 6 + 8 = 4$ (thoả mãn);

Phương trình thứ hai: $-1 + 4 + 2 = 5 \neq 8$ (không thoả mãn).

Vậy (1; 2; 2) không là nghiệm của hệ phương trình (1).

• Thay $x = -1$, $y = 2$, $z = 3$ vào vế trái của từng phương trình ở hệ (1) và so sánh với vế phải, ta được:

Phương trình thứ nhất: $-2 - 6 + 12 = 4$ (thoả mãn);

Phương trình thứ hai: $1 + 4 + 3 = 8$ (thoả mãn);

Phương trình thứ ba: $-3 + 8 - 3 = 2$ (thoả mãn).

Vậy $(-1; 2; 3)$ là nghiệm của hệ phương trình (1).

Hệ phương trình nào dưới đây là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn? Mỗi bộ ba số $(1; 5; 2)$, $(1; 1; 1)$ và $(-1; 2; 3)$ có là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn đó không?

(1) $\begin{cases} 4x - 2y + z = 5 \\ 4xz - 5y + 2z = -7 \\ -x + 3y + 2z = 3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + 2z = 5 \\ 2x - y + z = -1 \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$

2. Giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng phương pháp Gauss

Ở các lớp dưới, chúng ta đã biết cách giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Đối với hệ phương trình bậc nhất ba ẩn, chúng ta có thể tìm được cách giải như thế nào?

Cho các hệ phương trình:

(1) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ \quad 3y - z = 2 \\ \qquad 2z = 3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ \quad 2y + z = -1 \\ \quad 2y - z = -4. \end{cases}$

a) Hệ phương trình (1) có gì đặc biệt? Giải hệ phương trình này.

b) Biến đổi hệ phương trình (2) về dạng như hệ phương trình (1). Giải hệ phương trình (2).

Hệ phương trình có dạng như hệ phương trình (1) được gọi là ***hệ phương trình bậc nhất ba ẩn dạng tam giác.***

Mọi hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn đều biến đổi được về hệ phương trình bậc nhất ba ẩn dạng tam giác.

Ví dụ 2

Biến đổi hệ phương trình sau về hệ phương trình bậc nhất ba ẩn dạng tam giác rồi giải hệ vừa tìm được.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 3 & (1) \\ x - y + z = 2 & (2) \\ y + 2z = 1. & (3) \end{cases}$$

Giải

Nhân hai vế của phương trình (2) với -3, cộng vế với vế của phương trình nhận được với phương trình (1), giữ nguyên các phương trình (1) và (3), ta được hệ:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 3 & (1) \\ 2y - 2z = -3 & (2.1) \\ y + 2z = 1. & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình (3) với –2, cộng vế với vế của phương trình nhận được với phương trình (2.1), giữ nguyên các phương trình (1) và (2.1), ta được hệ:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 3 & (1) \\ 2y - 2z = -3 & (2.1) \\ -6z = -5. & (3.1) \end{cases}$$

Từ phương trình (3.1), ta có $z = \frac{5}{6}$.

Thay $z = \frac{5}{6}$ vào phương trình (2.1), ta được $y = -\frac{2}{3}$.

Thay $y = -\frac{2}{3}$ và $z = \frac{5}{6}$ vào phương trình (1), ta được $x = \frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

Để giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn, ta có thể sử dụng các phép biến đổi tương đương để đưa nó về hệ phương trình bậc nhất ba ẩn dạng tam giác, từ đó tìm nghiệm của hệ.

Cách giải như trên gọi là ***giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng phương pháp Gauss***.

Nhà toán học người Đức
Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Ví dụ 3

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 & (1) \\ 2x + 3y - z = 4 & (2) \\ x + 5y - 4z = 2. & (3) \end{cases}$$

Giải

Nhân hai vế của phương trình (3) với –2, cộng vế với vế của phương trình nhận được với phương trình (2), giữ nguyên các phương trình (1) và (2), ta được hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 & (1) \\ 2x + 3y - z = 4 & (2) \\ -7y + 7z = 0. & (3.1) \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình (1) với –2, cộng vế với vế của phương trình nhận được với phương trình (2), giữ nguyên các phương trình (1) và (3.1), ta được hệ:

$$\begin{cases} x-2y+3z=9 & (1) \\ 7y-7z=-14 & (2.1) \\ -7y+7z=0. & (3.1) \end{cases}$$

Cộng vế với vế của phương trình (2.1) với phương trình (3.1), giữ nguyên các phương trình (1) và (2.1), ta được hệ:

$$\begin{cases} x-2y+3z=9 & (1) \\ 7y-7z=-14 & (2.1) \\ 0y+0z=-14. & (3.2) \end{cases}$$

Phương trình (3.2) vô nghiệm. Do đó, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 4

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} 2x+2y-z=-1 & (1) \\ x+4y+z=-8 & (2) \\ x-2y-2z=7. & (3) \end{cases}$$

Giải

Nhân hai vế của phương trình (3) với –1, cộng vế với vế của phương trình nhận được với phương trình (2), giữ nguyên các phương trình (1) và (2), ta được hệ:

$$\begin{cases} 2x+2y-z=-1 & (1) \\ x+4y+z=-8 & (2) \\ 6y+3z=-15. & (3.1) \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình (2) với 2, trừ vế cho vế của phương trình nhận được cho phương trình (1), giữ nguyên các phương trình (1) và (3.1), ta được hệ:

$$\begin{cases} 2x+2y-z=-1 & (1) \\ 6y+3z=-15 & (2.1) \\ 6y+3z=-15. & (3.1) \end{cases}$$

Hai phương trình (2.1) và (3.1) giống nhau, nên có thể viết hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} 2x+2y-z=-1 & (1) \\ 6y+3z=-15. & (2.1) \end{cases}$$

Từ phương trình (2.1), ta có $z = -2y - 5$, thay vào phương trình (1) ta được $x = -2y - 3$.

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm dạng $(-2y - 3; y; -2y - 5)$ với $y \in \mathbb{R}$.

Nhận xét: Một hệ phương trình bậc nhất ba ẩn có thể có nghiệm duy nhất, vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ x+2y-z=-2 \\ x-3y+z=3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y+2z=2 \\ x+2y-z=1 \\ 2x-3y+3z=2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-4y+2z=-1 \\ 4x-y+3z=1. \end{cases}$

Tìm phương trình của parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, biết (P) đi qua ba điểm $A(0; -1)$, $B(1; -2)$ và $C(2; -1)$.

3. Sử dụng máy tính cầm tay tìm nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

Ngày nay, cùng với sự phát triển của khoa học kĩ thuật, người ta đã sản xuất ra những chiếc máy tính cầm tay nhỏ gọn, dễ dàng sử dụng để hỗ trợ việc tính toán.

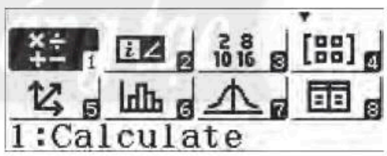
Có nhiều loại máy tính cầm tay có thể giúp tìm nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn một cách dễ dàng. Chẳng hạn, ta có thể thực hiện trên một loại máy tính cầm tay như sau:

Ví dụ 5

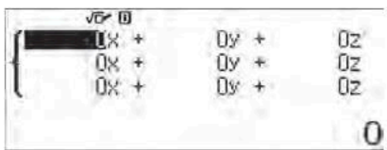
Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3y+2z=5 \\ x+2y-3z=4 \\ 3x-y-z=2. \end{cases}$$

Sau khi mở máy, ấn phím $\boxed{\text{MENU}}$ để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.



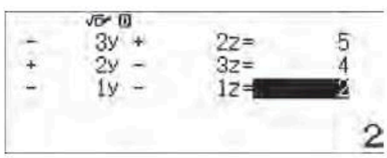
Ấn liên tiếp các phím $\boxed{9}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ để màn hình hiển thị như hình bên.



Tiếp theo, lần lượt nhập các hệ số của từng phương trình bằng cách ấn liên tiếp các phím như sau:

Nhập hệ số của phương trình thứ nhất:

$\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$



Nhập hệ số của phương trình thứ hai:

$\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

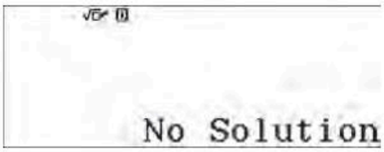
Nhập hệ số của phương trình thứ ba:

$\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

Tiếp theo, ấn liên tục 3 lần phím $\boxed{=}$ để xem kết quả.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(-7; -\dfrac{58}{5}; -\dfrac{57}{5}\right)$.

Chú ý: Đối với các hệ phương trình bậc nhất ba ẩn vô nghiệm hoặc vô số nghiệm, sau khi thực hiện tương tự như Ví dụ 5, ta nhận được kết quả hiển thị trên màn hình máy tính cầm tay như sau:



Hệ phương trình vô nghiệm

Hệ phương trình có vô số nghiệm

3 Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 3y - 3z = -5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y - z = 2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 2x - y + z = -1 \\ -4x + 3y + z = 3. \end{cases}$

2 Ba bạn Nhân, Nghĩa và Phúc đi vào căng tin của trường. Nhân mua một li trà sữa, một li nước trái cây, hai cái bánh ngọt và trả 90 000 đồng. Nghĩa mua một li trà sữa, ba cái bánh ngọt và trả 50 000 đồng. Phúc mua một li trà sữa, hai li nước trái cây, ba cái bánh ngọt và trả 140 000 đồng. Gọi x, y, z lần lượt là giá tiền của một li trà sữa, một li nước trái cây và một cái bánh ngọt tại căng tin đó.

a) Lập các hệ thức thể hiện mối liên hệ giữa x, y và z.

b) Tìm giá tiền của một li trà sữa, một li nước trái cây và một cái bánh ngọt tại căng tin đó.

BÀI TẬP

1. Trong các hệ phương trình sau, hệ nào là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn? Mỗi bộ ba số $(-1; 2; 1)$, $(-1,5; 0,25; -1,25)$ có là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn đó không?

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -6 \\ -2x + y + 3z = 7 \\ 4x - y + 7z = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 4 \\ 3x + 2yz - z = 2 \\ x - 3y + 2z = -1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 4y - 3z = \dfrac{-1}{4} \\ 3x + 8y - 4z = \dfrac{5}{2} \\ 2x + 3y - 2z = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a) $\begin{cases} 2x+3y & = 4 \\ x-3y & = 2 \\ 2x+y-z = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+3y+2z=8 \\ 3x-y+z=4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+5z=-2 \\ 2x+y+4z=2 \\ x+2y-z=4. \end{cases}$

3. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x-5z=2 \\ 3x+y-4z=3 \\ -x+2y+z=-1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ 3x+y-2z=2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-2z=2 \\ 4x-7y-4z=4. \end{cases}$

4. Tìm phương trình của parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, biết:

a) Parabol (P) có trục đối xứng $x = 1$ và đi qua hai điểm $A(1; -4)$, $B(2; -3)$;

b) Parabol (P) có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ và đi qua điểm $M(-1; 3)$.

5. Một đại lí bán ba loại gas A, B, C với giá bán mỗi bình gas lần lượt là 520 000 đồng, 480 000 đồng, 420 000 đồng. Sau một tháng, đại lí đã bán được 1 299 bình gas các loại với tổng doanh thu đạt 633 960 000 đồng. Biết rằng trong tháng đó, đại lí bán được số bình gas loại B bằng một nửa tổng số bình gas loại A và C. Tính số bình gas mỗi loại mà đại lí bán được trong tháng đó.

Bài 2. Ứng dụng hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

Ở cấp Trung học cơ sở, chúng ta đã quen với giải bài toán bằng cách lập phương trình (bậc nhất, bậc hai) hoặc hệ phương trình (bậc nhất hai ẩn).

Trong bài này, ta sẽ làm quen với cách giải một số bài toán thực tế trong nhiều lĩnh vực khác nhau bằng cách lập hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

1. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Trước khi xét một số ứng dụng trong các môn khoa học tự nhiên và trong kinh tế ở hai mục tiếp theo, trong mục này chúng ta làm quen với các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

Để giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình bậc nhất ba ẩn, ta thực hiện các bước sau:

***Bước 1*: Lập hệ phương trình**

Chọn ẩn là những đại lượng chưa biết.

Dựa trên ý nghĩa của các đại lượng chưa biết, đặt điều kiện cho ẩn.

Dựa vào dữ kiện của bài toán, lập hệ phương trình với các ẩn.

***Bước 2*: Giải hệ phương trình.**

***Bước 3*: Kiểm tra điều kiện của nghiệm và kết luận.**

Ví dụ 1

Giá vé vào xem một buổi biểu diễn xiếc gồm ba loại: 40 000 đồng dành cho trẻ em (dưới 6 tuổi), 60 000 đồng dành cho học sinh và 80 000 đồng dành cho người lớn. Tại buổi biểu diễn, 900 vé đã được bán ra và tổng số tiền thu được là 50 600 000 đồng. Người ta đã bán được bao nhiêu vé trẻ em, bao nhiêu vé học sinh và bao nhiêu vé người lớn cho buổi biểu diễn đó? Biết rằng số vé người lớn bằng một nửa số vé trẻ em và học sinh cộng lại.

Giải

Gọi x, y, z lần lượt là số vé trẻ em, vé học sinh và vé người lớn đã được bán ra ($x, y, z \in \mathbb{N}$).

Có 900 vé đã được bán ra, ta có

$$x + y + z = 900.$$

Tổng số tiền thu được trong buổi biểu diễn này là 50 600 000 đồng, ta có

$$40\,000x + 60\,000y + 80\,000z = 50\,600\,000$$

hay $2x + 3y + 4z = 2\,530$.

Số vé người lớn bằng một nửa số vé trẻ em và học sinh cộng lại, ta có

$$z = \frac{x+y}{2} \text{ hay } x + y - 2z = 0.$$

Từ đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 900 \\ 2x + 3y + 4z = 2\,530 \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Sử dụng máy tính cầm tay giải hệ phương trình, ta được: $x = 470$, $y = 130$, $z = 300$.

Vậy có 470 vé trẻ em, 130 vé học sinh và 300 vé người lớn đã được bán ra.

1 Ba vận động viên Hùng, Dũng và Mạnh tham gia thi đấu nội dung ba môn phối hợp: chạy, bơi và đạp xe, trong đó tốc độ trung bình của họ trên mỗi chặng đua được cho ở bảng dưới đây.

Vận động viên	**Tốc độ trung bình (km/h)**		
	Chạy	***Bơi***	***Đạp xe***
Hùng	12,5	3,6	48
Dũng	12	3,75	45
Mạnh	12,5	4	45

Biết tổng thời gian thi đấu ba môn phối hợp của Hùng là 1 giờ 1 phút 30 giây, của Dũng là 1 giờ 3 phút 40 giây và của Mạnh là 1 giờ 1 phút 55 giây. Tính cự li của mỗi chặng đua.

2. Ứng dụng trong giải bài toán Vật lí, Hoá học, Sinh học

Ví dụ 2

Ba tế bào A, B, C sau một số lần nguyên phân tạo ra 88 tế bào con. Biết số tế bào B tạo ra gấp đôi số tế bào A tạo ra. Số lần nguyên phân của tế bào B ít hơn số lần nguyên phân của tế bào C là hai lần. Tính số lần nguyên phân của mỗi tế bào, biết rằng một tế bào sau một lần nguyên phân sẽ tạo ra hai tế bào mới giống tế bào ban đầu.

Giải

Gọi x, y, z lần lượt là số lần nguyên phân của mỗi tế bào A, B, C ($x, y, z \in \mathbb{N}$).

Tổng các tế bào con là 88, ta có $2^x + 2^y + 2^z = 88$.

Số tế bào B tạo ra gấp đôi số tế bào A tạo ra, ta có $2^y = 2 \,.\, 2^x$.

Số lần nguyên phân của tế bào B ít hơn số lần nguyên phân của tế bào C là hai lần, ta có $y + 2 = z$.

Từ đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 88 \\ 2^y = 2.2^x \\ y + 2 = z \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 88 \\ 2.\,2^x - 2^y = 0 \\ 2^{y+2} = 2^z \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 88 \\ 2.2^x - 2^y = 0 \\ 4.2^y - 2^z = 0. \end{cases}$$

Đặt $a = 2^x$, $b = 2^y$, $c = 2^z$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b + c = 88 \\ 2a - b = 0 \\ 4b - c = 0. \end{cases}$

Sử dụng máy tính cầm tay giải hệ phương trình, ta được $a = 8$, $b = 16$, $c = 64$.

Do đó $x = 3$, $y = 4$, $z = 6$.

Vậy số lần nguyên phân của ba tế bào A, B, C lần lượt là 3, 4, 6.

Ví dụ 3

Để nghiên cứu tác dụng của ba loại vitamin kết hợp với nhau, một nhà sinh vật học muốn mỗi con thỏ trong phòng thí nghiệm có chế độ ăn uống hằng ngày chứa chính xác 15 mg thiamine (B1), 40 mg riboflavin (B2) và 10 mg niacin (B3). Có ba loại thức ăn với hàm lượng vitamin được cho bởi bảng dưới đây:

Loại vitamin	**Hàm lượng vitamin (miligam) trong 100 g thức ăn**		
	Loại *I*	**Loại *II***	**Loại *III***
Thiamine (B1)	3	2	2
Riboflavin (B2)	7	5	7
Niacin (B3)	2	2	1

Mỗi con thỏ cần phải được cung cấp bao nhiêu gam thức ăn mỗi loại trong một ngày?

Giải

Gọi x, y, z lần lượt là số gam thức ăn loại *I*, *II*, *III* mà mỗi con thỏ ăn trong một ngày ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

Mỗi con thỏ có một chế độ ăn uống hằng ngày chứa chính xác 15 mg B1, ta có

$$0{,}03x + 0{,}02y + 0{,}02z = 15.$$

Mỗi con thỏ có một chế độ ăn uống hằng ngày chứa chính xác 40 mg B2, ta có

$$0{,}07x + 0{,}05y + 0{,}07z = 40.$$

Mỗi con thỏ có một chế độ ăn uống hằng ngày chứa chính xác 10 mg B3, ta có

$$0{,}02x + 0{,}02y + 0{,}01z = 10.$$

Từ đó, ta có hệ phương trình

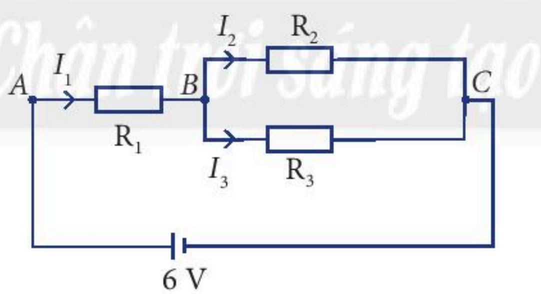
$$\begin{cases} 0{,}03x + 0{,}02y + 0{,}02z = 15 \\ 0{,}07x + 0{,}05y + 0{,}07z = 40 \\ 0{,}02x + 0{,}02y + 0{,}01z = 10. \end{cases}$$

Sử dụng máy tính cầm tay giải hệ phương trình, ta được: $x = 300$, $y = 100$, $z = 200$.

Vậy một ngày mỗi con thỏ cần được cung cấp 300 g thức ăn loại *I*, 100 g thức ăn loại *II* và 200 g thức ăn loại *III*.

Ví dụ 4

Cho sơ đồ mạch điện như Hình 1. Các điện trở có số đo lần lượt là $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$ và $R_3 = 3\ \Omega$. Tính các cường độ dòng điện I_1, I_2 và I_3.



Hình 1

Giải

Tổng cường độ dòng điện vào và ra tại điểm B bằng nhau nên ta có $I_1 = I_2 + I_3$.

Hiệu điện thế giữa hai điểm B và C được tính bởi:

$U_{BC} = I_2R_2 = 4I_2$ hoặc $U_{BC} = I_3R_3 = 3I_3$, nên ta có $4I_2 = 3I_3$.

Hiệu điện thế giữa hai điểm A và C được tính bởi:

$U_{AC} = I_1R_1 + I_3R_3 = 6I_1 + 3I_3$.

Mặt khác $U_{AC} = 6$, nên ta có $6I_1 + 3I_3 = 6$ hay $2I_1 + I_3 = 2$.

Từ đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 4I_2 - 3I_3 = 0 \\ 2I_1 + I_3 = 2. \end{cases}$$

Sử dụng máy tính cầm tay giải hệ phương trình, ta được $I_1 = \frac{7}{9}$A, $I_2 = \frac{1}{3}$A, $I_3 = \frac{4}{9}$A.

Ví dụ 5

Cân bằng phương trình phản ứng hoá học khi đốt cháy nhôm trong oxygen:

$$Al + O_2 \xrightarrow{t^o} Al_2O_3.$$

Giải

Giả sử x, y, z là ba số nguyên dương thoả mãn cân bằng phương trình phản ứng hoá học:

$$xAl + yO_2 \xrightarrow{t^o} zAl_2O_3.$$

Số nguyên tử nhôm ở hai vế bằng nhau, ta có $x = 2z$.

Số nguyên tử oxygen ở hai vế bằng nhau, ta có $2y = 3z$.

Từ đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x = 2z \\ 2y = 3z. \end{cases}$

Vì y là số nguyên dương nên ta chọn $z = 2n$, với n là số nguyên dương.

Hệ phương trình có vô số nghiệm dạng $(4n; 3n; 2n)$, trong đó n là số nguyên dương.

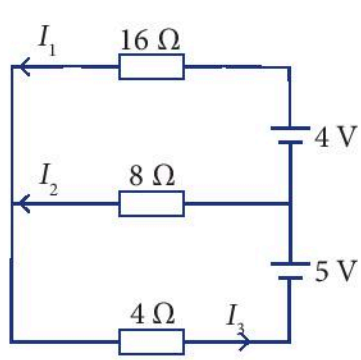
Để phương trình có hệ số đơn giản, ta chọn $n = 1$, ta có $x = 4$, $y = 3$ và $z = 2$.

Vậy phương trình cân bằng phản ứng hoá học là $4Al + 3O_2 \xrightarrow{t^o} 2Al_2O_3$.

2 Một nhà hoá học có ba dung dịch cùng một loại acid nhưng với nồng độ khác nhau là 10%, 20% và 40%. Trong một thí nghiệm, để tạo ra 100 m*l* dung dịch nồng độ 18%, nhà hoá học đã sử dụng lượng dung dịch nồng độ 10% gấp bốn lần lượng dung dịch nồng độ 40%. Tính số mililít dung dịch mỗi loại mà nhà hoá học đó đã sử dụng trong thí nghiệm này.

1 Ba loại tế bào A, B, C thực hiện số lần nguyên phân lần lượt là 3, 4, 7 và tổng số tế bào con tạo ra là 480. Biết rằng khi chưa thực hiện nguyên phân, số tế bào loại B bằng tổng số tế bào loại A và loại C. Sau khi thực hiện nguyên phân, tổng số tế bào con loại A và loại C được tạo ra gấp năm lần số tế bào con loại B được tạo ra. Tính số tế bào con mỗi loại lúc ban đầu.

2 Cho sơ đồ mạch điện như Hình 2. Tính các cường độ dòng điện I_1, I_2 và I_3.



Hình 2

3. Ứng dụng trong giải bài toán kinh tế

Ví dụ 6

Một ông chủ trang trại có 24 ha đất canh tác dự định sử dụng để trồng khoai tây, bắp cải và su hào với chi phí đầu tư cho mỗi hecta lần lượt là 28 triệu đồng, 24 triệu đồng và 32 triệu đồng. Qua thăm dò thị trường, ông đã tính toán được diện tích đất trồng khoai tây cần gấp ba diện tích đất trồng bắp cải. Biết rằng ông có tổng nguồn vốn sử dụng để trồng ba loại cây trên là 688 triệu đồng. Tính diện tích đất cần sử dụng để trồng mỗi loại cây.

Giải

Gọi x, y, z lần lượt là diện tích đất cần sử dụng để trồng khoai tây, bắp cải và su hào (đơn vị: hecta, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

Tổng diện tích đất sử dụng để trồng ba loại cây là 24 ha, ta có

$$x + y + z = 24.$$

Tổng nguồn vốn sử dụng để trồng ba loại cây là 688 triệu đồng, ta có

$$28x + 24y + 32z = 688 \text{ hay } 7x + 6y + 8z = 172.$$

Diện tích đất trồng khoai tây gấp ba diện tích đất trồng bắp cải, ta có

$$x = 3y \text{ hay } x - 3y = 0.$$

Từ đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ 7x + 6y + 8z = 172 \\ x - 3y = 0. \end{cases}$$

Sử dụng máy tính cầm tay giải hệ phương trình, ta được: $x = 12$, $y = 4$ và $z = 8$.

Vậy diện tích đất cần trồng khoai tây là 12 ha, trồng bắp cải là 4 ha và trồng su hào là 8 ha.

Ví dụ 7

Giả sử P_1, P_2, P_3 lần lượt là giá bán (gọi tắt là giá) mỗi kilôgam thịt lợn, thịt bò và thịt gà trên thị trường. Qua khảo sát, người ta thấy rằng lượng cung (lượng sản phẩm được đưa vào thị trường để bán) của từng sản phẩm này phụ thuộc vào giá của nó theo công thức như sau:

Sản phẩm	Thịt lợn	Thịt bò	Thịt gà
Lượng cung	$Q_{S_1} = -238 + 2P_1$	$Q_{S_2} = -247 + P_2$	$Q_{S_3} = -445 + 3P_3$

Qua khảo sát, người ta thấy lượng cầu (lượng sản phẩm mà người tiêu dùng có nhu cầu mua) của từng sản phẩm không chỉ phụ thuộc vào giá của sản phẩm đó mà còn phụ thuộc vào giá hai sản phẩm còn lại theo các công thức sau:

Sản phẩm	Thịt lợn	Thịt bò	Thịt gà
Lượng cầu	$Q_{D_1} = 22 - P_1 + P_2 - P_3$	$Q_{D_2} = 283 + P_1 - P_2 - P_3$	$Q_{D_3} = 25 - P_1 + P_2 - P_3$

Ta nói *thị trường cân bằng* nếu lượng cung mỗi sản phẩm bằng lượng cầu của sản phẩm đó, tức là: $Q_{S_1} = Q_{D_1}$, $Q_{S_2} = Q_{D_2}$ và $Q_{S_3} = Q_{D_3}$.

Giá của mỗi sản phẩm trên bằng bao nhiêu thì thị trường cân bằng?

Giải

Để tìm giá của mỗi kilôgam thịt lợn, thịt bò và thịt gà, ta xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \\ Q_{S_3} = Q_{D_3} \end{cases} \text{ tức là } \begin{cases} -238 + 2P_1 = 22 - P_1 + P_2 - P_3 \\ -247 + P_2 = 283 + P_1 - P_2 - P_3 \\ -445 + 3P_3 = 25 - P_1 + P_2 - P_3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 3P_1 - P_2 + P_3 = 260 \\ -P_1 + 2P_2 + P_3 = 530 \\ P_1 - P_2 + 4P_3 = 470. \end{cases}$$

Sử dụng máy tính cầm tay giải hệ phương trình, ta được: $P_1 = 120, P_2 = 250, P_3 = 150$.

Vậy thị trường cân bằng khi giá bán của mỗi kilôgam thịt lợn, thịt bò, thị gà lần lượt là 120 nghìn đồng, 250 nghìn đồng, 150 nghìn đồng.

Nhận xét: Trên thị trường, lượng cung một sản phẩm phụ thuộc vào giá bán sản phẩm đó (còn gọi là giá thị trường). Giá thị trường của sản phẩm đó càng cao thì lượng cung sản phẩm đó càng lớn (do nhà sản xuất và nhà phân phối càng có động lực sản xuất và phân phối sản phẩm để thu được nhiều lợi nhuận). Chẳng hạn, ở Ví dụ 7 ta thấy lượng cung $Q_{S_1} = -238 + 2P_1$ của thịt lợn càng lớn nếu giá P_1 của mỗi kilôgam thịt lợn càng lớn.

Bên cạnh đó, lượng cầu của một sản phẩm cũng phụ thuộc vào giá thị trường của sản phẩm đó (giá càng cao thì lượng cầu càng giảm).

Mặt khác, lượng cung và lượng cầu của mỗi sản phẩm còn phụ thuộc giá thị trường của những sản phẩm khác. Chẳng hạn, nếu giá của thịt bò hoặc giá của thịt gà thấp hơn so với giá của thịt lợn thì người tiêu dùng có xu hướng mua thịt bò hoặc thịt gà thay vì mua thịt lợn. Như trong Ví dụ 7 ta thấy, lượng cầu của thịt lợn phụ thuộc vào giá P_1 của thịt lợn, giá P_2 của thịt bò và giá P_3 của thịt gà.

Ví dụ 8

Một nhà đầu tư dự định sử dụng 1 tỉ đồng để đầu tư vào ba loại trái phiếu: ngắn hạn, trung hạn và dài hạn. Biết lãi suất của ba loại trái phiếu ngắn hạn, trung hạn, dài hạn mỗi năm lần lượt là 3%, 4%, 5%. Người đó dự định sẽ đầu tư số tiền vào trái phiếu trung hạn gấp đôi số tiền đầu tư vào trái phiếu ngắn hạn với mong muốn nhận được tổng tiền lãi trong năm đầu tiên là 4,2% số tiền đầu tư. Người đó nên đầu tư vào mỗi loại trái phiếu bao nhiêu tiền để đáp ứng được mong muốn của mình?

Giải

Gọi x, y và z lần lượt là số tiền đầu tư vào ba loại trái phiếu ngắn hạn, trung hạn và dài hạn (đơn vị: tỉ đồng, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

Tổng số tiền dự định đầu tư là 1 tỉ đồng, ta có

$$x + y + z = 1.$$

Lãi suất của ba loại trái phiếu ngắn hạn, trung hạn, dài hạn mỗi năm lần lượt là 3%, 4%, 5% và mong muốn nhận được tổng tiền lãi trong năm đầu tiên là 4,2% số tiền đầu tư, ta có

$$0{,}03x + 0{,}04y + 0{,}05z = 0{,}042 \ . \ 1 \text{ hay } 3x + 4y + 5z = 4{,}2.$$

Số tiền đầu tư vào trái phiếu trung hạn gấp đôi số tiền đầu tư vào trái phiếu ngắn hạn, ta có

$$y = 2x \text{ hay } 2x - y = 0.$$

Từ đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 4{,}2 \\ 2x - y = 0. \end{cases}$$

Sử dụng máy tính cầm tay giải hệ phương trình, ta được: $x = 0{,}2$; $y = 0{,}4$; $z = 0{,}4$.

Vậy nhà đầu tư nên đầu tư 200 triệu đồng vào trái phiếu ngắn hạn, 400 triệu đồng vào trái phiếu trung hạn và 400 triệu đồng vào trái phiếu dài hạn.

3 Xét thị trường chè, cà phê và ca cao. Gọi x, y và z lần lượt là giá của 1 kg chè, 1 kg cà phê và 1 kg ca cao (đơn vị: nghìn đồng, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Các lượng cung và lượng cầu của mỗi sản phẩm được cho như bảng sau:

Sản phẩm	Lượng cung	Lượng cầu
Chè	$Q_{S_1} = -380 + x + y$	$Q_{D_1} = 350 - x - z$
Cà phê	$Q_{S_2} = -405 + x + 2y - z$	$Q_{D_2} = 760 - 2y - z$
Ca cao	$Q_{S_3} = -350 - 2x + 3z$	$Q_{D_3} = 145 - x + y - z$

Tìm giá của mỗi kilôgam chè, cà phê và ca cao để thị trường cân bằng.

4 Để mở rộng sản suất, một công ty đã vay 800 triệu đồng từ ba ngân hàng A, B và C, với lãi suất cho vay theo năm lần lượt là 6%, 8% và 9%. Biết rằng tổng số tiền lãi năm đầu tiên công ty phải trả cho ba ngân hàng là 60 triệu đồng và số tiền lãi công ty trả cho hai ngân hàng A và C là bằng nhau. Tính số tiền công ty đã vay từ mỗi ngân hàng.

5 Bác Nhân có 650 triệu đồng dự định gửi tiết kiệm vào các ngân hàng A, B và C. Biết các ngân hàng A, B, C trả lãi suất lần lượt là 8%/năm, 7,5%/năm và 7%/năm. Để phù hợp với nhu cầu, bác Nhân mong muốn sau một năm, tổng số tiền lãi bác nhận được là 50 triệu đồng và số tiền bác gửi vào ngân hàng B lớn hơn số tiền gửi vào ngân hàng C là 100 triệu đồng. Hãy tính giúp bác Nhân số tiền gửi vào mỗi ngân hàng sao cho đáp ứng được yêu cầu của bác.

3 Một công ty sản xuất ba loại phân bón:

– Loại A có chứa 18% nitơ, 4% photphat và 5% kali;

– Loại B có chứa 20% nitơ, 4% photphat và 4% kali;

– Loại C có chứa 24% nitơ, 3% photphat và 6% kali.

Công ty sản xuất bao nhiêu kilôgam mỗi loại phân bón trên? Biết rằng công ty đã dùng hết 26 400 kg nitơ, 4 900 kg photphat, 6 200 kg kali.

BÀI TẬP

1. Một đại lí bán ba mẫu máy điều hoà A, B và C, với giá bán mỗi chiếc theo từng mẫu lần lượt là 8 triệu đồng, 10 triệu đồng và 12 triệu đồng. Tháng trước, đại lí bán được 100 chiếc gồm cả ba mẫu và thu được số tiền là 980 triệu đồng. Tính số lượng máy điều hoà mỗi mẫu đại lí bán được trong tháng trước, biết rằng số tiền thu được từ bán máy điều hoà mẫu A và mẫu C là bằng nhau.

2. Nhân dịp kỉ niệm ngày thành lập Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh, một trường Trung học phổ thông đã tổ chức cho học sinh tham gia các trò chơi. Ban tổ chức đã chọn 100 bạn và chia thành ba nhóm A, B, C để tham gia trò chơi thứ nhất. Sau khi trò chơi kết thúc, ban tổ chức chuyển $\frac{1}{3}$ số bạn ở nhóm A sang nhóm B; $\frac{1}{2}$ số bạn ở nhóm B sang nhóm C; số bạn chuyển từ nhóm C sang nhóm A và B đều bằng $\frac{1}{3}$ số bạn ở nhóm C ban đầu. Tuy nhiên, người ta nhận thấy số bạn ở mỗi nhóm là không đổi qua hai trò chơi. Ban tổ chức đã chia mỗi nhóm bao nhiêu bạn?

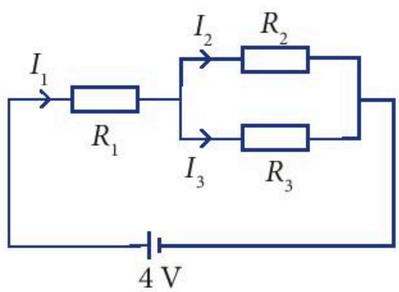
3. Một cửa hàng giải khát chỉ phục vụ ba loại sinh tố: xoài, bơ và mãng cầu. Để pha mỗi li (cốc) sinh tố này đều cần dùng đến sữa đặc, sữa tươi và sữa chua với công thức cho ở bảng sau.

Sinh tố (li)	Sữa đặc (ml)	Sữa tươi (ml)	Sữa chua (ml)
Xoài	20	100	30
Bơ	10	120	20
Mãng cầu	20	100	20

Ngày hôm qua cửa hàng đã dùng hết 2 l sữa đặc; 12,8 l sữa tươi và 2,9 l sữa chua. Cửa hàng đã bán được bao nhiêu li sinh tố mỗi loại trong ngày hôm qua?

4. Ba tế bào A, B, C sau một số lần nguyên phân tạo ra 168 tế bào con. Biết số tế bào A tạo ra gấp bốn lần số tế bào B tạo ra và số lần nguyên phân của tế bào C nhiều hơn số lần nguyên phân của tế bào B là bốn lần. Tính số lần nguyên phân của mỗi tế bào.

5. Cho sơ đồ mạch điện như Hình 3. Biết $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$ và $R_3 = 8\ \Omega$. Tìm các cường độ dòng điện I_1, I_2 và I_3.



Hình 3

6. Cân bằng phương trình phản ứng khi đốt cháy khí methane trong oxygen:

$$CH_4 + O_2 \xrightarrow{t^o} CO_2 + H_2O.$$

7. Một nhà máy có ba bộ phận cắt, may, đóng gói để sản xuất ba loại sản phẩm: áo thun, áo sơ mi, áo khoác. Thời gian (tính bằng phút) của mỗi bộ phận để sản xuất 10 cái áo mỗi loại được thể hiện trong bảng sau:

Bộ phận	Thời gian (tính bằng phút) để sản xuất 10 cái		
	Áo thun	Áo sơ mi	Áo khoác
Cắt	9	12	15
May	22	24	28
Đóng gói	6	8	8

Các bộ phận cắt, may và đóng gói có tối đa 80, 160 và 48 giờ lao động tương ứng mỗi ngày. Hãy lập kế hoạch sản xuất để nhà máy hoạt động hết công suất.

8. Bà Hà có 1 tỉ đồng để đầu tư vào cổ phiếu, trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng. Cổ phiếu sinh lợi nhuận 12%/năm, trong khi trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng cho lãi suất lần lượt là 8%/năm và 4%/năm. Bà Hà đã quy định rằng số tiền gửi tiết kiệm ngân hàng phải bằng tổng của 20% số tiền đầu tư vào cổ phiếu và 10% số tiền đầu tư vào trái phiếu. Bà Hà nên phân bổ nguồn vốn của mình như thế nào để nhận được 100 triệu đồng tiền lãi từ các khoản đầu tư đó trong năm đầu tiên?

9. Trên thị trường có ba loại sản phẩm A, B, C với giá mỗi tấn sản phẩm tương ứng là x, y, z (đơn vị: triệu đồng, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Lượng cung và lượng cầu của mỗi sản phẩm được cho trong bảng dưới đây:

Sản phẩm	Lượng cung	Lượng cầu
A	$Q_{S_A} = 4x - y - z - 5$	$Q_{D_A} = -2x + y + z + 9$
B	$Q_{S_B} = -x + 4y - z - 5$	$Q_{D_B} = x - 2y + z + 3$
C	$Q_{S_C} = -x - y + 4z - 1$	$Q_{D_C} = x + y - 2z - 1$

Tìm giá bán của mỗi sản phẩm để thị trường cân bằng.

10. Vé vào xem một vở kịch có ba mức giá khác nhau tuỳ theo khu vực ngồi trong nhà hát. Số lượng vé bán ra và doanh thu của ba suất diễn được cho bởi bảng sau:

Suất diễn	Số vé bán được			Doanh thu (triệu đồng)
	Khu vực 1	Khu vực 2	Khu vực 3	
10h00 – 12h00	210	152	125	212,7
15h00 – 17h00	225	165	118	224,4
20h00 – 22h00	254	186	130	252,2

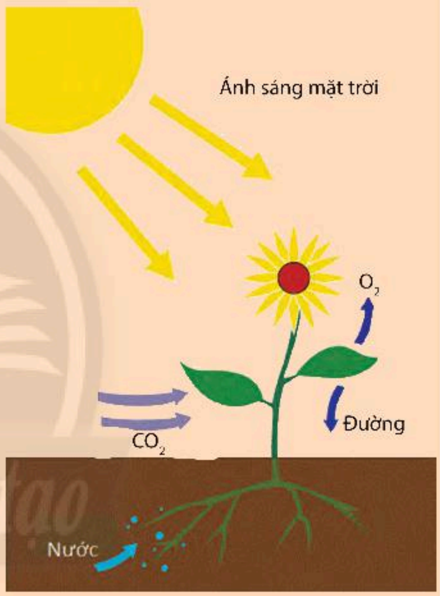
Tìm giá vé ứng với mỗi khu vực ngồi trong nhà hát.

Bạn có biết?

Quá trình quang hợp của thực vật

Quang hợp là quá trình trao đổi chất và chuyển hoá năng lượng thường diễn ra ở thực vật. Nhờ có chất diệp lục, cây xanh sẽ hấp thụ năng lượng từ ánh sáng mặt trời, để chuyển hoá nước và khí carbon dioxide (CO_2) nó hút được hình thành nên đường và đồng thời cũng sẽ nhả ra khí oxygen (O_2). Khí O_2 có vai trò rất quan trọng trong quá trình duy trì sự sống của con người. Có thể nói, quang hợp chính là chuỗi phản ứng hoá học quan trọng không thể thiếu. Nó tạo ra năng lượng cho sự sống; bù đắp lại những chất hữu cơ đã bị sử dụng trong quá trình sống, giúp cân bằng khí O_2 và CO_2 trong không khí. Trong tự nhiên, phản ứng quang hợp xảy ra theo sơ đồ sau:

$$CO_2 + H_2O \xrightarrow{t^o} C_6H_{12}O_6 + O_2.$$



Để cân bằng phương trình hoá học trên, ta làm như sau:

Gọi x, y, z, t lần lượt là hệ số cân bằng của CO_2, H_2O, $C_6H_{12}O_6$ và O_2 trong phương trình hoá học trên (x, y, z, t có ước chung lớn nhất bằng 1).

Do số nguyên tử cùng từng nguyên tố ở hai vế phải bằng nhau nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 6z \\ 2x + y = 6z + 2t \\ 2y = 12z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6z & (1) \\ 2x + y = 6z + 2t & (2) \\ y = 6z & (3) \end{cases}$$

Thay (1) và (3) vào (2) ta được $12z + 6z = 6z + 2t \Leftrightarrow t = 6z$.

Do x, y, z, t có ước chung lớn nhất bằng 1 nên ta chọn $z = 1 \Rightarrow x = y = t = 6$.

Vậy ta có phương trình hoá học: $6CO_2 + 6H_2O \xrightarrow{t^o} C_6H_{12}O_6 + 6O_2$.

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 1

1. Trong các hệ phương trình sau, hệ nào là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn? Mỗi bộ ba số $(-1; 0; 1)$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -1\right)$ có là nghiệm của các hệ phương trình bậc nhất ba ẩn đó không?

a) $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -x + 2y = 1 \\ 3y - 2z = -2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y + z = 2 \\ 8x + 3z = 1 \\ -6y + 2z = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y + zx = 2 \\ xy - y + 2z = 1 \\ x + 2y - 3yz = -2. \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -y + z = 2 \\ y + 2z = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y - 4z = 3 \\ 4x + 6y - z = 17 \\ x + 2y = 5; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - y - z = 4 \\ x + 5y + 5z = -1. \end{cases}$

3. Tìm phương trình của parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, biết:

a) Parabol (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x = -2$; $x = 1$ và đi qua điểm $M(-1; 3)$;

b) Parabol (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = -2$ và hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 tại $x = 2$.

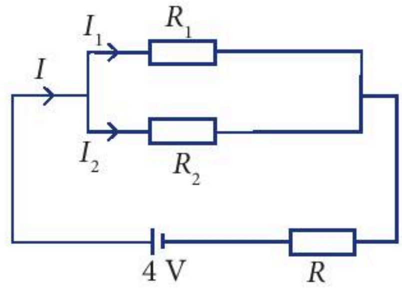
4. Một viên lam ngọc và hai viên hoàng ngọc trị giá gấp 3 lần một viên ngọc bích. Còn bảy viên lam ngọc và một viên hoàng ngọc trị giá gấp 8 lần một viên ngọc bích. Biết giá tiền của bộ ba viên ngọc này là 270 triệu đồng. Tính giá tiền mỗi viên ngọc.

5. Bốn ngư dân góp vốn mua chung một chiếc thuyền. Số tiền người đầu tiên đóng góp bằng một nửa tổng số tiền của những người còn lại. Người thứ hai đóng góp bằng $\frac{1}{3}$ tổng số tiền của những người còn lại. Người thứ ba đóng góp bằng $\frac{1}{4}$ tổng số tiền của những người còn lại. Người thứ tư đóng góp 130 triệu đồng. Chiếc thuyền này được mua giá bao nhiêu?

6. Một quỹ đầu tư dự kiến dành khoản tiền 1,2 tỉ đồng để đầu tư vào cổ phiếu. Để thấy được mức độ rủi ro, các cổ phiếu được phân thành ba loại: rủi ro cao, rủi ro trung bình và rủi ro thấp. Ban Giám đốc của quỹ ước tính các cổ phiếu rủi ro cao, rủi ro trung bình và rủi ro thấp sẽ có lợi nhuận hằng năm lần lượt là 15%, 10% và 6%. Nếu đặt ra mục tiêu đầu tư có lợi nhuận trung bình là 9% / năm trên tổng số vốn đầu tư, thì quỹ nên đầu tư bao nhiêu tiền vào mỗi loại cổ phiếu? Biết rằng, để an toàn, khoản đầu tư vào các cổ phiếu rủi ro thấp sẽ gấp đôi tổng các khoản đầu tư vào các cổ phiếu thuộc hai loại còn lại.

7. Ba loại tế bào A, B, C thực hiện số lần nguyên phân lần lượt là 3, 4, 5 và tổng số tế bào con tạo ra là 216. Biết rằng khi chưa thực hiện nguyên phân, số tế bào loại C bằng trung bình cộng số tế bào loại A và loại B. Sau khi thực hiện nguyên phân, tổng số tế bào con loại A và loại B được tạo ra ít hơn số tế bào con loại C được tạo ra là 40. Tính số tế bào con mỗi loại lúc ban đầu.

8. Cho sơ đồ mạch điện như Hình 1. Biết rằng $R = R_1 = R_2 = 5\Omega$. Hãy tính các cường độ dòng điện I, I_1 và I_2.



Hình 1

9. Cho A, B và C là ba dung dịch cùng loại acid có nồng độ khác nhau. Biết rằng nếu trộn ba dung dịch mỗi loại 100 m*l* thì được dung dịch nồng độ 0,4 M (mol/lít); nếu trộn 100 m*l* dung dịch A với 200 m*l* dung dịch B thì được dung dịch nồng độ 0,6 M; nếu trộn 100 m*l* dung dịch B với 200 m*l* dung dịch C thì được dung dịch nồng độ 0,3 M. Mỗi dung dịch A, B và C có nồng độ bao nhiêu?

10. Xăng sinh học E5 là hỗn hợp xăng không chì truyền thống và cồn sinh học (bio – ethanol). Trong loại xăng này chứa 5% cồn sinh học. Khi động cơ đốt cháy lượng cồn trên thì xảy ra phản ứng hoá học

$$C_2H_6O + O_2 \xrightarrow{t^o} CO_2 + H_2O.$$

Cân bằng phương trình hoá học trên.

11. Trên thị trường hàng hoá có ba loại sản phẩm A, B, C với giá mỗi tấn tương ứng là x, y, z (đơn vị: triệu đồng, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Lượng cung và lượng cầu của mỗi sản phẩm được cho trong bảng dưới đây:

Sản phẩm	Lượng cung	Lượng cầu
A	$Q_{S_A} = -60 + 4x - 2z$	$Q_{D_A} = 137 - 3x + y$
B	$Q_{S_B} = -30 - x + 5y - z$	$Q_{D_B} = 131 + x - 4y + z$
C	$Q_{S_C} = -30 - 2x + 3z$	$Q_{D_C} = 157 + y - 2z$

Tìm giá của mỗi sản phẩm để thị trường cân bằng.

12. Giải bài toán cổ sau:

Trăm trâu, trăm cỏ
Trâu đứng ăn năm
Trâu nằm ăn ba
Lụ khụ trâu già
Ba con một bó

Hỏi có bao nhiêu con trâu đứng, trâu nằm, trâu già?

Chuyên đề 2

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC VÀ NHỊ THỨC NEWTON

Chuyên đề này có hai nội dung trọng tâm.

Đầu tiên, chúng ta sẽ đi tìm hiểu về phương pháp quy nạp toán học, một công cụ quan trọng và hiệu quả của toán học. Chúng ta làm quen và thực hành sử dụng phương pháp này để chứng minh nhiều loại mệnh đề toán học khác nhau.

Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu sâu hơn và đầy đủ hơn về công thức nhị thức Newton và tam giác Pascal, cũng như thực hành và vận dụng chúng trong giải toán.

Sau chuyên đề này, bạn có thể:

- Sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh nhiều mệnh đề toán học khác nhau.
- Sử dụng công thức nhị thức Newton và tam giác Pascal để khai triển các biểu thức dạng $(a+b)^n$; vận dụng công thức khai triển giải một số bài toán liên quan.

Bài 1. Phương pháp quy nạp toán học

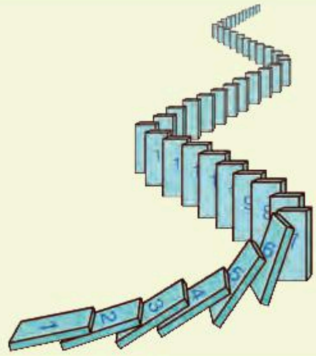
Từ khoá: Quy nạp toán học; Giả thiết quy nạp.

Trong một trò chơi domino, các quân domino được xếp theo thứ tự từ quân đầu tiên đến quân cuối cùng. Biết rằng xảy ra hai điều sau:

1) Quân domino đầu tiên đổ;

2) Nếu quân thứ k đổ thì quân thứ $k + 1$ đổ.

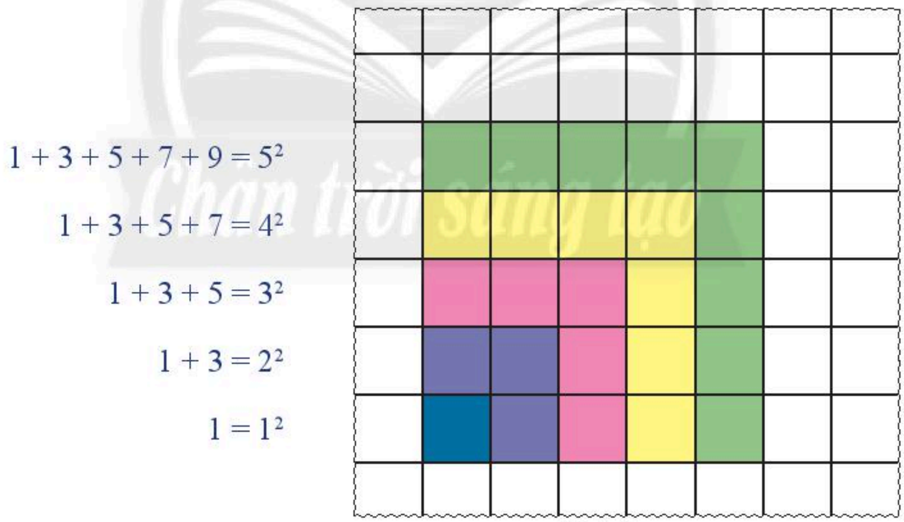
Có thể kết luận rằng tất cả các quân domino đều đổ không? Hãy giải thích.



Trò chơi domino như trên là hình ảnh mô phỏng của một nguyên lí toán học quan trọng mà ta sẽ tìm hiểu trong bài này.

1. Phương pháp quy nạp toán học

Bằng cách tô màu trên lưới ô vuông như hình dưới đây,



Hình 1

một học sinh phát hiện ra công thức sau:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \qquad (1)$$

a) Hãy chỉ ra công thức (1) đúng với $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Từ việc tô màu trên lưới ô vuông như Hình 1, bạn học sinh khẳng định rằng công thức (1) chắc chắn đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$. Khẳng định như vậy đã thuyết phục chưa? Tại sao?

Với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$, công thức (1) là một mệnh đề toán học (mệnh đề). Ta nói mệnh đề này phụ thuộc số tự nhiên $n \geq 1$.

Mỗi lần tô thêm một hàng và cột những ô vuông, bạn học sinh đã kiểm nghiệm công thức (1) thêm một trường hợp của n. Tuy nhiên, bởi tập hợp $\mathbb{N}^*$ là vô hạn nên cách làm đó không thể chứng tỏ công thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Để đạt được điều này, ta cần dùng suy luận.

Nguyên lí quy nạp toán học cho ta một phương pháp suy luận mạnh mẽ và hiệu quả để chứng minh nhiều mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên.

Nguyên lí quy nạp toán học

Giả sử với mỗi số tự nhiên $n \geq 1, P(n)$ là một mệnh đề. Giả sử hai điều kiện sau thoả mãn:

1) $P(1)$ đúng;

2) Với mọi số tự nhiên $k \geq 1$, nếu $P(k)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng.

Khi đó, $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Để chứng minh một mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta cần thực hiện hai bước:

Bước 1. Chỉ ra mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2. Giả sử mệnh đề đúng với số tự nhiên $n = k \geq 1$ (gọi là ***giả thiết quy nạp***), chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Từ đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, ta kết luận mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 1

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh công thức (1) trong đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

Bước 1. Với $n = 1$, công thức (1) trở thành $1 = 1^2$.

Đây là mệnh đề đúng. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Bước 2. Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là ta có

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k-1) = k^2. \qquad \textit{(giả thiết quy nạp)}$$

Ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần chứng minh

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2.$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) &= [1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k-1)] + (2k+1) \\ &= k^2 + (2k+1) \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý: Đôi khi, ta cần chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$, với n_0 là số tự nhiên nào đó. Khi đó, trong chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học, ở Bước 1 ta chỉ ra mệnh đề đúng với $n = n_0$ và ở Bước 2 ta giả thiết mệnh đề đúng với $n = k \geq n_0$.

Ví dụ 2

Chứng minh rằng bất đẳng thức $2^n > n^2$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 5$.

Giải

Bước 1. Với $n = 5$, ta có $2^n = 2^5 = 32$ và $n^2 = 5^2 = 25$. Vì $32 > 25$ nên bất đẳng thức đúng với $n = 5$.

Bước 2. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 5$, nghĩa là có

$$2^k > k^2.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần chứng minh:

$$2^{k+1} > (k+1)^2.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, với lưu ý $k \geq 5$, ta có

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \,.\, 2^k \\ &> 2k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 5k = k^2 + 2k + 3k \\ &> k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 5$.

1 Chứng minh rằng đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2 Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$:

$$2^{n+1} > n^2 + n + 2.$$

2. Ứng dụng phương pháp quy nạp toán học

Phương pháp quy nạp toán học được sử dụng trong nhiều lĩnh vực toán học khác nhau (số học, đại số, hình học, giải tích, ...). Dưới đây, ta xét thêm một vài ứng dụng.

Ví dụ 3

Chứng minh rằng $3^{2n+2} - 8n - 9$ chia hết cho 64 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, xét mệnh đề $(3^{2n+2} - 8n - 9) \,\vdots\, 64$. Ta cần chứng minh mệnh đề này đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bước 1. Với $n = 1$, ta có

$$3^{2n+2} - 8n - 9 = 3^4 - 8 - 9 = 81 - 8 - 9 = 64 \vdots 64.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là có $(3^{2k+2} - 8k - 9) \vdots 64$.

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần chứng minh

$$[3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9] \vdots 64.$$

Ta có

$$3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 = 9 \,.\, 3^{2(k+1)} - 8k - 17 = 9[3^{2(k+1)} - 8k - 9] + 64(k+1).$$

Tổng này có số hạng đầu chia hết cho 64 (do giả thiết quy nạp) và số hạng thứ hai đương nhiên chia hết cho 64, nên nó chia hết cho 64. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 4

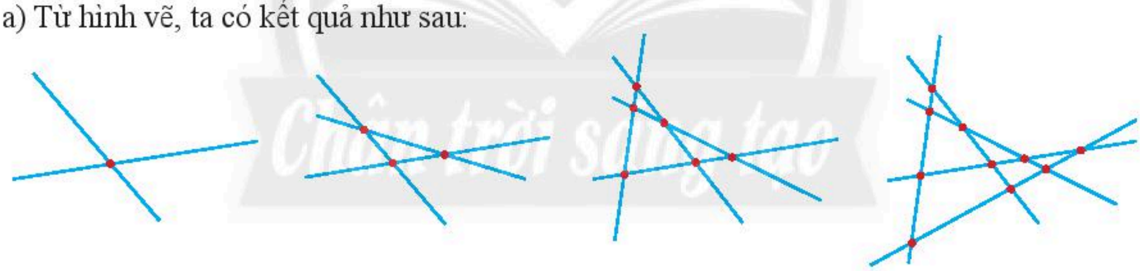
Trong mặt phẳng, cho n ($n \geq 2$) đường thẳng, trong đó không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Gọi S_n là số giao điểm của n đường thẳng này.

a) Tính S_2, S_3, S_4, S_5 ứng với trường hợp có 2, 3, 4, 5 đường thẳng.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính S_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

Giải

a) Từ hình vẽ, ta có kết quả như sau:



$S_2 = 1$ $\quad$ $S_3 = 3$ $\quad$ $S_4 = 6$ $\quad$ $S_5 = 10$

b) Ta có:

$S_2 = 1;$

$S_3 = 3 = S_2 + 2 = 1 + 2;$

$S_4 = 6 = S_3 + 3 = 1 + 2 + 3;$

$S_5 = 10 = S_4 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4.$

Từ đó, ta dự đoán rằng

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \qquad (2)$$

với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Ta sẽ chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bước 1. Với $n = 2$, ta có $S_2 = 1$ và $\frac{n(n-1)}{2} = 1$ nên công thức (2) đúng với $n = 2$.

Bước 2. Giả sử (2) đúng với $n = k \geq 2$, nghĩa là có $S_k = \frac{k(k-1)}{2}$. Ta chứng minh (2) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần chứng minh:

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)k}{2}.$$

Gọi đường thẳng thứ $k + 1$ là d. Theo giả thiết quy nạp, k đường thẳng đã cho cắt nhau tại $S_k = \frac{k(k-1)}{2}$ điểm. Mặt khác, do không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy nên đường thẳng d cắt k đường thẳng đó tại k điểm khác nhau và khác với S_k điểm kia. Do đó, số giao điểm của $k + 1$ đường thẳng này là

$$S_{k+1} = S_k + k = \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k^2 - k + 2k}{2} = \frac{(k+1)k}{2}.$$

Vậy công thức (2) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, công thức (2) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

3 Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

4 Chứng minh rằng đẳng thức sau đây đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

5 Chứng minh rằng trong mặt phẳng, n đường thẳng khác nhau cùng đi qua một điểm chia mặt phẳng thành $2n$ phần ($n \in \mathbb{N}^*$).

(**Công thức lãi kép**) Một khoản tiền A đồng (gọi là vốn) được gửi tiết kiệm có kì hạn ở một ngân hàng theo thể thức lãi kép (tiền lãi sau mỗi kì hạn nếu không rút ra thì được cộng vào vốn của kì kế tiếp). Giả sử lãi suất theo kì là r không đổi qua các kì hạn, người gửi không rút tiền vốn và lãi trong suốt các kì hạn đề cập sau đây. Gọi T_n là tổng số tiền vốn và lãi của người gửi sau kì hạn thứ n ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Tính T_1, T_2, T_3.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính T_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

BÀI TẬP

1. Chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + 3 \,.\, 4 + ... + n \,.\, (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

b) $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

2. Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $5^{2n} - 1$ chia hết cho 24;

b) $n^3 + 5n$ chia hết cho 6.

3. Chứng minh rằng nếu $x > -1$ thì $(1+x)^n \geq 1 + nx$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

5. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}.$$

6. Trong mặt phẳng, cho đa giác $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ có n cạnh ($n \geq 3$). Gọi S_n là tổng số đo các góc trong của đa giác.

a) Tính S_3, S_4, S_5 tương ứng với trường hợp đa giác là tam giác, tứ giác, ngũ giác.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính S_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

7. Hàng tháng, một người gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiết kiệm không đổi a đồng. Giả sử lãi suất hằng tháng là r không đổi và theo thể thức lãi kép (tiền lãi của tháng trước được cộng vào vốn của tháng kế tiếp). Gọi T_n ($n \geq 1$) là tổng tiền vốn và lãi của người đó có trong ngân hàng tại thời điểm ngay sau khi gửi vào khoản thứ $n + 1$.

a) Tính T_1, T_2, T_3.

b) Dự đoán công thức tính T_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

Gợi ý: Lưu ý công thức ở 

.

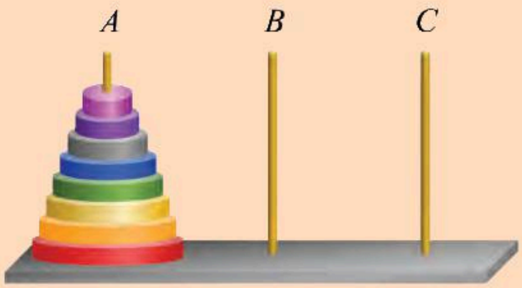
Bạn có biết?

Bài toán Tháp Hà Nội

Bài toán Tháp Hà Nội là một trò chơi toán học được nhà toán học người Pháp Édouard Lucas (1842 – 1891) phát hiện vào năm 1883. Ngày nay bài toán trở nên nổi tiếng trên thế giới, đặc biệt là trong lĩnh vực Khoa học máy tính.

Tháp Hà Nội trong trò chơi này gồm ba cột (A, B, C) và n đĩa có đường kính khác nhau, mỗi đĩa có lỗ ở giữa để có thể luồn vào các cột (xem Hình 2). Lúc đầu các đĩa đều ở cột A, theo thứ tự "nhỏ trên lớn dưới". Mục đích của trò chơi là chuyển tất cả các đĩa từ cột A sang cột C (cột B chỉ đóng vai trò trung chuyển) sao cho thoả mãn hai điều kiện:

1. Mỗi bước chỉ được chuyển một đĩa;
2. Các đĩa được chuyển qua lại giữa các cột, nhưng ở bất cứ thời điểm nào các đĩa trên mỗi cột đều "nhỏ trên lớn dưới".



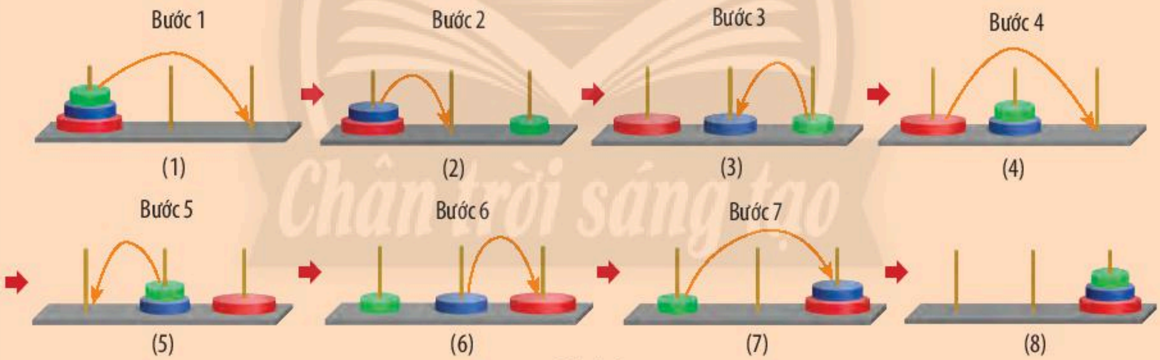
Hình 2. Mô hình Tháp Hà Nội với $n = 8$

Bài toán đặt ra là:

Làm thế nào để chuyển các đĩa từ cột A sang cột C?

Số bước ít nhất bằng bao nhiêu?

Gọi S_n là số bước ít nhất để chuyển n đĩa từ cột A sang cột C ($n \in \mathbb{N}^*$). Có thể dễ dàng chỉ ra $S_1 = 1$, $S_2 = 3$. Với $n = 3$, ta thực hiện các bước như Hình 3 dưới đây và nhận được $S_3 = 7$.



Hình 3

Giữa S_3 và S_2 có mối liên hệ. Thật vậy, để chuyển từ trạng thái đầu tiên đến trạng thái (4) ta cần S_2 bước chuyển (Bước 1, 2, 3). Tiếp đó, thực hiện một bước (Bước 4) để chuyển trạng thái (4) sang trạng thái (5). Tiếp theo, thực hiện S_2 bước (Bước 5, 6, 7) để chuyển trạng thái (5) đến trạng thái (8). Từ đó, ta có $S_3 = 2S_2 + 1$.

Tổng quát hoá quá trình trên, ta có thể tìm được mối liên hệ giữa S_n và S_{n-1} ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$). Từ đó, có thể dự đoán công thức tổng quát:

$$S_n = 2^n - 1 \ (n = 1, 2, 3, ...)$$

và chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bạn hãy thử thực hiện điều này nhé.

Các bạn có thể cùng chơi trò chơi thú vị và bổ ích này với các vật dụng sẵn có xung quanh như đồng xu, quyển sách, ... thay thế cho các đĩa ở trên.

Bài 2. Nhị thức Newton

Từ khoá: Nhị thức Newton; Tam giác Pascal.

Ta đã có công thức

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

trong trường hợp $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Công thức này có đúng với mọi số tự nhiên n không? Làm thế nào để kiểm tra?

1. Công thức nhị thức Newton

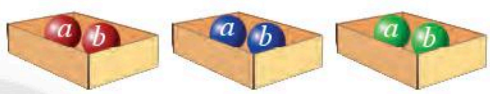
1 Có ba hộp, mỗi hộp đựng hai quả cầu được dán nhãn a và b (xem Hình 1). Lấy từ mỗi hộp một quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy để trong ba quả cầu lấy ra:

a) có 3 quả cầu dán nhãn b?

b) có 2 quả cầu dán nhãn b?

c) có 1 quả cầu dán nhãn b?

d) không có quả cầu nào dán nhãn b?



Hình 1

Bằng lập luận tương tự như 1, ta có thể sử dụng tổ hợp để tìm các hệ số của công thức khai triển

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Thật vậy, ta có khai triển

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= (aa+ab+ba+bb)(a+b)\\ &= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb\\ &= aaa+(aab+aba+baa)+(abb+bab+bba)+bbb\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Trong khai triển trên, để nhận được số hạng b^3, ta lấy số hạng b trong thừa số $(a+b)$ thứ nhất nhân với số hạng b trong thừa số $(a+b)$ thứ hai, rồi nhân với số hạng b trong thừa số $(a+b)$ thứ ba. Do đó, hệ số của b^3 bằng số cách chọn ba chữ b từ ba chữ b có trong ba thừa số $(a+b)$, tức bằng $C_3^3 = 1$.

Tiếp theo, xét số hạng $3ab^2$ hay tổng $abb + bab + bba$. Để nhận được mỗi số hạng của tổng này, ta lấy tích của hai số hạng b từ hai thừa số $(a+b)$, rồi nhân với số hạng a của thừa số $(a+b)$ còn lại. Do đó, hệ số của ab^2 bằng số cách chọn hai chữ b từ ba chữ b có trong ba thừa số $(a+b)$, tức bằng $C_3^2 = 3$.

Lập luận tương tự, ta được hệ số của a^2b bằng $C_3^1 = 3$, hệ số của a^3 bằng $C_3^0 = 1$.

Từ đó, ta nhận được

$$(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3.$$

Một cách tổng quát, với số tự nhiên bất kì $n \geq 1$, ta có thể mở rộng lập luận ở trên để tìm các hệ số trong khai triển biểu thức:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ \dots\ (a+b)}_{n \text{ thừa số}}.$$

Khai triển biểu thức này, ta nhận được các số hạng dạng $\alpha_k a^{n-k}b^k$ với α_k là hệ số, $k = 0, 1, \dots, n$. Hệ số α_k bằng số cách chọn k chữ b từ n chữ b có trong n thừa số $(a + b)$.

Nghĩa là, $\alpha_k = C_n^k$ $(0 \leq k \leq n)$.

Từ đó, ta nhận được kết quả:

Với mỗi số tự nhiên n, ta có:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \dots + C_n^ka^{n-k}b^k + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n. \qquad (1)$$

Công thức (1) được gọi là ***công thức nhị thức Newton***, gọi tắt là ***nhị thức Newton***.

Chú ý:

a) Trong cách viết vế phải của (1), số hạng $C_n^ka^{n-k}b^k$ $(0 \leq k \leq n)$ được gọi là ***số hạng tổng quát***.

b) Vế phải của (1) gồm $n + 1$ số hạng. Đi qua các số hạng từ trái sang phải, số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần, nhưng tổng của chúng không đổi và bằng n (quy ước $a^0 = b^0 = 1$).

Ví dụ 1

Hãy khai triển $(x + 2)^6$.

Giải

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

$$(x+2)^6 = C_6^0.x^6 + C_6^1.x^5.2 + C_6^2.x^4.2^2 + C_6^3.x^3.2^3 + C_6^4.x^2.2^4 + C_6^5.x.2^5 + C_6^6.2^6$$

$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64.$$

1 Hãy khai triển:

a) $(x - y)^6$; b) $(1 + x)^7$.

2. Tam giác Pascal

2 Từ các công thức khai triển:

$(a + b)^0 = 1$;

$(a + b)^1 = a + b$;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$;

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$;

các hệ số được viết thành bảng số như Hình 2 sau đây. Nếu sử dụng kí hiệu tổ hợp thì nhận được bảng như Hình 3.

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Hình 2

					C_0^0					
				C_1^0		C_1^1				
			C_2^0		C_2^1		C_2^2			
		C_3^0		C_3^1		C_3^2		C_3^3		
	C_4^0		C_4^1		C_4^2		C_4^3		C_4^4	
C_5^0		C_5^1		C_5^2		C_5^3		C_5^4		C_5^5

Hình 3

Từ các đẳng thức như

$$C_3^0 = C_3^3 = 1, \qquad C_4^1 = C_4^3 = 4,$$

$$C_3^0 + C_3^1 = C_4^1, \qquad C_4^2 + C_4^3 = C_5^3,$$

có thể dự đoán rằng, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad (0 \le k \le n); \qquad (2)$$

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k \qquad (1 \le k \le n). \qquad (3)$$

Hãy chứng minh các công thức trên.

***Gợi ý*:** Sử dụng công thức $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$.

Sử dụng công thức (3), với lưu ý rằng $C_n^0 = C_n^n = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, từ bảng số ở Hình 2, ta có thể viết tiếp lần lượt từng hàng số để tạo thành một bảng số, được gọi là ***tam giác Pascal*** (xem Hình 4).

$n=0$									1								
$n=1$								1		1							
$n=2$							1		2		1						
$n=3$						1		3		3		1					
$n=4$					1		4		6		4		1				
$n=5$				1		5		10		10		5		1			
$n=6$			1		6		15		20		15		6		1		
$n=7$		1		7		21		35		35		21		7		1	
...	...		...		...		...		...		...		...		...		...

Hình 4

Trong thực hành, tam giác Pascal giúp ta nhanh chóng xác định các hệ số khi khai triển nhị thức Newton.

Ví dụ 2

Sử dụng tam giác Pascal, hãy khai triển $(x-1)^7$.

Giải

Sử dụng tam giác Pascal, ta có:

$$\begin{aligned}(x-1)^7 &= x^7 + 7\,.\,x^6\,.\,(-1) + 21\,.\,x^5\,.\,(-1)^2 + 35\,.\,x^4\,.\,(-1)^3 \\ &\quad + 35\,.\,x^3\,.\,(-1)^4 + 21\,.\,x^2\,.\,(-1)^5 + 7\,.\,x\,.\,(-1)^6 + (-1)^7 \\ &= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1.\end{aligned}$$

2 Sử dụng tam giác Pascal, hãy khai triển:

a) $(2x+1)^6$;

b) $(x-y)^7$.

3. Vận dụng công thức nhị thức Newton

Công thức nhị thức Newton với các dạng mở rộng của nó có nhiều ứng dụng quan trọng trong Toán học. Dưới đây, ta xét thêm vài ví dụ đơn giản.

Ví dụ 3

Xác định hệ số của x^4y^6 trong khai triển của $(2x-y)^{10}$.

Giải

Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$\begin{aligned}(2x-y)^{10} &= C_{10}^0(2x)^{10} + C_{10}^1(2x)^9(-y) + \ldots + C_{10}^k(2x)^{10-k}(-y)^k + \ldots + C_{10}^{10}(-y)^{10} \\ &= 2^{10}C_{10}^0x^{10} - 2^9C_{10}^1x^9y + \ldots + (-1)^k2^{10-k}C_{10}^kx^{10-k}y^k + \ldots + C_{10}^{10}y^{10}.\end{aligned}$$

Số hạng chứa x^4y^6 ứng với giá trị $k = 6$. Do đó, hệ số của x^4y^6 là

$$(-1)^6.2^4.C_{10}^6 = 16.210 = 3360.$$

Ví dụ 4

Cho a là một số thực dương. Biết rằng trong khai triển của $(3x+a)^8$, hệ số của x^4 là 70. Hãy tìm giá trị của a.

Giải

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có

$$(3x+a)^8 = C_8^0.(3x)^8 + C_8^1.(3x)^7.a + \ldots + C_8^k.(3x)^{8-k}.a^k + \ldots + C_8^8a^8.$$

Số hạng chứa x^4 ứng với giá trị $k = 4$. Hệ số của số hạng này là $3^4.C_8^4.a^4 = 70\,.\,3^4\,.\,a^4$.

Theo giả thiết, ta có $70\,.\,3^4\,.\,a^4 = 70$ hay $a^4 = \dfrac{1}{3^4}$, suy ra $a = \dfrac{1}{3}$ (vì $a > 0$).

Vậy $a = \dfrac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5

Chứng minh rằng đẳng thức sau đây đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Giải

Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + ... + C_n^{n-1} x + C_n^n.$$

Thay $x = 1$ vào công thức trên, ta nhận được

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Đây là điều phải chứng minh.

Nhận xét: Từ công thức khai triển

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + ... + C_n^k x^{n-k} a^k + ... + C_n^{n-1} x a^{n-1} + C_n^n a^n,$$

với mỗi cách chọn giá trị của x và a, ta nhận được một hệ thức liên quan đến các hệ số tổ hợp C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n.

Ví dụ 6

Cho tập hợp $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ có n phần tử. Tập hợp A có bao nhiêu tập con?

Giải

Mỗi tập con của A có k $(1 \le k \le n)$ phần tử là một tổ hợp chập k của A. Do đó, số tập con như vậy bằng C_n^k. Mặt khác, có một tập con của A không có phần tử nào (tập rỗng), tức có $C_n^0 = 1$ tập con như vậy. Do đó, số tập con của A bằng

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n.$$

Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

Vậy tập hợp A có 2^n tập con.

3. Xác định hệ số của x^2 trong khai triển của $(3x + 2)^9$.

4. Biết rằng trong khai triển của $(x + a)^6$ với a là một số thực, hệ số của x^4 là 60. Tìm giá trị của a.

5. Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Trong hộp A có 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10. Người ta lấy một số quả cầu từ hộp A rồi cho vào hộp B. Có tất cả bao nhiêu cách lấy, tính cả trường hợp lấy 0 quả (tức là không lấy quả nào)?

BÀI TẬP

1. Khai triển biểu thức:

a) $(x - 2y)^6$; b) $(3x - 1)^5$.

2. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển của biểu thức $(2 - x)^{12}$.

3. Biết rằng a là một số thực khác 0 và trong khai triển của $(ax + 1)^6$, hệ số của x^4 gấp bốn lần hệ số của x^2. Tìm giá trị của a.

4. Biết rằng hệ số của x^2 trong khai triển của $(1 + 3x)^n$ là 90. Tìm giá trị của n.

5. Chứng minh công thức nhị thức Newton (công thức (1), trang 35) bằng phương pháp quy nạp toán học.

6. Biết rằng $(3x - 1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7$. Hãy tính:

a) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$; b) $a_0 + a_2 + a_4 + a_6$.

7. Một tập hợp có 12 phần tử thì có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

8. Từ 15 bút chì màu có màu khác nhau đôi một,

a) Có bao nhiêu cách chọn ra một số bút chì màu, tính cả trường hợp không chọn cái nào?

b) Có bao nhiêu cách chọn ra ít nhất 8 bút chì màu?

Bạn có biết?

Tên gọi Tam giác Pascal và Nhị thức Newton

Tam giác Pascal được đặt theo tên của nhà toán học, nhà vật lí học, nhà triết học tài ba người Pháp Blaise Pascal, sau công trình của ông công bố vào năm 1653. Thực ra, tam giác này cùng với công thức khai triển biểu thức $(a + b)^n$ với n là số tự nhiên đã được nghiên cứu trước đó bởi các nhà toán học Ấn Độ và Ba Tư ở thế kỉ X, hay bởi các nhà toán học Trung Hoa ở thế kỉ XI. Pascal có công lớn trong việc nghiên cứu một cách hệ thống các tính chất của tam giác này, cũng như phát hiện ra các mối liên hệ giữa chúng với lí thuyết xác suất.

Blaise Pascal
(1623 – 1662)

Isaac Newton
(1643 – 1727)

Công thức nhị thức Newton được đặt theo tên nhà toán học, nhà vật lí học vĩ đại người Anh Isaac Newton. Như trên đã nói, thực ra công thức này (trường hợp số mũ là số tự nhiên) đã được biết đến trước thời Newton hàng thế kỉ. Newton là người có công mở rộng công thức cho trường hợp số mũ n là số thực bất kì. Ông khám phá ra công thức đó vào năm 1664, nhưng đến năm 1676 mới công bố.

Công thức nhị thức Newton có nhiều ứng dụng quan trọng trong nhiều ngành toán học khác nhau như đại số, giải tích, lí thuyết xác suất, …

(*Theo Britannica*)

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 2

1. Chứng minh rằng các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

b) $1.4 + 2.7 + 3.10 + ... + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

c) $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

2. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $3^n - 1 - 2n$ chia hết cho 4;

b) $7^n - 4^n - 3^n$ chia hết cho 12.

3. Chứng minh rằng $8^n \geq n^3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Chứng minh rằng bất đẳng thức $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{n+1}{2}$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Với một bình rỗng có dung tích 2 *l*, một bạn học sinh thực hiện thí nghiệm theo các bước như sau:

Bước 1: Rót 1 *l* nước vào bình, rồi rót đi một nửa lượng nước trong bình.

Bước 2: Rót 1 *l* nước vào bình, rồi lại rót đi một nửa lượng nước trong bình.

Cứ như vậy, thực hiện các bước 3, 4, …

Kí hiệu a_n là lượng nước có trong bình sau bước n ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Tính a_1, a_2, a_3. Từ đó dự đoán công thức tính a_n với $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Chứng minh công thức trên bằng phương pháp quy nạp toán học.

6. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển của biểu thức sau:

a) $(1 - 3x)^8$;

b) $\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^7$.

7. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của $(2x + 3)(x - 2)^6$.

8. a) Tìm ba số hạng đầu tiên trong khai triển của $(1 + 2x)^6$, các số hạng được viết theo thứ tự số mũ của x tăng dần.

b) Sử dụng kết quả trên, hãy tính giá trị gần đúng của $1{,}02^6$.

9. Trong khai triển biểu thức $(3x - 4)^{15}$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

10. Chứng minh rằng các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^{n-1}C_n^{n-1} + 2^nC_n^n = 3^n$;

b) $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-1}$.

Chuyên đề 3

BA ĐƯỜNG CONIC VÀ ỨNG DỤNG

Chúng ta đã biết định nghĩa và phương trình chính tắc của ba đường conic, trong chuyên đề này ta sẽ cùng tìm hiểu chi tiết hơn về hình dạng và các yếu tố đặc trưng của ba đường conic như tâm sai, đường chuẩn, bán kính qua tiêu, đồng thời vận dụng các kiến thức này vào giải quyết một số vấn đề thực tiễn.

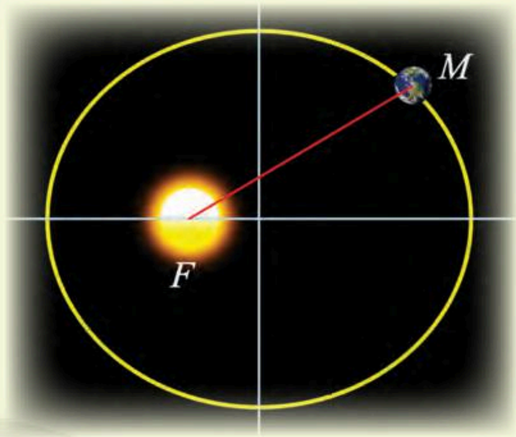
Sau chuyên đề này, bạn có thể:

– Xác định được các yếu tố đặc trưng của đường conic (đỉnh, tiêu điểm, tiêu cự, độ dài trục, bán kính qua tiêu, tâm sai, đường chuẩn) khi biết phương trình chính tắc của đường conic đó.
– Nhận biết được đường conic như là giao của mặt phẳng với mặt nón.
– Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với ba đường conic (ví dụ: giải thích một số hiện tượng trong quang học, xác định quỹ đạo chuyển động của các hành tinh trong hệ Mặt Trời, ...).

Bài 1. Elip

Từ khoá: Elip; Trục đối xứng; Tâm đối xứng; Bán kính qua tiêu; Tâm sai; Đường chuẩn.

Hành tinh M chuyển động quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo hình elip nhận tâm Mặt Trời làm tiêu điểm F. Làm thế nào để tính độ dài của đoạn FM khi biết phương trình chính tắc của elip?



1. Tính đối xứng của elip

Ôn tập về elip

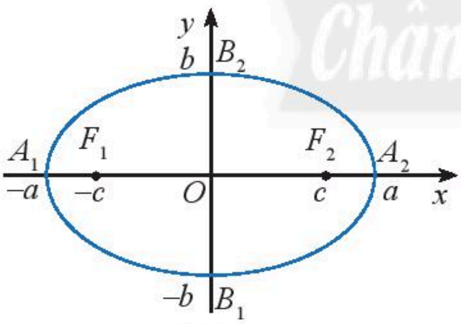
Ta đã biết elip (E) với phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$ (Hình 1) có các yếu tố:

– Bốn đỉnh là $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.

– Trục lớn là A_1A_2 có độ dài $2a$, trục nhỏ là B_1B_2 có độ dài $2b$.

– Hai tiêu điểm là $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ với $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

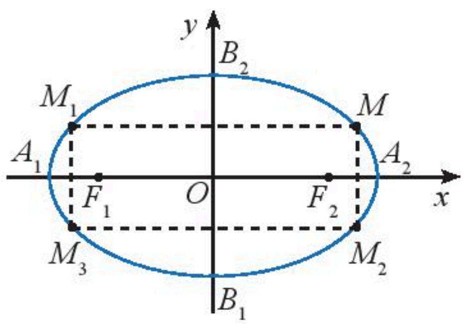
– Tiêu cự $2c$ là khoảng cách giữa hai tiêu điểm.



Hình 1

1 Cho elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$ và cho điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên (E).

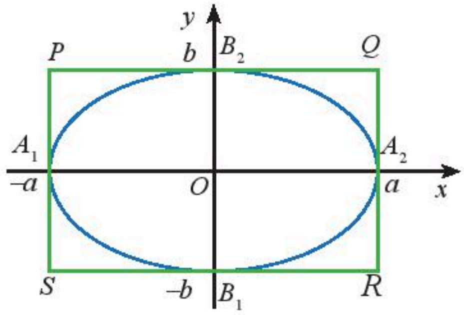
Các điểm $M_1(-x_0; y_0)$, $M_2(x_0; -y_0)$, $M_3(-x_0; -y_0)$ có thuộc (E) hay không?



Hình 2

Elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ nhận hai trục toạ độ làm ***trục đối xứng*** và nhận gốc toạ độ làm ***tâm đối xứng***.

Hình chữ nhật có các cạnh đi qua các đỉnh của elip và song song với các trục đối xứng được gọi là ***hình chữ nhật cơ sở*** của elip.



Hình 3

Ví dụ 1

Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0 < b < a)$ có bốn đỉnh là $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.

a) Xác định toạ độ bốn đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của (E).

b) Cho một điểm $M(x; y)$ bất kì trên (E). Chứng minh rằng:

$$b \le OM \le a; -a \le x \le a; -b \le y \le b.$$

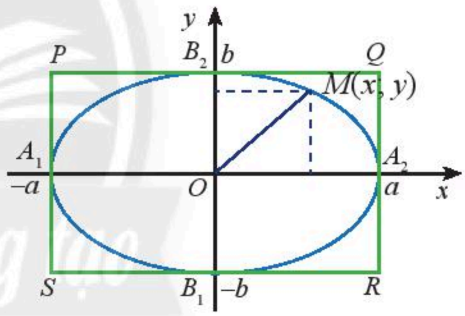
Giải

a) Gọi $PQRS$ là hình chữ nhật cơ sở của (E). Toạ độ bốn đỉnh của $PQRS$ là:

$$P(-a; b), Q(a; b), R(a; -b), S(-a; -b).$$

b) $M(x; y)$ là điểm bất kì trên (E) nên ta có:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Hình 4

Do $0 < b < a$ nên ta có $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2} \le 1$ và $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2} \ge 1$.

Suy ra $b^2 \le x^2 + y^2 \le a^2$, nên $b^2 \le OM^2 \le a^2$.

Vậy $b \le OM \le a$.

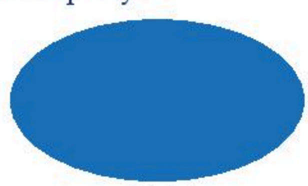
Từ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ta có $\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Rightarrow x^2 \le a^2 \Rightarrow -a \le x \le a$.

Tương tự, ta cũng có $\frac{y^2}{b^2} \le 1 \Rightarrow y^2 \le b^2 \Rightarrow -b \le y \le b$.

Chú ý: Mọi điểm thuộc elip đều nằm bên trong hình chữ nhật cơ sở.

1 Viết phương trình chính tắc của elip có kích thước của hình chữ nhật cơ sở là 8 và 6. Hãy xác định toạ độ đỉnh, tiêu điểm, tiêu cự, độ dài trục của elip này.

1 Hãy gấp một mảnh giấy hình elip (Hình 5) thành bốn phần chồng khít lên nhau.



Hình 5

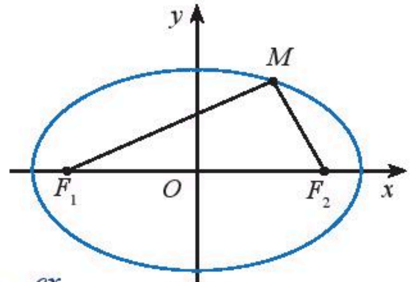
2. Bán kính qua tiêu

Cho điểm $M(x; y)$ nằm trên elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ có hai tiêu điểm là $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ (Hình 6).

a) Tính F_1M^2 và F_2M^2 theo x, y, c.

b) Chứng tỏ rằng: $F_1M^2 - F_2M^2 = 4cx$, $F_1M - F_2M = 2\frac{cx}{a}$.

c) Tính độ dài hai đoạn MF_1 và MF_2 theo a, c, x.



Hình 6

Cho điểm M trên elip (E). Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 được gọi là hai ***bán kính qua tiêu*** của điểm M.

Độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ trên elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ được tính theo công thức: $MF_1 = a+\frac{c}{a}x$; $MF_2 = a-\frac{c}{a}x$.

Chú ý: Vì $-a \le x \le a$ nên $a+\frac{c}{a}x>0$ và $a-\frac{c}{a}x>0$.

Ví dụ 2

Tính độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ trên elip (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Giải

Ta có $a = 5$; $b = 3$, suy ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$.

Độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ là:

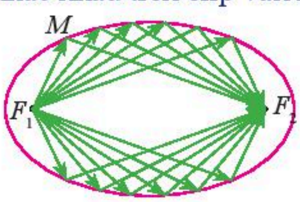
$$MF_1 = a+\frac{c}{a}x = 5+\frac{4}{5}x;\ MF_2 = a-\frac{c}{a}x = 5-\frac{4}{5}x.$$

a) Tính độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ trên elip (E): $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$.

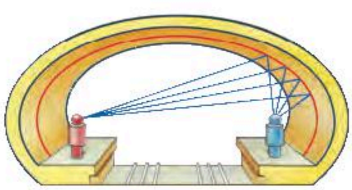
b) Tìm các điểm trên elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ có độ dài hai bán kính qua tiêu bằng nhau.

Người ta chứng minh được rằng ánh sáng hay âm thanh đi từ một tiêu điểm, khi đến một điểm M bất kì trên elip luôn luôn cho tia phản xạ đi qua tiêu điểm còn lại, nghĩa là đi theo các bán kính qua tiêu (Hình 7a).

Vòm xe điện ngầm của một thành phố có mặt cắt hình elip (Hình 7b). Hãy giải thích tại sao tiếng nói của một người phát ra từ một tiêu điểm bên này, mặc dù khi đi đến các điểm khác nhau trên elip vẫn luôn dội lại tới tiêu điểm bên kia cùng một lúc.



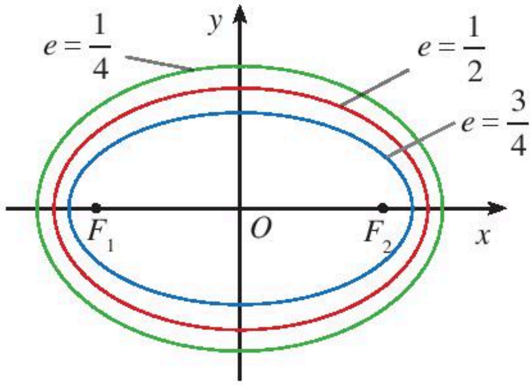
a)


b)

Hình 7

3. Tâm sai

Cho biết tỉ số $e = \frac{c}{a}$ của các elip lần lượt là $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ (Hình 8). Tính tỉ số $\frac{b}{a}$ theo e và nêu nhận xét về sự thay đổi của hình dạng elip gắn với hình chữ nhật cơ sở khi e thay đổi.



Hình 8

Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là ***tâm sai*** của elip và được kí hiệu là e, tức là $e = \frac{c}{a}$.

Với mọi elip, ta luôn có $0 < e < 1$.

Nhận xét: Ta có $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - e^2}$, do đó:

– Khi tâm sai e càng bé (tức là càng gần 0) thì b càng gần a và elip trông càng "béo".

– Khi tâm sai e càng lớn (tức là càng gần 1) thì tỉ số $\frac{b}{a}$ càng gần 0 và elip trông càng "dẹt".

Ví dụ 3

a) Tìm tâm sai của elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ và elip (E'): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$.

b) Không cần vẽ hình, theo bạn elip nào "béo" hơn?

Giải

a) Elip (E) có $a = 5$, $b = 4$, suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$, $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

Elip (E') có $a = 5$, $b = \sqrt{24}$, suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{5}$.

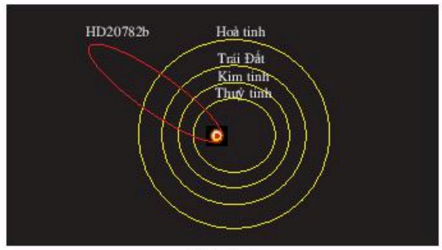
b) Ta thấy $\frac{3}{5} > \frac{1}{5}$, vậy elip (E') "béo" hơn elip (E).

a) Tìm tâm sai của elip (E): $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{99} = 1$ và elip (E'): $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1} = 1$.

b) Không cần vẽ hình, theo bạn elip nào có hình dạng "dẹt" hơn?

Trong hệ Mặt Trời, các hành tinh chuyển động theo quỹ đạo là đường elip nhận tâm Mặt Trời là một tiêu điểm. Từ hình ảnh mô phỏng quỹ đạo chuyển động của các hành tinh (Hình 9), hãy so sánh tâm sai của quỹ đạo chuyển động của Trái Đất với tâm sai của quỹ đạo chuyển động của tiểu hành tinh HD20782b.

(*Nguồn:* https://www.nasa.gov)



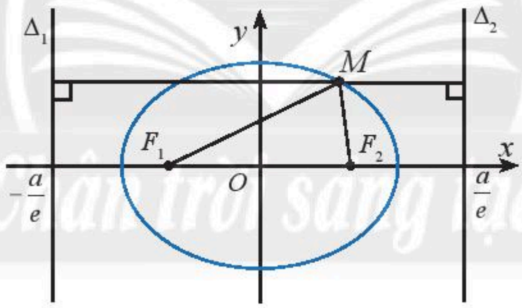
Hình 9

4. Đường chuẩn

Cho điểm $M(x; y)$ trên elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và hai đường thẳng Δ_1: $x+\frac{a}{e}=0$; Δ_2: $x-\frac{a}{e}=0$ (Hình 10). Gọi $d(M, \Delta_1)$, $d(M, \Delta_2)$ lần lượt là khoảng cách từ M đến Δ_1, Δ_2. Ta có $d(M, \Delta_1)=\left|x+\frac{a}{e}\right|=\frac{|a+ex|}{e}=\frac{a+ex}{e}$ (vì $e>0$ và $a+ex=MF_1>0$).

Suy ra $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)}=\frac{a+ex}{\frac{a+ex}{e}}=e$.

Dựa theo cách tính trên, hãy tính $\frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)}$.



Hình 10

Cho elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và có hai tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

Đường thẳng Δ_1: $x+\frac{a}{e}=0$ được gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1 và đường thẳng Δ_2: $x-\frac{a}{e}=0$ được gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 của elip (E).

Với mọi điểm M thuộc elip, ta luôn có $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)}=\frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)}=e$.

Chú ý: Vì $-\frac{a}{e}<-a<a<\frac{a}{e}$ nên đường chuẩn của elip không có điểm chung với elip đó.

Ví dụ 4

Cho điểm $M(x; y)$ trên elip (E): $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

a) Tìm toạ độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng.

b) Tính tỉ số khoảng cách từ M đến tiêu điểm và đến đường chuẩn tương ứng.

c) Vẽ elip (E), hình chữ nhật cơ sở và hai đường chuẩn của (E) trên hệ trục toạ độ Oxy.

Giải

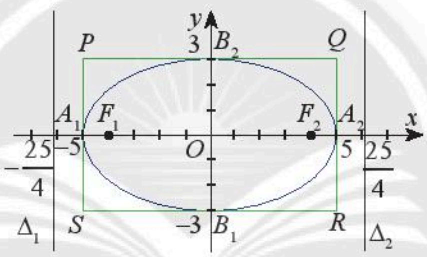
Ta có $a = 5$; $b = 3$, suy ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$; $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$; $\dfrac{a}{e}=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{25}{4}$.

a) Ứng với tiêu điểm $F_1(-4; 0)$, ta có đường chuẩn Δ_1: $x+\dfrac{25}{4}=0$.

Ứng với tiêu điểm $F_2(4; 0)$, ta có đường chuẩn Δ_2: $x-\dfrac{25}{4}=0$.

b) Ta có $\dfrac{MF_1}{d(M, \Delta_1)}=\dfrac{MF_2}{d(M, \Delta_2)}=e=\dfrac{4}{5}$.

c)



Hình 11

Tìm toạ độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng của các elip sau:

a) (E_1): $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$;

b) (E_2): $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

Lập phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng 6 và khoảng cách giữa hai đường chuẩn là $\dfrac{50}{3}$.

BÀI TẬP

1. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

a) Tìm tâm sai, chiều dài, chiều rộng hình chữ nhật cơ sở của (E) và vẽ (E).

b) Tìm độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(0;6)$ trên (E).

c) Tìm toạ độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn của (E).

2. Tìm các điểm trên elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ có độ dài hai bán kính qua tiêu nhỏ nhất, lớn nhất.

3. Lập phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng 12 và khoảng cách giữa hai đường chuẩn là $\frac{169}{6}$.

4. Cho elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

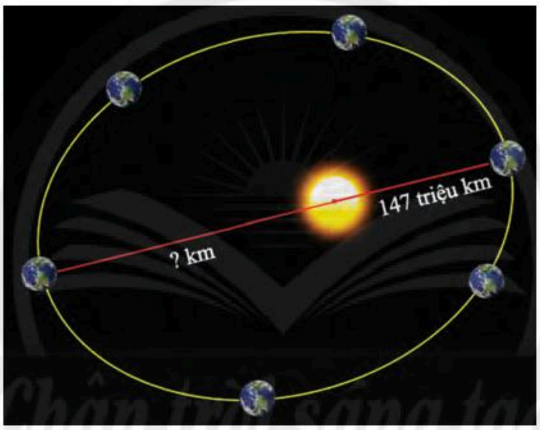
a) Tìm tâm sai và độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(3; 0)$ trên (E).

b) Tìm điểm N trên (E) sao cho $NF_1 = NF_2$.

c) Tìm điểm S trên (E) sao cho $SF_1 = 2SF_2$.

5. Trái Đất chuyển động theo một quỹ đạo là đường elip có tâm sai là 0,0167 và nhận tâm Mặt Trời là một tiêu điểm. Cho biết khoảng cách gần nhất giữa Trái Đất và tâm Mặt Trời là khoảng 147 triệu km, tính khoảng cách xa nhất giữa Trái Đất và tâm Mặt Trời.

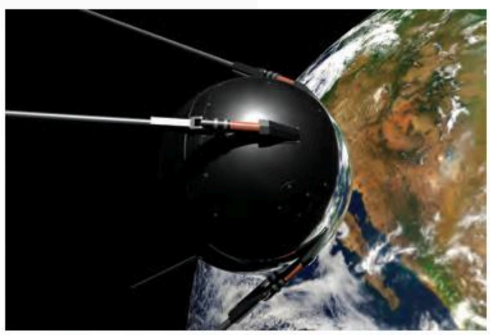
(*Nguồn:* https://www.universetoday.com)



Hình 12

6. Ngày 04/10/1957, Liên Xô đã phóng thành công vệ tinh nhân tạo đầu tiên vào không gian, vệ tinh mang tên Sputnik I. Vệ tinh đó có quỹ đạo hình elip (E) nhận tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Cho biết khoảng cách xa nhất giữa vệ tinh và tâm Trái Đất là 7 310 km và khoảng cách gần nhất giữa vệ tinh và tâm Trái Đất là 6 586 km. Tìm tâm sai của quỹ đạo chuyển động của vệ tinh Sputnik I.

(*Nguồn:* https://vi.wikipedia.org)



Hình 13

Bạn có biết?

Johannes Kepler và quy luật chuyển động của các hành tinh

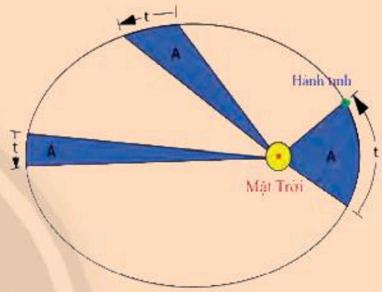
Johannes Kepler
(1571 – 1630)

Kepler (Johannes Kepler) là nhà toán học và thiên văn học nổi tiếng người Đức. Ông là một trong những đại diện của cuộc cách mạng khoa học thế kỉ XVII. Kepler được biết đến nhiều nhất bởi các định luật về chuyển động thiên thể mang tên ông.

Ba định luật của Kepler:

Định luật 1: Các hành tinh chuyển động quanh Mặt Trời theo quỹ đạo là đường elip với Mặt Trời nằm tại một tiêu điểm.

Định luật 2: Đường nối một hành tinh với Mặt Trời quét qua những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau.



Định luật 3: Bình phương chu kì quỹ đạo của một hành tinh tỉ lệ với lập phương nửa độ dài trục lớn của quỹ đạo.

Nghĩa là nếu ta gọi T_1, T_2 lần lượt là thời gian để hai hành tinh quay hết một vòng quanh Mặt Trời và a_1, a_2 lần lượt là độ dài nửa trục lớn elip quỹ đạo của hai hành tinh đó thì ta có:

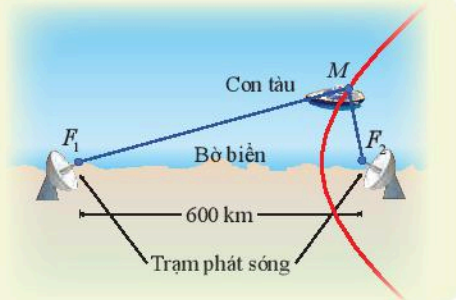
$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

(*Nguồn:* https://vi.wikipedia.org/wiki/Johannes_kepler)

Bài 2. Hypebol

Từ khoá: Hypebol; Trục đối xứng; Tâm đối xứng; Bán kính qua tiêu; Tâm sai; Đường chuẩn.

Nhờ việc thu tín hiệu từ hai trạm phát sóng F_1 và F_2 trên bờ, hệ thống định vị đặt tại điểm M trên con tàu tính được hiệu số khoảng cách từ M đến F_1, F_2 và xác định được một đường hypebol đi qua M.



1. Tính đối xứng của đường hypebol

Ôn tập về hypebol

Ta đã biết hypebol (H) với phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0;\ b>0)$ (Hình 1) có các yếu tố cơ bản sau:

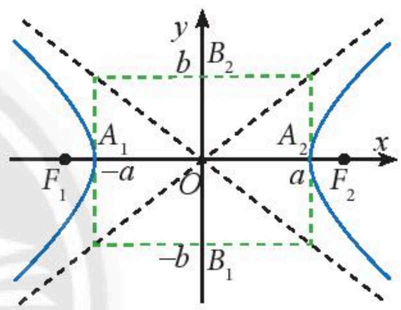
– Cắt trục Ox tại hai đỉnh $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$ nhưng không cắt trục Oy.

– Trục thực là A_1A_2 có độ dài $2a$.

– Trục ảo là B_1B_2 có độ dài $2b$ với $B_1(0;\ -b)$, $B_2(0;\ b)$ là hai điểm trên Oy.

– Hai tiêu điểm là $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ với $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

– Tiêu cự $2c$ là khoảng cách giữa hai tiêu điểm.



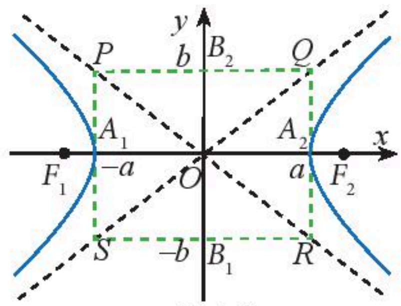
Hình 1

Chú ý: Hypebol gồm hai phần riêng biệt nằm hai bên trục ảo, mỗi phần gọi là một nhánh của hypebol. Nhánh đi qua đỉnh $A_1(-a;\ 0)$ gồm những điểm $M(x;\ y)$ với $x \le -a$ và thoả mãn $MF_2 - MF_1 = 2a$. Nhánh đi qua đỉnh $A_2(a;\ 0)$ gồm những điểm $M(x;\ y)$ với $x \ge a$ và thoả mãn $MF_1 - MF_2 = 2a$.

1 Cho hypebol (H) với phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ và điểm $M(x_0;\ y_0)$ nằm trên (H). Các điểm $M_1(-x_0;\ y_0)$, $M_2(x_0;\ -y_0)$, $M_3(-x_0;\ -y_0)$ có thuộc (H) không?

Hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ nhận hai trục toạ độ làm ***trục đối xứng*** và nhận gốc toạ độ làm ***tâm đối xứng***.

Hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt đi qua hai đỉnh A_1, A_2 và song song với trục Oy, hai cạnh còn lại đi qua B_1, B_2 và song song với trục Ox được gọi là ***hình chữ nhật cơ sở*** của hypebol (H).



Hình 2

Nhận xét: Khi càng tiến xa gốc toạ độ, hai nhánh của hypebol (H) càng tiến gần đến hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở (nhưng không có điểm chung). Hai đường thẳng này có phương trình $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ và được gọi là hai ***đường tiệm cận*** của hypebol (H).

Ví dụ 1

Cho hypebol (H) có hai đỉnh là $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ và trục ảo là B_1B_2 với $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.

a) Xác định toạ độ bốn đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của (H).

b) Cho một điểm M bất kì trên (H). Chứng minh rằng $a \leq OM$.

Giải

a) Gọi $PQRS$ là hình chữ nhật cơ sở của (H).

Toạ độ bốn đỉnh của $PQRS$ là:

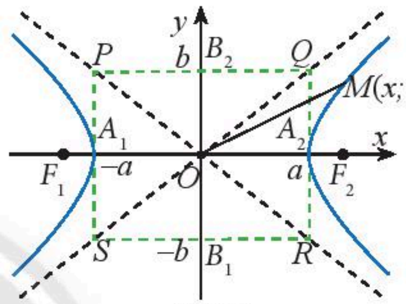
$$P(-a; b), Q(a; b), R(a; -b), S(-a; -b).$$

b) Gọi $M(x; y)$ là điểm bất kì trên (H).

Ta có $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, suy ra $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$

nên $a^2 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 = OM^2$.

Do đó, $a \leq OM$.



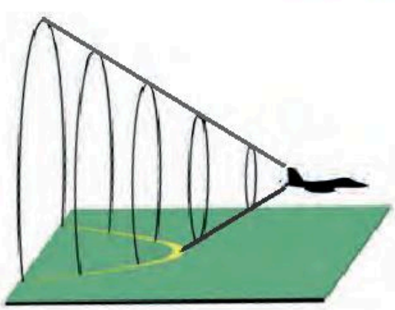
Hình 3

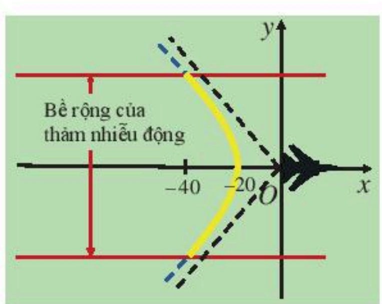
Chú ý: Mọi điểm thuộc hypebol (ngoại trừ hai đỉnh) đều nằm ngoài hình chữ nhật cơ sở.

1 Viết phương trình chính tắc của hypebol có kích thước của hình chữ nhật cơ sở là 8 và 6. Xác định đỉnh, tiêu điểm, tiêu cự, độ dài trục của hypebol này.

1 Khi bay với vận tốc siêu thanh (tốc độ chuyển động lớn hơn tốc độ âm thanh trong cùng môi trường), một máy bay tạo ra một vùng nhiễu động trên mặt đất dọc theo một nhánh của hypebol (H) (Hình 4). Phần nghe rõ nhất tiếng ồn của vùng nói trên được gọi là thảm nhiễu động. Bề rộng của thảm này gấp khoảng 5 lần cao độ của máy bay. Tính cao độ của máy bay, biết bề rộng của thảm nhiễu động được đo cách phía sau máy bay một khoảng là 40 mile (mile (dặm) là đơn vị đo khoảng cách, 1 mile ≈ 1,6 km) và (H) có phương trình:

$$\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{100} = 1.$$





Hình 4

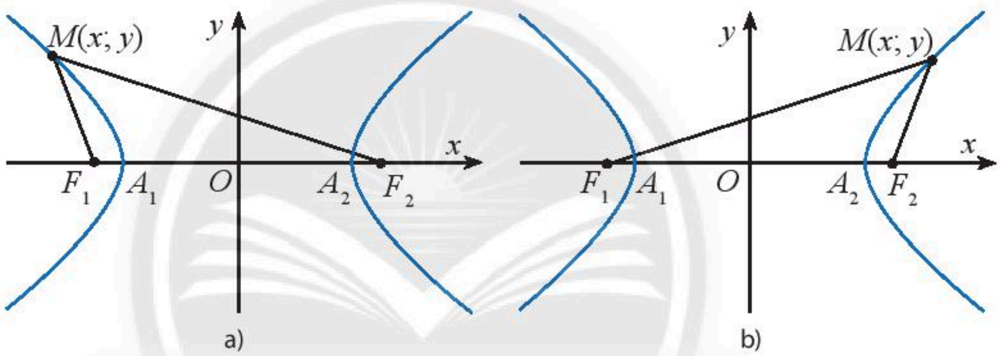
2. Bán kính qua tiêu

Cho điểm $M(x; y)$ nằm trên hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Chứng minh rằng $F_1M^2 - F_2M^2 = 4cx$.

b) Giả sử điểm $M(x; y)$ thuộc nhánh đi qua $A_1(-a; 0)$ (Hình 5a). Sử dụng kết quả đã chứng minh được ở câu a) kết hợp với tính chất $MF_2 - MF_1 = 2a$ đã biết để chứng minh $MF_2 + MF_1 = -2\frac{cx}{a}$. Từ đó, chứng minh các công thức: $MF_1 = -a - \frac{c}{a}x$; $MF_2 = a - \frac{c}{a}x$.

b) Giả sử điểm $M(x; y)$ thuộc nhánh đi qua $A_2(a; 0)$ (Hình 5b). Sử dụng kết quả đã chứng minh được ở câu a) kết hợp với tính chất $MF_1 - MF_2 = 2a$ đã biết để chứng minh $MF_2 + MF_1 = 2\frac{cx}{a}$. Từ đó, chứng minh các công thức: $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$; $MF_2 = -a + \frac{c}{a}x$.



Hình 5

Cho điểm M thuộc hypebol (H). Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 được gọi là hai ***bán kính qua tiêu*** của điểm M.

Độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ trên hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ được tính theo công thức: $MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|$; $MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$.

Ví dụ 2

Tính độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ trên hypebol (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Giải

Ta có $a = 4$; $b = 3$, suy ra $c = 5$.

Độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ là:

$$MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = \left|4 + \frac{5}{4}x\right|; MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = \left|4 - \frac{5}{4}x\right|.$$

Tính độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ trên hypebol (H): $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

Tính độ dài hai bán kính qua tiêu của đỉnh $A_2(a; 0)$ trên hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

3. Tâm sai

Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Chứng tỏ rằng $\frac{c}{a}>1$.

Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực là ***tâm sai*** của hypebol và được kí hiệu là e, nghĩa là $e=\frac{c}{a}$.

Với mọi hypebol, ta luôn có $e>1$.

Ví dụ 3

Tìm tâm sai của hypebol (H): $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

Giải

Ta có $a=8$, $b=6$, suy ra $c=\sqrt{a^2+b^2}=10$.

Vậy tâm sai của (H) là $e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$.

Tìm tâm sai của các hypebol sau:

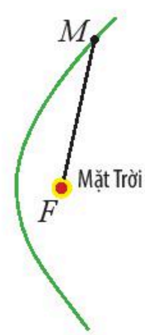
a) (H_1): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$; b) (H_2): $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$; c) (H_3): $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$.

Cho hypebol (H) có tâm sai bằng $\sqrt{2}$. Chứng minh trục thực và trục ảo của (H) có độ dài bằng nhau.

Một vật thể có quỹ đạo là một nhánh của hypebol (H), nhận tâm Mặt Trời làm tiêu điểm (Hình 6). Cho biết tâm sai của (H) bằng 1,2 và khoảng cách gần nhất giữa vật thể và tâm Mặt Trời là $2 \cdot 10^8$ km.

a) Lập phương trình chính tắc của (H).

b) Lập công thức tính bán kính qua tiêu của vị trí $M(x; y)$ của vật thể trong mặt phẳng toạ độ.



Hình 6

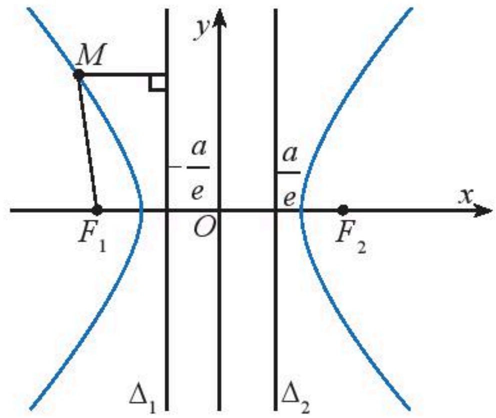
4. Đường chuẩn

Cho điểm $M(x; y)$ trên hypebol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và hai đường thẳng Δ_1: $x + \dfrac{a}{e} = 0$; Δ_2: $x - \dfrac{a}{e} = 0$ (Hình 7).

Gọi $d(M, \Delta_1)$, $d(M, \Delta_2)$ lần lượt là khoảng cách từ M đến các đường thẳng Δ_1, Δ_2.

Ta có: $\dfrac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = \dfrac{|a + ex|}{\left|x + \dfrac{a}{e}\right|} = \dfrac{|a + ex|}{\dfrac{|a + ex|}{e}} = e.$

Dựa theo cách tính trên, tính $\dfrac{MF_2}{d(M, \Delta_2)}$.



Hình 7

Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và có hai tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

Đường thẳng Δ_1: $x + \dfrac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1 và đường thẳng Δ_2: $x - \dfrac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 của hypebol (H).

Với mọi điểm M thuộc hypebol, ta luôn có $\dfrac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = \dfrac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = e$.

Chú ý: Vì $-a < -\dfrac{a}{e} < \dfrac{a}{e} < a$ nên đường chuẩn của hypebol không có điểm chung với hypebol đó.

Ví dụ 4

Cho điểm $M(x; y)$ trên hypebol (H): $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

a) Tìm toạ độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng.

b) Tính tỉ số khoảng cách từ M đến tiêu điểm và đến đường chuẩn tương ứng.

Giải

Ta có $a = 4$; $b = 3$, suy ra $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$; $\dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{16}{5}$.

a) Ứng với tiêu điểm $F_1(-5; 0)$, ta có đường chuẩn $\Delta_1 : x + \frac{16}{5} = 0$.

Ứng với tiêu điểm $F_2(5; 0)$, ta có đường chuẩn $\Delta_2 : x - \frac{16}{5} = 0$.

b) Ta có $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = e = \frac{5}{4}$.

4 Tìm toạ độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng của các hypebol sau:

a) (H_1): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$; b) (H_2): $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; c) (H_3): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$.

5 Lập phương trình chính tắc của hypebol có tiêu cự bằng 26 và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\frac{288}{13}$.

BÀI TẬP

1. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

a) Tìm tâm sai và độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M\left(13; \frac{25}{12}\right)$ trên (H).

b) Tìm tọa độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng.

c) Tìm điểm $N(x; y) \in (H)$ sao cho $NF_1 = 2NF_2$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (H).

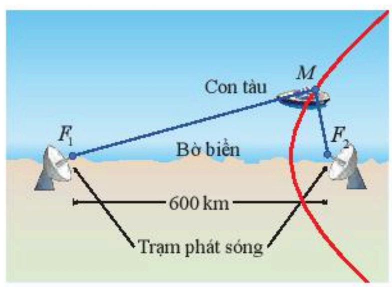
2. Lập phương trình chính tắc của hypebol có tiêu cự bằng 20 và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\frac{36}{5}$.

3. Cho đường tròn (C) tâm F_1, bán kính r và một điểm F_2 thoả mãn $F_1F_2 = 4r$.

a) Chứng tỏ rằng tâm của các đường tròn đi qua F_2 và tiếp xúc với (C) nằm trên một đường hypebol (H).

b) Viết phương trình chính tắc và tìm tâm sai của (H).

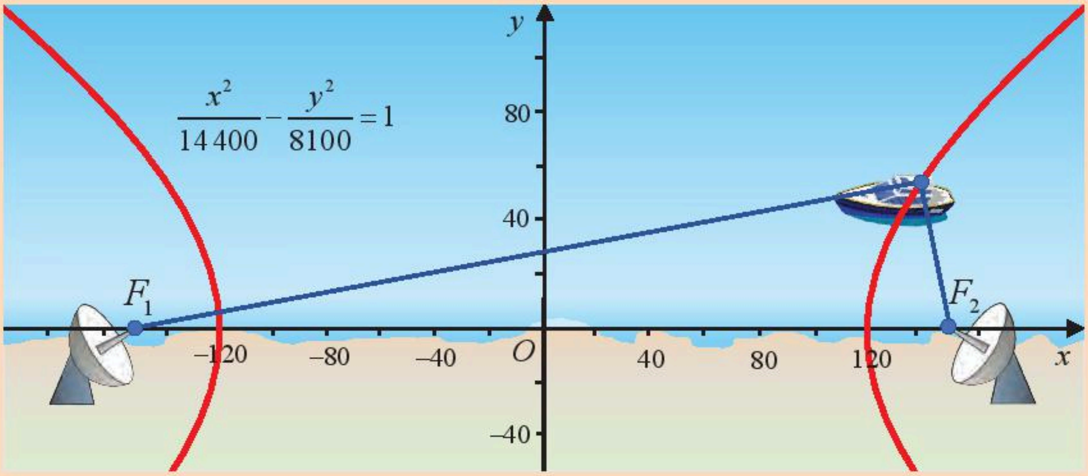
4. Trong hoạt động mở đầu bài học, cho biết khoảng cách giữa hai trạm vô tuyến là 600 km, vận tốc sóng vô tuyến là 300 000 km/s và thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ hai trạm trên bờ biển luôn cách nhau 0,0012 s (hai trạm vô tuyến phát các tín hiệu cùng một thời điểm). Viết phương trình chính tắc của quỹ đạo hypebol (H) của con tàu.



Hình 8

Bạn có biết?

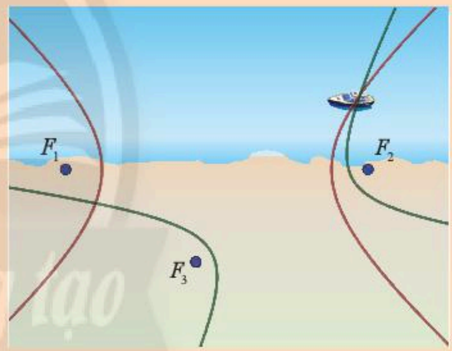
Hệ thống định vị LORAN



Người ta đã ứng dụng tính chất của các đường hypebol để định vị tàu thuyền ven biển thông qua hệ thống LORAN.

Cách vận hành của một LORAN như sau:

Khi hai trạm phát F_1 và F_2 phát tín hiệu cùng một thời điểm đến con tàu, thì hiệu số giữa hai thời điểm con tàu nhận được tín hiệu từ hai trạm nhân với tốc độ của sóng vô tuyến sẽ cho hiệu số khoảng cách từ vị trí của tàu đến F_1 và F_2. Do đó, con tàu đang ở đâu đó trên một hypebol có tiêu điểm là F_1 và F_2. Bằng cách đưa vào trạm phát sóng thứ ba, F_3, chúng ta có thể hình thành một nhánh hypebol khác với các tiêu điểm là F_2 và F_3. Khi đó vị trí của con tàu là giao điểm của hai nhánh hypebol nêu trên.



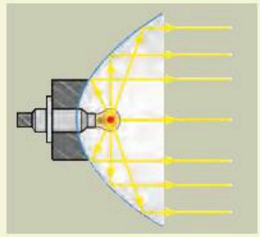
Nguyên tắc dựa trên các hypebol giao nhau này được sử dụng trong hệ thống định vị tầm xa, được gọi là LORAN (LOng RAnge Navigation). Các trạm radar đóng vai trò là tiêu điểm của các hypebol, và tất nhiên, máy tính được sử dụng cho nhiều thao tác cần thiết để xác định vị trí của con tàu.

(*Nguồn:* https://en.wikipedia.org/wiki/LORAN)

Bài 3. Parabol

Từ khoá: Parabol; Trục đối xứng; Đỉnh; Bán kính qua tiêu; Tâm sai.

Mặt cắt của gương phản chiếu của một đèn pha là một parabol (P) với tim của bóng đèn đặt tại tiêu điểm F. Làm thế nào để tìm khoảng cách từ F đến một điểm trên gương khi biết phương trình chính tắc của (P)?



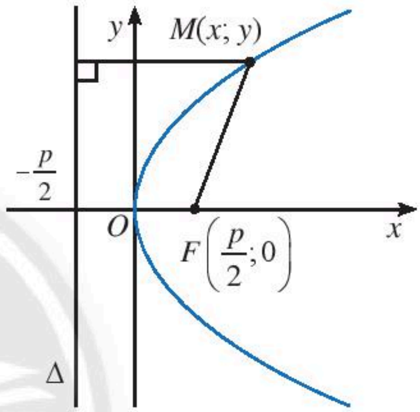
1. Tính đối xứng của đường parabol

Ôn tập về parabol

Ta đã biết parabol (P) với phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ có ***tiêu điểm*** $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và có ***đường chuẩn*** $\Delta : x = -\frac{p}{2}$.

Parabol (P) nhận Ox làm ***trục đối xứng***.

Giao điểm của parabol (P) và trục đối xứng của nó gọi là ***đỉnh*** của parabol.



Hình 1

Chú ý: a) Với mọi điểm $M(x; y)$ thuộc parabol (P): $y^2 = 2px$ (với $p > 0$) ta đều có $x \geq 0$, suy ra (P) thuộc nửa mặt phẳng toạ độ có $x \geq 0$.

b) Vì $-\frac{p}{2} < 0$ nên đường chuẩn của parabol không có điểm chung với parabol đó.

1 Chứng tỏ rằng nếu điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên parabol (P) thì điểm $M'(x_0; -y_0)$ cũng nằm trên parabol (P).

Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn gọi là ***tham số tiêu*** của parabol.

Chú ý: Khác với elip và hypebol, đường parabol chỉ có một trục đối xứng, một đỉnh và không có tâm đối xứng.

Ví dụ 1

Tìm toạ độ tiêu điểm, toạ độ đỉnh, phương trình đường chuẩn và trục đối xứng của parabol (P): $y^2 = 4x$.

Giải

Ta có $2p = 4$, suy ra $p = 2$. Vậy (P) có tiêu điểm $F(1; 0)$, đỉnh $O(0; 0)$ đường chuẩn Δ: $x = -1$ và nhận Ox làm trục đối xứng.

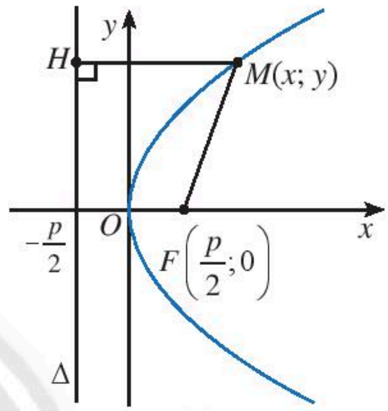
Tìm toạ độ tiêu điểm, toạ độ đỉnh, phương trình đường chuẩn và trục đối xứng của các parabol sau:

a) (P_1): $y^2 = 2x$; b) (P_2): $y^2 = x$; c) (P_3): $y^2 = \frac{1}{5}x$.

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(2; 0)$ và đường thẳng d: $x + 2 = 0$. Viết phương trình của đường (L) là tập hợp các tâm $J(x; y)$ của các đường tròn (C) thay đổi nhưng luôn luôn đi qua A và tiếp xúc với d.

2. Bán kính qua tiêu và tâm sai của parabol

Cho điểm $M(x; y)$ trên parabol (P): $y^2 = 2px$ (Hình 2).
Tính khoảng cách từ điểm M đến tiêu điểm F của (P).



Hình 2

Cho điểm M trên parabol (P) có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Ta gọi đoạn FM là ***bán kính qua tiêu*** của điểm M và gọi tỉ số $e = \frac{FM}{d(M, \Delta)}$ là ***tâm sai*** của parabol (P).

Mọi parabol đều có tâm sai $e = 1$ và parabol chính tắc (P): $y^2 = 2px$ có độ dài bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ là $FM = x + \frac{p}{2}$.

Ví dụ 2

Tính bán kính qua tiêu của điểm $M(1; 2)$ trên parabol (P): $y^2 = 4x$.

Giải

Ta có $2p = 4$, suy ra $p = 2$. Vậy độ dài bán kính qua tiêu của điểm $M(1; 2)$ là:

$$FM = x + \frac{p}{2} = 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

Tính bán kính qua tiêu của điểm dưới đây trên parabol tương ứng:

a) Điểm $M_1(1; -4)$ trên (P_1): $y^2 = 16x$;

b) Điểm $M_2(3; -3)$ trên (P_2): $y^2 = 3x$;

c) Điểm $M_3(4; 1)$ trên (P_3): $y^2 = \frac{1}{4}x$.

Một cổng có dạng một đường parabol (P). Biết chiều cao của cổng là 7,6 m và khoảng cách giữa hai chân cổng là 9 m. Người ta muốn treo một ngôi sao tại tiêu điểm F của (P) bằng một đoạn dây nối từ đỉnh S của cổng. Tính khoảng cách từ tâm ngôi sao đến đỉnh cổng.

Hình 3

Mặt cắt của một chảo ăng-ten có dạng một parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 0,25x$. Biết đầu thu tín hiệu của chảo ăng-ten đặt tại tiêu điểm F của (P). Tính khoảng cách từ điểm $M(0,25; 0,25)$ trên ăng-ten đến F.

Hình 4

BÀI TẬP

1. Tìm toạ độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của các parabol sau:

a) (P_1): $y^2 = 7x$; b) (P_2): $y^2 = \dfrac{1}{3}x$; c) (P_3): $y^2 = \sqrt{2}\,x$.

2. Tính bán kính qua tiêu của điểm đã cho trên các parabol sau:

a) Điểm $M_1(3; -6)$ trên (P_1): $y^2 = 12x$; b) Điểm $M_2(6; 1)$ trên (P_2): $y^2 = \dfrac{1}{6}x$;

c) Điểm $M_3\left(\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$ trên (P_3): $y^2 = \sqrt{3}\,x$.

3. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(\dfrac{1}{4}; 0)$ và đường thẳng d: $x + \dfrac{1}{4} = 0$. Viết phương trình của đường (P) là tập hợp tâm $M(x; y)$ của các đường tròn (C) di động nhưng luôn luôn đi qua A và tiếp xúc với d.

4. Cho parabol (P). Trên (P) lấy hai điểm M, N sao cho đoạn thẳng MN đi qua tiêu điểm F của (P). Chứng minh rằng khoảng cách từ trung điểm I của đoạn thẳng MN đến đường chuẩn Δ của (P) bằng $\dfrac{1}{2}MN$ và đường tròn đường kính MN tiếp xúc với Δ.

5. Hãy so sánh bán kính qua tiêu của điểm M trên parabol (P) với bán kính của đường tròn tâm M, tiếp xúc với đường chuẩn của (P).

6. Một sao chổi A chuyển động theo quỹ đạo có dạng một parabol (P) nhận tâm Mặt Trời là tiêu điểm. Cho biết khoảng cách ngắn nhất giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là khoảng 112 km.

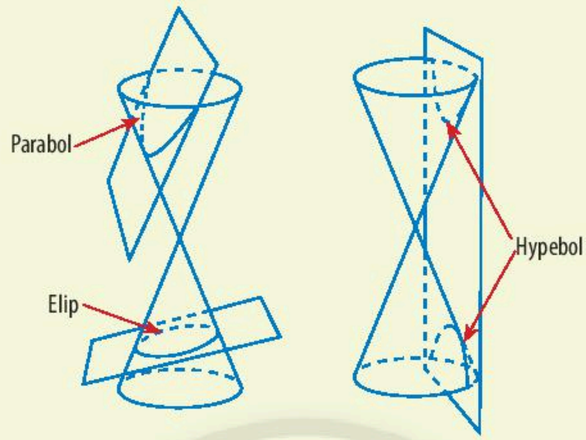
a) Viết phương trình chính tắc của parabol (P).

b) Tính khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời khi sao chổi nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục đối xứng của (P).

7. Mặt cắt của gương phản chiếu của một đèn pha có dạng một parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 6x$. Tính khoảng cách từ điểm $M(1; \sqrt{6})$ trên gương đến tiêu điểm của (P). (với đơn vị trên hệ trục toạ độ là xentimét).

Bài 4. Tính chất chung của ba đường conic

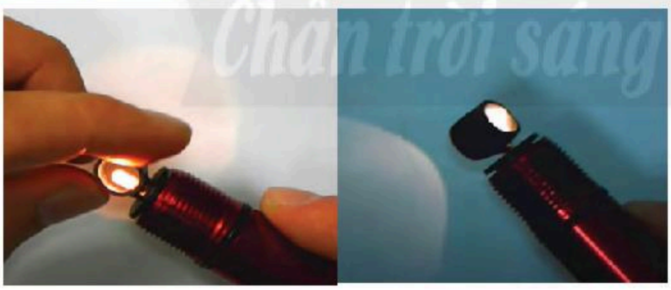
Từ khoá: Đường conic; Tiêu điểm; Đường chuẩn; Tâm sai.



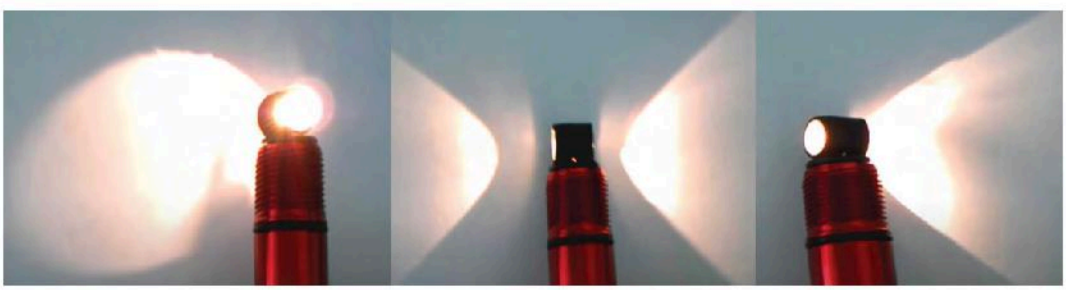
Tại sao người ta gọi elip, hypebol, parabol là ba đường conic?

1. Giao của mặt phẳng với mặt nón tròn xoay

Gắn một đoạn ống nhựa vào đầu bóng của một đèn chiếu nhỏ để tạo ra một chùm ánh sáng hình mặt nón tròn xoay (Hình 1a, b). Chiếu đèn lên một bức tường với các góc nghiêng khác nhau để ánh sáng từ đèn hắt lên bức tường tạo thành các bóng khác nhau (Hình 1c, d, e). Nhận xét hình ảnh bạn nhìn thấy trên bức tường.



a) b)



c) d) e)

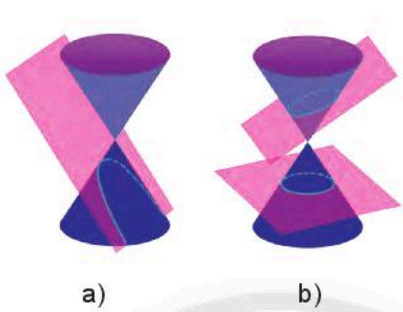
Hình 1

Người ta chứng minh được có thể tạo ra các đường tròn, elip, hypebol, parabol bằng cách cho mặt phẳng cắt mặt nón tròn xoay.

Giao của một mặt phẳng với một mặt nón tròn xoay (mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón) có thể là đường tròn, đường elip, đường hypebol hay đường parabol.

Ví dụ 1

Trong Hình 2a, giao của mặt phẳng và mặt nón là một đường parabol.



Hình 2

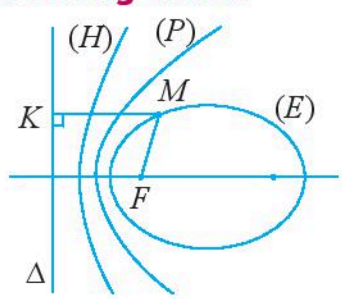
Giao của mặt phẳng và mặt nón trong Hình 2b, c có dạng đường gì?

Khi máy bay bay song song với mặt đất với vận tốc lớn hơn vận tốc của âm thanh sẽ tạo ra các lớp không khí dao động có hình mặt nón (nón Mach) (Hình 3) và tạo ra tiếng nổ mạnh, gọi là tiếng nổ siêu thanh. Những người trên mặt đất nếu nghe thấy tiếng nổ này cùng một thời điểm thì vị trí của họ cùng thuộc một đường hypebol. Hãy giải thích điều này.

Hình 3

2. Xác định đường conic theo tâm sai, tiêu điểm và đường chuẩn

Cho đường conic có tiêu điểm F, đường chuẩn Δ và một điểm M là điểm nằm trên đường conic đó. Tìm mối liên hệ giữa tỉ số $\dfrac{FM}{d(M, \Delta)}$ và tên gọi của đường conic.



Hình 4

Định nghĩa chung của các đường conic

Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\frac{MF}{d(M,\Delta)}$ bằng một hằng số dương e cho trước được gọi là ***đường conic***.

Điểm F gọi là ***tiêu điểm***, Δ gọi là ***đường chuẩn*** và e gọi là ***tâm sai*** của đường conic.

Từ định nghĩa trên, kết hợp với tính chất của elip, parabol và hypebol, ta có:

Elip là đường conic có tâm sai $e < 1$;

Parabol là đường conic có tâm sai $e = 1$;

Hypebol là đường conic có tâm sai $e > 1$.

Ví dụ 2

Xác định tâm sai, toạ độ một tiêu điểm và phương trình đường chuẩn tương ứng của mỗi đường conic sau:

a) $y^2 = 14x$; b) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$; c) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

Giải

a) Conic (P): $y^2 = 14x$ là một parabol. Ta có có $2p = 14$, $p = 7$.

Suy ra (P) có tiêu điểm $F(\frac{7}{2}; 0)$, đường chuẩn $\Delta: x=-\frac{7}{2}$ và tâm sai $e = 1$.

b) Conic (E): $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$ là một elip.

Ta có: $a=\sqrt{10}, b=\sqrt{5}, c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{e}=\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{5}$.

Suy ra (E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5};0)$, đường chuẩn $\Delta_1: x=-2\sqrt{5}$ và tâm sai $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Conic (H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ là một hypebol.

Ta có: $a=2, b=2\sqrt{3}, c=\sqrt{a^2+b^2}=4, e=\frac{c}{a}=2, \frac{a}{e}=\frac{2}{2}=1$.

Suy ra (H) có tiêu điểm $F_2(4;0)$, đường chuẩn $\Delta_2: x=1$ và tâm sai $e=2$.

Ví dụ 3

Cho đường thẳng Δ: $x + y - 1 = 0$. Gọi tên và lập phương trình của các đường (L) là tập hợp các điểm $M(x; y)$ thoả mãn $\frac{MO}{d(M,\Delta)}=e$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $e=\frac{1}{2}$; b) $e = 2$; c) $e = 1$.

Giải

Ta có $MO = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $d(M, \Delta) = \dfrac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}}$.

a) (L) có $e = \dfrac{1}{2} < 1$, do đó (L) là một đường elip.

Ta có $M(x; y) \in (L) \Leftrightarrow \dfrac{MO}{d(M, \Delta)} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2MO = d(M, \Delta)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 8(x^2 + y^2) = (x + y - 1)^2$

$\Leftrightarrow 8x^2 + 8y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 \Leftrightarrow 7x^2 + 7y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0.$

Vậy elip (L) có phương trình $7x^2 + 7y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0$.

b) (L) có $e = 2 > 1$, do đó (L) là một hypebol.

Ta có $M(x; y) \in (L) \Leftrightarrow \dfrac{MO}{d(M, \Delta)} = 2 \Leftrightarrow MO = 2d(M, \Delta)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\dfrac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2(x + y - 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4xy - 4x - 4y + 2 = 0.$

Vậy hypebol (L) có phương trình $x^2 + y^2 + 4xy - 4x - 4y + 2 = 0$.

c) (L) có $e = 1$, do đó (L) là một parabol.

Ta có $M(x; y) \in (L) \Leftrightarrow \dfrac{MO}{d(M, \Delta)} = 1 \Leftrightarrow MO = d(M, \Delta)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = (x + y - 1)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0.$

Vậy hypebol (L) có phương trình $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0$.

2 Xác định tâm sai, toạ độ một tiêu điểm và phương trình đường chuẩn tương ứng của mỗi đường conic sau:

a) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{2} = 1$; b) $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; c) $y^2 = \dfrac{1}{2}x$.

Quỹ đạo của các vật thể sau đây là những đường conic. Những đường này là elip, parabol hay hypebol?

Tên	Tâm sai
Trái Đất	0,0167
Sao chổi Halley	0,9671
Sao chổi Great Southern of 1887	1,0
Vật thể Oumuamua	1,2

Hình 5. Vật thể Oumuamua

Nguồn: https://vi.wikipedia.org/wiki/oumuamud

BÀI TẬP

1. Xác định tâm sai, toạ độ một tiêu điểm và phương trình đường chuẩn tương ứng của mỗi đường conic sau:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$; b) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{10}=1$; c) $y^2 = x$.

2. Viết phương trình của conic có tâm sai $e = 1$, tiêu điểm $F(1; 0)$ và đường chuẩn Δ: $x + 1 = 0$.

3. Viết phương trình của conic (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) (C) có tiêu điểm $F(8; 0)$, đường chuẩn Δ: $x - 2 = 0$ và tâm sai $e = 2$;

b) (C) có tiêu điểm $F(-4; 0)$, đường chuẩn $\Delta: x+\frac{25}{4}=0$ và tâm sai $e=\frac{4}{5}$.

4. Quỹ đạo của các vật thể sau đây là những đường conic. Những đường này là elip, parabol hay hypebol?

Tên	Tâm sai
Sao Hoả	0,0934
Mặt Trăng	0,0549
Sao Thuỷ	0,2056
Sao chổi Ikeya-Seki	0,9999
C/2019 Q4	3,5

Hình 6. Sao chổi Ikeya-Seki nhìn từ Trái Đất

Nguồn: https://vi.wikipedia.org

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 3

1. Tìm toạ độ các đỉnh, tiêu điểm và bán kính qua tiêu ứng với điểm $M(x; y)$ của các conic sau:

a) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; b) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$; c) $y^2 = 11x$.

2. Cho elip (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

a) Xác định toạ độ các đỉnh, tiêu điểm và tìm tâm sai của (E).

b) Viết phương trình chính tắc của parabol (P) có tiêu điểm là tiêu điểm có hoành độ dương của (E).

c) Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) có hai đỉnh là hai tiêu điểm của (E), hai tiêu điểm là hai đỉnh của (E). Tìm tâm sai của (H).

3. Xác định tâm sai, tiêu điểm và đường chuẩn tương ứng của mỗi đường conic sau:

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; b) $\frac{x^2}{14}-\frac{y^2}{2}=1$; c) $y^2 = 7x$.

4. Cho đường thẳng d: $x + y - 1 = 0$ và điểm $F(1; 1)$. Viết phương trình đường conic nhận F là tiêu điểm, d là đường chuẩn và có tâm sai e trong mỗi trường hợp sau:

a) $e = \frac{1}{2}$; b) $e = 1$; c) $e = 2$.

5. Mặt Trăng chuyển động theo một quỹ đạo là đường elip có tâm sai bằng 0,0549 và nhận tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Biết khoảng cách gần nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng là 362 600 km. Tính khoảng cách xa nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng.

Nguồn: https://www.universetoday.com

Hình 1. Trái Đất và Mặt Trăng

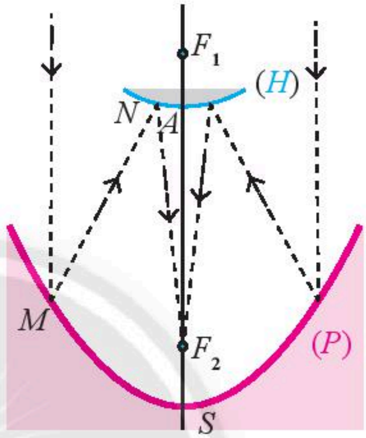
6. Ta đã biết tính chất quang học của ba đường conic (xem phần đọc thêm **Bạn có biết?** ở trang 72, sách giáo khoa Toán 10, tập hai). Hypebol cũng có tính chất quang học tương tự như elip: Tia sáng hướng tới tiêu điểm F_1 của hypebol (H) khi gặp một nhánh của (H) sẽ cho tia phản xạ đi qua F_2.

Một nhà nghiên cứu thiết kế một kính thiên văn vô tuyến chứa hai gương có mặt cắt hình parabol (P) và hình một nhánh của hypebol (H). Parabol (P) có tiêu điểm F_1 và đỉnh S. Hypebol (H) có đỉnh A, có chung một tiêu điểm là F_1 với (P) và còn có tiêu điểm thứ hai F_2 (Hình 3).

Nguyên tắc hoạt động của kính thiên văn đó như sau: Tín hiệu đến từ vũ trụ được xem như song song với trục của parabol (P), khi đến điểm M của (P) sẽ cho tia phản xạ theo hướng MF_1, tia này gặp (H) tại điểm N và cho tia phản xạ tới F_2 là nơi thu tín hiệu. Cho biết $SF_1 = 14$ m, $SF_2 = 2$ m và $AF_1 = 1$ m. Hãy viết phương trình chính tắc của (P) và (H).

(*Nguồn:* https://sciencestruck.com/parabolic-mirror-working-principle-applications)

Hình 2

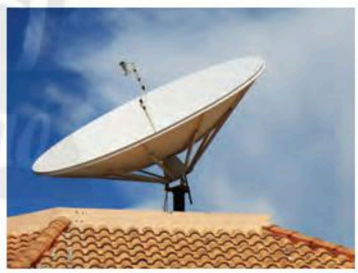


Hình 3

7. Mặt cắt của một chảo ăng-ten là một phần của parabol (P). Cho biết đầu thu tín hiệu đặt tại tiêu điểm F cách đỉnh O của chảo một khoảng là $\frac{1}{6}$ m.

a) Viết phương trình chính tắc của (P).

b) Tính khoảng cách từ một điểm $M(0,06;\ 0,2)$ trên ăng-ten đến F.

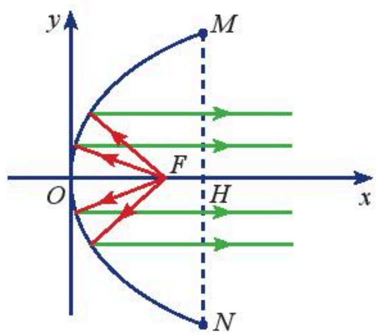


Hình 4

8. Gương phản chiếu của một đèn chiếu có mặt cắt hình parabol (Hình 5). Chiều rộng giữa hai mép vành của gương là $MN = 32$ cm và chiều sâu của gương là $OH = 24$ cm.

a) Viết phương trình chính tắc của parabol đó.

b) Biết bóng đèn đặt tại tiêu điểm F của gương. Tính khoảng cách từ bóng đèn tới đỉnh O của gương.



Hình 5

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

B

Bán kính qua tiêu

Đoạn thẳng nối tiêu điểm của conic với một điểm nằm trên conic.

C

Công thức nhị thức Newton

Là công thức khai triển:

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Đ

Đỉnh của conic

Giao điểm của conic với các trục đối xứng.

Đường chuẩn

Xem định nghĩa *đường conic*.

Đường conic

Tập hợp các điểm có tỉ số khoảng cách từ điểm đó đến một điểm cố định F và một đường thẳng cố định Δ (không đi qua F) bằng một hằng số e. Điểm F gọi là *tiêu điểm*, đường thẳng Δ gọi là *đường chuẩn* tương ứng với tiêu điểm F và hằng số e gọi là *tâm sai* của conic.

$$(C) = \{M \mid \frac{MF}{d(M, \Delta)} = e\}.$$

E

Elip

Đường conic có tâm sai $e < 1$.

G

Giả thiết quy nạp

Giả thiết được đưa ra tại bước quy nạp của quá trình chứng minh một mệnh đề toán học bằng phương pháp quy nạp toán học.

H

Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

Là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

trong đó x, y, z là ba ẩn, a_i, b_i, c_i, d_i là các số thực cho trước gọi là các hệ số. Ở đây các hệ số a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ không đồng thời bằng 0.

Hypebol

Đường conic có tâm sai $e > 1$.

N

Nhị thức Newton

Là cách gọi tắt của công thức nhị thức Newton.

Nghiệm của hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

Là bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ thoả mãn đồng thời cả ba phương trình của hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn.

P

Parabol

Đường conic có tâm sai $e = 1$.

Phương trình bậc nhất ba ẩn

Là hệ thức có dạng $ax + by + cz = d$, trong đó x, y, z gọi là ba ẩn và a, b, c, d là các số thực cho trước, gọi là hệ số, thoả mãn a, b, c không đồng thời bằng 0.

Q

Quy nạp toán học

Một nguyên lí trong toán học, cho phép chứng minh những mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên dựa trên hai bước.

T

Tam giác Pascal

Là một bảng số gồm các hàng, mỗi hàng gồm các hệ số của công thức nhị thức Newton lần lượt ứng với $n = 0, 1, 2, \ldots$

Tâm sai

Xem định nghĩa *đường conic*.

Tiêu điểm

Xem định nghĩa *đường conic*.

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: ĐẶNG THỊ THUÝ – TRẦN HÀ SƠN
Biên tập mĩ thuật: BÙI XUÂN DƯƠNG
Thiết kế sách: BÙI XUÂN DƯƠNG
Trình bày bìa: THÁI HỮU DƯƠNG
Minh hoạ: BÙI XUÂN DƯƠNG
Sửa bản in: ĐẶNG THỊ THUÝ – TRẦN THANH HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ
Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 10 (Chân trời sáng tạo)
Mã số: G2HHXT003M22
In………bản, (QĐ in số….) Khổ 19x26,5 cm.
Đơn vị in:……………………..
Cơ sở in:………………………
Số ĐKXB: 593-2022/CXBIPH/57-397/GD
Số QĐXB:......... ngày…. tháng…. năm 20….
In xong và nộp lưu chiểu tháng…. năm 20….
Mã số ISBN: 978-604-0-32016-2

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 10 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Toán 10, Tập một
2. Toán 10, Tập hai
3. Chuyên đề học tập Toán 10
4. Ngữ văn 10, Tập một
5. Ngữ văn 10, Tập hai
6. Chuyên đề học tập Ngữ văn 10
7. Tiếng Anh 10
   Friends Global - Student Book
8. Lịch sử 10
9. Chuyên đề học tập Lịch sử 10
10. Địa lí 10
11. Chuyên đề học tập Địa lí 10
12. Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10
13. Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10
14. Vật lí 10
15. Chuyên đề học tập Vật lí 10
16. Hoá học 10
17. Chuyên đề học tập Hoá học 10
18. Sinh học 10
19. Chuyên đề học tập Sinh học 10
20. Âm nhạc 10
21. Chuyên đề học tập Âm nhạc 10
22. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (BẢN 1)
23. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (BẢN 2)
24. Giáo dục quốc phòng và an ninh 10

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
- **Cửu Long:** CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

ISBN 978-604-0-32016-2

9 786040 320162

Giá: 11.000 đ