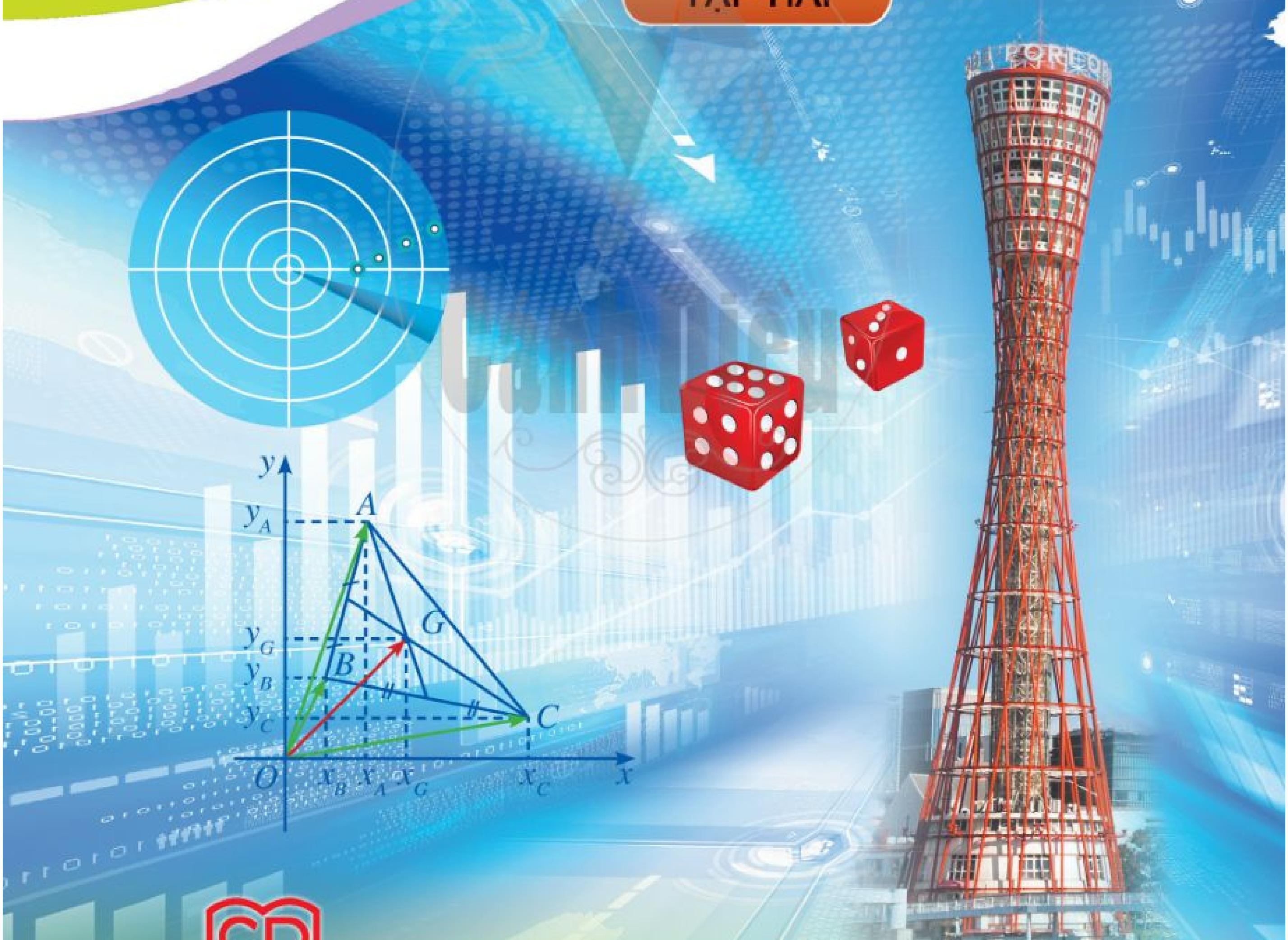
ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

# BÀI TẬP Toán 10

## TẬP HAI




NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

# BÀI TẬP Toán 10

## TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Chương V

# ĐẠI SỐ TỔ HỢP

## §1 QUY TẮC CỘNG. QUY TẮC NHÂN. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

**1. Quy tắc cộng**

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện, hành động thứ hai có $n$ cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m + n$ cách hoàn thành.

*Nhận xét:* Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động. Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện, hành động thứ hai có $n$ cách thực hiện, hành động thứ ba có $p$ cách thực hiện (các cách thực hiện của ba hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m + n + p$ cách hoàn thành.

**2. Quy tắc nhân**

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có $n$ cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m \,.\, n$ cách hoàn thành.

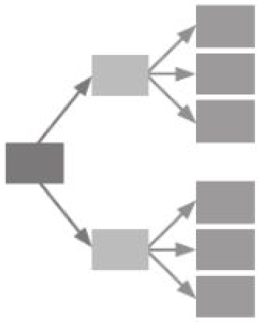
*Nhận xét:* Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:

Một công việc được hoàn thành bởi ba hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có $n$ cách thực hiện hành động thứ hai; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất và mỗi cách thực hiện hành động thứ hai có $p$ cách thực hiện hành động thứ ba thì công việc đó có $m \,.\, n \,.\, p$ cách hoàn thành.

### 3. Sơ đồ hình cây

• *Sơ đồ hình cây* (*Hình 1*) là sơ đồ bắt đầu tại một nút duy nhất với các nhánh toả ra các nút bổ sung.

• Ta có thể sử dụng sơ đồ hình cây để đếm số cách hoàn thành một công việc khi công việc đó đòi hỏi những hành động liên tiếp.



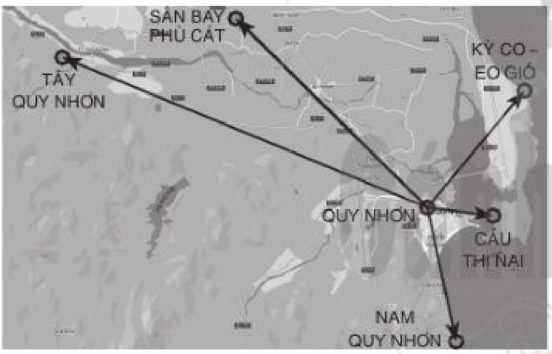
*Hình 1*

## B. VÍ DỤ

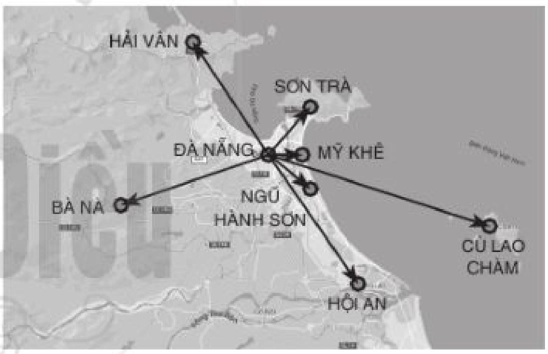
### Vấn đề 1. Đếm bằng quy tắc cộng

*Chú ý*: Cách thực hiện hành động thứ nhất không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ hai.

***Ví dụ 1*** Gia đình bạn Dương dự định chọn một địa điểm du lịch ở Quy Nhơn (Bình Định) hoặc Đà Nẵng. Nếu chọn Quy Nhơn thì có 5 địa điểm tham quan (*Hình 2*), nếu chọn Đà Nẵng thì có 7 địa điểm tham quan (*Hình 3*). Hỏi gia đình bạn Dương có bao nhiêu cách để chọn một địa điểm tham quan?




*Hình 2*




*Hình 3*

*Giải*

Nếu chọn Quy Nhơn thì có 5 cách chọn một địa điểm tham quan.

Nếu chọn Đà Nẵng thì có 7 cách chọn một địa điểm tham quan.

Vậy gia đình bạn Dương có $5 + 7 = 12$ cách chọn một địa điểm tham quan.

### Vấn đề 2. Đếm bằng quy tắc nhân

***Ví dụ 2*** Gia đình bạn Dương dự định chọn một địa điểm du lịch ở Quy Nhơn, sau đó đi tham quan tiếp một địa điểm du lịch ở Đà Nẵng. Biết rằng, nếu chọn Quy Nhơn thì có 5 địa điểm tham quan (*Hình 2*), nếu chọn Đà Nẵng thì có 7 địa điểm tham quan

(*Hình 3*). Hỏi gia đình bạn Dương có bao nhiêu cách để chọn hai địa điểm ở Quy Nhơn và Đà Nẵng để tham quan theo dự định trên?

*Giải*

Việc chọn hai địa điểm ở Quy Nhơn và Đà Nẵng để tham quan là thực hiện hai hành động liên tiếp: chọn một địa điểm ở Quy Nhơn, sau đó chọn một địa điểm ở Đà Nẵng.

Có 5 cách chọn địa điểm tham quan ở Quy Nhơn.

Với mỗi cách chọn một địa điểm tham quan ở Quy Nhơn, có 7 cách chọn địa điểm tham quan ở Đà Nẵng.

Vậy gia đình bạn Dương có tất cả 5 . 7 = 35 cách chọn hai địa điểm ở Quy Nhơn và Đà Nẵng để tham quan theo dự định trên.

### Vấn đề 3. Đếm bằng sơ đồ hình cây

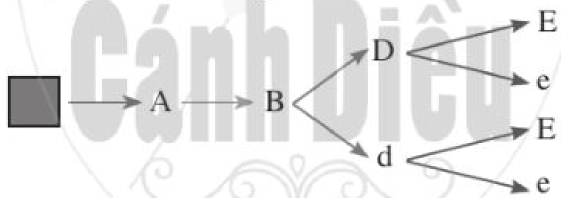
***Ví dụ 3*** Cho kiểu gen AABBDdEe. Giả sử quá trình giảm phân tạo giao tử bình thường, không xảy ra đột biến.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử.

b) Từ **đó**, tính số loại giao tử của kiểu gen AABBDdEe.

*Giải*

a) Sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử:




b) Từ sơ đồ hình cây, ta có 4 loại giao tử của kiểu gen AABBDdEe.

## C. BÀI TẬP

**1.** Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động. Nếu hành động thứ nhất có $a$ cách thực hiện, hành động thứ hai có $b$ cách thực hiện, hành động thứ ba có $c$ cách thực hiện (các cách thực hiện của ba hành động là khác nhau đôi một) thì số cách hoàn thành công việc đó là:

**A.** $abc$. **B.** $a + b + c$. **C.** 1. **D.** $ab + c$.

**2.** Một công việc được hoàn thành bởi ba hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có $a$ cách thực hiện; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có $b$

cách thực hiện hành động thứ hai; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất và mỗi cách thực hiện hành động thứ hai có $c$ cách thực hiện hành động thứ ba thì số cách hoàn thành công việc đó là:

**A.** $abc$. **B.** $a + b + c$. **C.** 1. **D.** $ab + c$.

**3.** Lớp 10A có 10 bạn nữ và 25 bạn nam. Có bao nhiêu cách chọn một bạn để làm lớp trưởng?

**4.** Bạn Nam có 8 quyển sách Toán, 6 quyển sách Vật lí và 5 quyển sách Hóa học, các quyển sách là khác nhau. Hỏi bạn Nam có bao nhiêu cách chọn một quyển sách để đọc?

**5.** Cho 20 điểm phân biệt. Hỏi lập được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$? Biết rằng hai đầu mút của mỗi vectơ là 2 trong 20 điểm đã cho.

**6.** Bạn Quân dự định đặt mật khẩu cho vali của mình bằng dãy có 3 kí tự là các chữ số. Hỏi có bao nhiêu cách để Quân có thể đặt một mật khẩu cho vali?

**7.** Lớp 10A có 30 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn ban cán sự lớp gồm 3 thành viên: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó học tập, 1 lớp phó văn thể. Hỏi giáo viên có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự lớp?

**8.** Trong loạt đá luân lưu giữa hai đội tuyển, huấn luyện viên của một đội phải lập danh sách 5 cầu thủ từ 11 cầu thủ trên sân và xếp thứ tự đá luân lưu của họ. Hỏi huấn luyện viên có bao nhiêu cách lập một danh sách cầu thủ đá luân lưu? Biết ông sẽ để đội trưởng là người sút lượt thứ nhất và tiền đạo cắm (không phải đội trưởng) là người sút lượt thứ ba.

**9.** Có 10 cặp vợ chồng dự tiệc. Tính số cách chọn ra một nam và một nữ trong bữa tiệc để phát biểu ý kiến, sao cho:

a) Hai người đó là một cặp vợ chồng;

b) Hai người đó không là vợ chồng.

**10.** Cho kiểu gen AaBBDdEe. Giả sử quá trình giảm phân tạo giao tử bình thường, không xảy ra đột biến.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử.

b) Từ đó, tính số loại giao tử của kiểu gen AaBBDdEe.

# §2 HOÁN VỊ. CHỈNH HỢP

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Hoán vị

Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử $(n \in \mathbb{N}^*)$.

– Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự $n$ phần tử của tập hợp $A$ được gọi là một hoán vị của $n$ phần tử đó.

– Kí hiệu $P_n$ là số các hoán vị của $n$ phần tử. Ta có:

$$P_n = n(n-1) \,.\, \ldots \,.\, 2 \,.\, 1 = n!.$$

### 2. Chỉnh hợp

Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử và một số nguyên $k$ với $1 \le k \le n$.

– Mỗi kết quả của việc lấy $k$ phần tử từ $n$ phần tử của tập hợp $A$ và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập $k$ của $n$ phần tử đã cho.

– Kí hiệu $A_n^k$ là số các chỉnh hợp chập $k$ của $n$ phần tử $(1 \le k \le n)$.

Ta có: $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

## B. VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Tính số các hoán vị

***Ví dụ 1*** Trong giờ học thể dục, thầy giáo yêu cầu cả lớp chia thành các nhóm tự luyện tập. Nhóm bạn An có bao nhiêu cách xếp thành một hàng dọc? Biết nhóm của An có 6 người.

*Giải*

Mỗi cách xếp thứ tự vị trí cho 6 bạn là một hoán vị của 6 phần tử. Vậy số cách xếp nhóm bạn An thành một hàng dọc là: $P_6 = 6! = 720$.

***Ví dụ 2*** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau?

*Giải*

Mỗi số tự nhiên lập được là một hoán vị của 7 chữ số đã cho. Số các số tự nhiên có thể lập được là: $P_7 = 7! = 5\,040$.

**Ví dụ 3** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau?

*Giải*

Xét số tự nhiên có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$.

*Trường hợp 1:* $a_1$ có thể bằng 0 hoặc khác 0.

Với $a_1$ có thể bằng 0 hoặc khác 0, mỗi số có dạng trên là một hoán vị của 8 chữ số đã cho. Do đó, số các số có thể lập được trong trường hợp 1 là: $P_8 = 8! = 40\,320$.

*Trường hợp 2:* $a_1 = 0$.

Vì $a_1 = 0$ cố định nên 7 chữ số sau $a_1$ đều khác 0 và chỉ có 7 chữ số đó thay đổi. Suy ra, mỗi số có dạng $\overline{0a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ là một hoán vị của 7 chữ số khác 0 đã cho. Do đó, số các số có thể lập được trong trường hợp 2 là: $P_7 = 7! = 5\,040$.

Vậy số các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau có thể lập được là:

$$40\,320 - 5\,040 = 35\,280.$$

**Ví dụ 4** Bạn Nam có 4 quyển sách Toán, 6 quyển sách Tiếng Anh (các quyển sách là khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách xếp các quyển sách thành hàng ngang sao cho:

a) Các quyển sách cùng môn thì xếp cạnh nhau (không có quyển sách Toán nào nằm giữa hai quyển sách Tiếng Anh và ngược lại)?

b) Các quyển sách Toán thì xếp cạnh nhau?

*Giải*

a) Xếp 4 quyển sách Toán cạnh nhau thành một nhóm có $P_4 = 4! = 24$ (cách).

Xếp 6 quyển sách Tiếng Anh cạnh nhau thành một nhóm có $P_6 = 6! = 720$ (cách).

Có $P_2 = 2! = 2$ cách xếp hai nhóm sách trên.

Vậy số cách xếp các quyển sách sao cho các quyển sách cùng môn thì xếp cạnh nhau là:

$$24\,.\,720\,.\,2 = 34\,560.$$

b) Xếp 4 quyển sách Toán cạnh nhau thành một nhóm có

$$P_4 = 4! = 24 \text{ (cách)}.$$

Coi nhóm sách Toán là một quyển sách, gọi là *A*, xếp quyển sách *A* và 6 quyển sách Tiếng Anh có

$$P_7 = 7! = 5\,040 \text{ (cách)}.$$

Vậy số cách xếp các quyển sách sao cho các quyển sách Toán thì xếp cạnh nhau là:

$$24\,.\,5\,040 = 120\,960.$$

## Vấn đề 2. Tính số các chỉnh hợp

**Ví dụ 5** Bạn Dũng mới mua điện thoại và muốn lập mật khẩu có 6 chữ số đôi một khác nhau. Hỏi bạn Dũng có bao nhiêu cách để lập một mật khẩu?

*Giải*

Mỗi mật khẩu có thể lập được là một cách chọn 6 chữ số từ 10 chữ số và sắp xếp thứ tự của chúng, tức là một chỉnh hợp chập 6 của 10 phần tử.

Vậy bạn Dũng có $A_{10}^{6} = 151\,200$ (cách lập mật khẩu).

**Ví dụ 6** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau?

*Giải*

Mỗi số tự nhiên lập được là một chỉnh hợp chập 5 của 7 chữ số đã cho. Số các số tự nhiên có thể lập được là: $A_7^5 = 2\,520$.

**Ví dụ 7** Trong một buổi kỉ niệm ngày thành lập trường, bí thư Đoàn trường cần chọn 4 tiết mục từ 6 tiết mục hát và 4 tiết mục từ 5 tiết mục múa rồi xếp thứ tự biểu diễn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn và xếp thứ tự sao cho các tiết mục hát và múa xen kẽ nhau?

*Giải*

Giả sử các tiết mục được biểu diễn đánh số thứ tự từ 1 đến 8. Vì số lượng tiết mục hát và múa bằng nhau nên có hai trường hợp:

*Trường hợp 1:* Tiết mục hát diễn ra đầu tiên

Khi đó, các tiết mục hát có số thứ tự là số lẻ, còn các tiết mục múa có số thứ tự là số chẵn. Như vậy, thứ tự của các tiết mục múa và hát được cố định, chỉ thay đổi thứ tự giữa các tiết mục múa, hoặc giữa các tiết mục hát.

Chọn 4 tiết mục hát từ 6 tiết mục hát và xếp thứ tự có $A_6^4 = 360$ (cách).

Chọn 4 tiết mục múa từ 5 tiết mục múa và xếp thứ tự có $A_5^4 = 120$ (cách).

Khi đó, số cách chọn và xếp thứ tự các tiết mục văn nghệ trong trường hợp tiết mục hát diễn ra đầu tiên là: $360 \,.\, 120 = 43\,200$.

*Trường hợp 2:* Tiết mục múa diễn ra đầu tiên

Tương tự, số cách chọn và xếp thứ tự các tiết mục văn nghệ trong trường hợp tiết mục múa diễn ra đầu tiên là: $120 \,.\, 360 = 43\,200$.

Vậy số cách chọn và xếp thứ tự các tiết mục văn nghệ sao cho các tiết mục hát và múa xen kẽ nhau là: $43\,200 + 43\,200 = 86\,400$.

## C. BÀI TẬP

**11.** Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$). Mỗi hoán vị của $n$ phần tử đó là:

**A.** Một kết quả của sự sắp xếp thứ tự $n$ phần tử của tập hợp $A$.

**B.** Tất cả kết quả của sự sắp xếp thứ tự $n$ phần tử của tập hợp $A$.

**C.** Một số được tính bằng $n(n-1). \ldots .2.1$.

**D.** Một số được tính bằng $n!$.

**12.** Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử và một số nguyên $k$ với $1 \leq k \leq n$. Mỗi chỉnh hợp chập $k$ của $n$ phần tử đã cho là:

**A.** Một kết quả của sự sắp xếp thứ tự $n$ phần tử của tập hợp $A$.

**B.** Tất cả kết quả của việc lấy $k$ phần tử từ $n$ phần tử của tập hợp $A$ và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó.

**C.** Một kết quả của việc lấy $k$ phần tử từ $n$ phần tử của tập hợp $A$ và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó.

**D.** Một số được tính bằng $n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

**13**. Cho $k$, $n$ là các số nguyên dương, $k \leq n$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

**A.** $\mathrm{A}_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

**B.** $\mathrm{P}_n = n(n-1). \ldots .2.1$.

**C.** $\mathrm{P}_n = n!$.

**D.** $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$.

**14.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ta lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Gồm 9 chữ số đôi một khác nhau?

b) Gồm 7 chữ số đôi một khác nhau?

**15.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ta lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Gồm 10 chữ số đôi một khác nhau?

b) Gồm 6 chữ số đôi một khác nhau?

**16.** Một tổ có 8 học sinh gồm 4 nữ và 4 nam. Có bao nhiêu cách xếp các học sinh trong tổ:

a) Thành một hàng dọc?

b) Thành một hàng dọc sao cho nam, nữ đứng xen kẽ nhau?

**17.** 90 học sinh được trường tổ chức cho đi xem kịch ở rạp hát thành phố. Các ghế ở rạp được sắp thành các hàng. Mỗi hàng có 30 ghế.

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp 30 học sinh để ngồi vào hàng đầu tiên?

b) Sau khi sắp xếp xong hàng đầu tiên, có bao nhiêu cách sắp xếp 30 học sinh để ngồi vào hàng thứ hai?

c) Sau khi sắp xếp xong hai hàng đầu, có bao nhiêu cách sắp xếp 30 học sinh để ngồi vào hàng thứ ba?

**18.** Bạn Đan chọn mật khẩu cho email của mình gồm 6 kí tự đôi một khác nhau, trong đó, 2 kí tự đầu tiên là 2 chữ cái trong bảng gồm 26 chữ cái in thường, 3 kí tự tiếp theo là chữ số, kí tự cuối cùng là 1 trong 3 kí tự đặc biệt. Bạn Đan có bao nhiêu cách tạo ra một mật khẩu?

**19.** Một lớp có 40 học sinh chụp ảnh tổng kết năm học. Lớp đó muốn trong bức ảnh có 18 học sinh ngồi ở hàng đầu và 22 học sinh đứng ở hàng sau. Có bao nhiêu cách xếp vị trí chụp ảnh như vậy?

# §3 TỔ HỢP

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Định nghĩa

Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử và một số nguyên $k$ với $1 \le k \le n$.

Mỗi tập con gồm $k$ phần tử được lấy ra từ $n$ phần tử của $A$ được gọi là một tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử đó.

### 2. Số các tổ hợp

Kí hiệu $\mathrm{C}_n^k$ là số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử với $1 \le k \le n$. Ta có: $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}$.

*Quy ước*: $0! = 1$; $\mathrm{C}_n^0 = 1$.

Với những quy ước trên, ta có: $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ với $0 \le k \le n$.

### 3. Tính chất của các số $\mathrm{C}_n^k$

Ta có hai đẳng thức sau: $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$ và $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^k = \mathrm{C}_n^k$ $(1 \le k < n)$.

## B. VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Tính số tổ hợp

***Ví dụ 1*** Một lớp có 24 học sinh nam và 16 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn:

a) 3 học sinh làm ban cán sự của lớp?

b) 3 học sinh làm ban cán sự của lớp sao cho trong đó có 2 học sinh nam?

c) 3 học sinh làm ban cán sự của lớp sao cho trong đó có ít nhất 1 học sinh nam?

*Giải*

a) Mỗi cách chọn 3 học sinh trong 40 học sinh là một tổ hợp chập 3 của 40. Số cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự của lớp là: $C_{40}^3 = 9\,880$.

b) Mỗi cách chọn 2 học sinh nam trong 24 học sinh nam là một tổ hợp chập 2 của 24. Số cách chọn 2 học sinh nam trong 24 học sinh nam là: $C_{24}^2 = 276$.

Mỗi cách chọn 1 học sinh nữ trong 16 học sinh nữ là một tổ hợp chập 1 của 16.

Số cách chọn 1 học sinh nữ trong 16 học sinh nữ là: $C_{16}^1 = 16$.

Vậy số cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp sao cho trong đó có 2 học sinh nam là: $276 \,.\, 16 = 4\,416$.

c) *Cách 1:*

Để ban cán sự lớp có ít nhất 1 học sinh nam thì xảy ra các trường hợp:

*Trường hợp 1:*

Chọn 1 học sinh nam và 2 học sinh nữ có

$$C_{24}^1 \,.\, C_{16}^2 = 24 \,.\, 120 = 2\,880 \text{ (cách chọn).}$$

*Trường hợp 2:*

Chọn 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ có

$$C_{24}^2 \,.\, C_{16}^1 = 276 \,.\, 16 = 4\,416 \text{ (cách chọn).}$$

*Trường hợp 3:*

Chọn 3 học sinh nam có $C_{24}^3 = 2\,024$ (cách chọn).

Vậy số cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự của lớp sao cho trong đó có ít nhất 1 học sinh nam là:

$$2\,880 + 4\,416 + 2\,024 = 9\,320.$$

*Cách 2:*

Số cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự của lớp là: $C_{40}^3 = 9\,880$.

Số cách chọn 3 học sinh nữ làm ban cán sự của lớp là: $C_{16}^3 = 560$.

Vậy số cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự của lớp sao cho trong đó có ít nhất 1 học sinh nam là:

$$9\,880 - 560 = 9\,320.$$

### Vấn đề 2. Chứng minh hệ thức tổ hợp

*Ví dụ 2* Chứng minh rằng:

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$ với $0 \le k \le n$;

b) $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$ với $1 \le k < n$.

*Giải*

Ta có:

a) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{[n-(n-k)]!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}$.

b) $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} + \dfrac{(n-1)!}{k![(n-1)-k]!}$

$$= (n-1)!\left[\frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{n-k}{k!(n-k)!}\right] = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

## C. BÀI TẬP

**20.** Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử và một số nguyên $k$ với $1 \le k \le n$. Mỗi tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử đó là:

**A.** Tất cả kết quả của việc lấy $k$ phần tử từ $n$ phần tử của tập hợp $A$ và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó.

**B.** Một tập con gồm $k$ phần tử được lấy ra từ $n$ phần tử của $A$.

**C.** Một kết quả của việc lấy $k$ phần tử từ $n$ phần tử của tập hợp $A$ và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó.

**D.** Tất cả tập con gồm $k$ phần tử được lấy ra từ $n$ phần tử của $A$.

**21**. Cho $k$, $n$ là các số nguyên dương, $k \le n$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

**A.** $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$.

**B.** $C_n^k = C_n^{n-k}$.

**C.** $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{(n-k)!}$.

**D.** $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

**22.** Tính số đoạn thẳng có hai đầu mút là 2 trong 10 điểm phân biệt.

**23.** Cho $n$ điểm phân biệt ($n > 1$). Biết rằng, số đoạn thẳng có hai đầu mút là 2 trong $n$ điểm đã cho bằng 78. Tìm $n$.

**24.** Tính số đường chéo của một đa giác lồi có 12 đỉnh.

**25.** Cho đa giác lồi $n$ đỉnh ($n > 3$). Biết rằng, số đường chéo của đa giác đó là 170. Tìm $n$.

**26**. Bạn Nam đến cửa hàng mua 2 chiếc ghế loại A. Tại cửa hàng, ghế loại A màu xanh có 20 chiếc và ghế loại A màu đỏ có 15 chiếc. Hỏi bạn Nam có bao nhiêu cách chọn mua 2 chiếc ghế loại A?

**27.** Chứng minh rằng:

a) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ với $1 \le k \le n$;

b) $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ với $0 \le k \le n$.

# §4 NHỊ THỨC NEWTON

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Công thức khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n$ với $n = 4$, $n = 5$:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4\\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5\\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.\end{aligned}$$

*Nhận xét:* $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

## B. VÍ DỤ

**Vấn đề 1. Khai triển nhị thức $(a+b)^n$ với $n = 4$, $n = 5$**

*Ví dụ 1* Khai triển các biểu thức sau:

a) $(a+2)^4$; b) $(a-2)^4$.

*Giải*

a) $(a+2)^4 = a^4 + 4 \,.\, a^3 \,.\, 2 + 6 \,.\, a^2 \,.\, 2^2 + 4 \,.\, a \,.\, 2^3 + 2^4 = a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16$.

b) $(a-2)^4 = a^4 - 4 \,.\, a^3 \,.\, 2 + 6 \,.\, a^2 \,.\, 2^2 - 4 \,.\, a \,.\, 2^3 + 2^4 = a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$.

***Ví dụ 2*** Cho $x$ là số thực khác 0. Khai triển các biểu thức sau:

a) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$; b) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$.

*Giải*

a) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4 = x^4 + 4x^3\dfrac{1}{x} + 6x^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + 4x\left(\dfrac{1}{x}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^4 = x^4 + 4x^2 + 6 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$.

b) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4 = x^4 - 4x^3\dfrac{1}{x} + 6x^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - 4x\left(\dfrac{1}{x}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^4 = x^4 - 4x^2 + 6 - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$.

***Ví dụ 3*** Khai triển các biểu thức sau:

a) $(2x+1)^5$; b) $(2x-1)^5$.

*Giải*

a) $(2x+1)^5 = (2x)^5 + 5 \,.\, (2x)^4 \,.\, 1 + 10 \,.\, (2x)^3 \,.\, 1^2 + 10 \,.\, (2x)^2 \,.\, 1^3 + 5 \,.\, (2x) \,.\, 1^4 + 1^5$
$= 32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$.

b) $(2x-1)^5 = (2x)^5 - 5 \,.\, (2x)^4 \,.\, 1 + 10 \,.\, (2x)^3 \,.\, 1^2 - 10 \,.\, (2x)^2 \,.\, 1^3 + 5 \,.\, (2x) \,.\, 1^4 - 1^5$
$= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$.

**Vấn đề 2. Xác định hệ số của $x^k$ trong khai triển biểu thức $(ax + b)^n$ với $n = 4$, $n = 5$**

***Ví dụ 4*** Xác định hệ số của $x^3$ trong khai triển biểu thức $(3x-4)^4$.

*Giải*

Số hạng chứa $x^3$ trong khai triển biểu thức $(3x-4)^4$ là $4 \,.\, (3x)^3 \,.\, (-4) = -432x^3$.
Vậy hệ số của $x^3$ trong khai triển biểu thức $(3x-4)^4$ là $-432$.

***Ví dụ 5*** Xác định hệ số của $x^2$ trong khai triển biểu thức $(3x-2)^5$.

*Giải*

Số hạng chứa $x^2$ trong khai triển biểu thức $(3x-2)^5$ là $10 \,.\, (3x)^2 \,.\, (-2)^3 = -720x^2$.
Vậy hệ số của $x^2$ trong khai triển biểu thức $(3x-2)^5$ là $-720$.

## C. BÀI TẬP

**28.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

**A.** $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

**B.** $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

**C.** $(a+b)^4 = b^4 + 4b^3a + 6b^2a^2 + 4ba^3 + a^4$.

**D.** $(a+b)^4 = a^4 + b^4$.

**29.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

**A.** $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

**B.** $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 - 5ab^4 + b^5$.

**C.** $(a+b)^5 = a^5 + b^5$.

**D.** $(a-b)^5 = a^5 - b^5$.

**30.** Hệ số của $x^3$ trong khai triển biểu thức $(2x-1)^4$ là:

**A.** 32. **B.** – 32. **C.** 8. **D.** – 8.

**31.** Hệ số của $x$ trong khai triển biểu thức $(x-2)^5$ là:

**A.** 32. **B.** – 32. **C.** 80. **D.** – 80.

**32.** Khai triển các biểu thức sau:

a) $(4x+1)^4$; b) $(5x-3)^4$; c) $\left(\frac{1}{3}x+5\right)^5$; d) $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^5$.

**33.** Xác định hệ số của $x^2$ trong khai triển biểu thức $(4x-3)^4$.

**34.** Xác định hệ số của $x^3$ trong khai triển biểu thức $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)^5$.

**35.** Cho $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Tính:

a) $a_2$; b) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

**36.** Cho $\left(\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$. Tính:

a) $a_3$; b) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

**37*.** Tính các tổng sau (không sử dụng máy tính cầm tay):

a) $T = C_4^0 + \frac{1}{2}C_4^1 + \frac{1}{3}C_4^2 + \frac{1}{4}C_4^3 + \frac{1}{5}C_4^4$;

b) $S = C_6^1 + 2C_6^2 + 3C_6^3 + 4C_6^4 + 5C_6^5 + 6C_6^6$.

# BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

**38.** Khi đi từ nhà đến trường, bạn Thảo muốn đi qua hiệu sách. Biết rằng, có 3 con đường từ nhà bạn Thảo đến hiệu sách và 2 con đường từ hiệu sách đến trường. Bạn Thảo có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà đến trường, qua hiệu sách?

**A.** 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 2.

**39**. Bạn Huy cần đi từ nhà đến một hiệu sách. Biết rằng, từ nhà bạn Huy có hai hướng đi: theo hướng đi thứ nhất có 2 hiệu sách, theo hướng đi thứ hai có 3 hiệu sách. Bạn Huy có bao nhiêu cách chọn một hiệu sách để đến?

**A.** 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 2.

**40.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

**A.** $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ với $k$, $n$ là các số tự nhiên, $0 \le k \le n$.

**B.** $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ với $k$, $n$ là các số tự nhiên, $1 \le k \le n$.

**C.** $\mathrm{P}_n = n!$ với $n$ là số nguyên dương.

**D.** $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

**41.** Cho 20 điểm phân biệt và không có ba điểm nào thẳng hàng. Lập được bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong 20 điểm đã cho?

**A.** 1 140. **B.** 60. **C.** 6 840. **D.** 8 000.

**42.** Một trường trung học phổ thông được cử hai học sinh đi dự trại hè thành phố. Nhà trường quyết định chọn hai học sinh từ lớp 11A và lớp 12A. Biết rằng lớp 11A có 34 học sinh và lớp 12A có 36 học sinh. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn nếu:

a) Hai học sinh được chọn khác lớp?

**A.** 70. **B.** 1 224. **C.** 34. **D.** 36.

b) Hai học sinh được chọn cùng lớp?

**A.** 1 191. **B.** 34. **C.** 36. **D.** 1 224.

**43.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, lập được bao nhiêu số gồm bốn chữ số sao cho chữ số hàng nghìn lớn hơn chữ số hàng trăm, chữ số hàng trăm lớn hơn chữ số hàng chục, chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị?

**A.** 840. **B.** 5 040. **C.** 35. **D.** 2 401.

**44.** Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x-2y)^4$;

b) $(-3x-y)^5$.

**45.** Xác định hệ số của $x^3$ trong khai triển biểu thức $(5x-1)^4$.

**46.** Xác định hệ số của $x^4$ trong khai triển biểu thức $(2x+3)^5$.

**47.** Các bạn lớp 10A lập kế hoạch đi du lịch chỉ một trong hai thành phố là thành phố M hoặc thành phố N. Vì đi trong ngày nên các bạn cần lập danh sách 4 địa điểm tham quan và thứ tự đi các địa điểm đó từ trước. Biết rằng, các bạn liệt kê ra 10 địa điểm có thể đi ở thành phố M và 4 địa điểm có thể đi ở thành phố N. Các bạn lớp 10A có bao nhiêu cách lập một danh sách các địa điểm để đi du lịch?

**48.** Giải bóng chuyền gồm 9 đội tham dự, trong đó có 3 đội của nước X. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để xếp các đội vào 3 bảng A, B, C và mỗi bảng có 3 đội. Tính số cách xếp sao cho 3 đội bóng của nước X ở 3 bảng khác nhau.

**49.** Một đề thi học sinh giỏi lớp 10 môn Toán gồm 5 câu được chọn từ 15 câu thông hiểu, 10 câu vận dụng thấp và 5 câu vận dụng cao. Một đề thi được gọi là tốt nếu trong đề thi có cả ba loại mức độ, đồng thời số câu thông hiểu không ít hơn 2. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi tốt?

**50*.** Trong một bài thi bằng hình thức trắc nghiệm có 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời A, B, C, D. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 0,2 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 0,1 điểm. Nếu thí sinh chọn ngẫu nhiên đáp án của tất cả 50 câu hỏi thì số khả năng đạt 9,4 điểm ở bài thi trên là bao nhiêu?

# LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

## §1 QUY TẮC CỘNG. QUY TẮC NHÂN. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

**1.** B. **2.** A.

**3.** $10 + 25 = 35$ (cách chọn).

**4.** $8 + 6 + 5 = 19$ (cách chọn).

**5.** $20 \,.\, 19 = 380$ (vectơ).

**6.** $10^3 = 1\,000$ (cách).

**7.** $30 \,.\, 29 \,.\, 28 = 24\,360$ (cách chọn).

**8.** Vì đội trưởng là người sút lượt thứ nhất và tiền đạo cắm là người sút lượt thứ ba nên chỉ còn 3 lượt sút thứ hai, thứ tư, thứ năm để sắp xếp. Sau khi xếp lượt sút của đội trưởng và tiền đạo cắm thì còn 9 cầu thủ để chọn. Vậy số cách lập một danh sách cầu thủ đá luân lưu là $9 \,.\, 8 \,.\, 7 = 504$.

**9.** a) Có 10 cách chọn một nam. Sau khi chọn một nam, chỉ có 1 cách chọn một nữ sao cho hai người đó là vợ chồng. Vậy có $10 \,.\, 1 = 10$ cách chọn hai người là một cặp vợ chồng.

b) Có 10 cách chọn một nam. Sau khi chọn một nam, có 9 cách chọn một nữ không là vợ của nam đã chọn. Vậy có $10 \,.\, 9 = 90$ cách chọn hai người không là vợ chồng.

**10.** a) Học sinh tự làm.

b) Có 8 loại giao tử của kiểu gen AaBBDdEe.

## §2 HOÁN VỊ. CHỈNH HỢP

**11.** A. **12.** C. **13.** D.

**14.** a) Có $P_9 = 9! = 362\,880$ (số).

b) Có $A_9^7 = 181\,440$ (số).

**15.** a) Có $10! - 9! = 3\,265\,920$ (số). b) Có $A_{10}^6 - A_9^5 = 136\,080$ (số).

**16.** a) Có $8! = 40\ 320$ cách xếp.

b) Vì số lượng nam và nữ bằng nhau nên có hai trường hợp: nam đứng đầu hàng hoặc nữ đứng đầu hàng.

Số cách xếp nếu nam đứng đầu hàng là $4!\ .\ 4! = 576$.

Số cách xếp nếu nữ đứng đầu hàng là $4!\ .\ 4! = 576$.

Vậy số cách xếp một hàng dọc sao cho nam, nữ đứng xen kẽ nhau là:

$$576 + 576 = 1\ 152.$$

**17.** a) Có $A_{90}^{30}$ cách sắp xếp 30 học sinh ngồi vào hàng đầu tiên.

b) Sau khi sắp xếp xong hàng đầu tiên, còn 60 học sinh. Khi đó, có $A_{60}^{30}$ cách sắp xếp 30 học sinh ngồi vào hàng thứ hai.

c) Sau khi sắp xếp xong hai hàng đầu, còn 30 học sinh. Khi đó, có 30! cách sắp xếp 30 học sinh còn lại ngồi vào hàng thứ ba.

**18.** Có $A_{26}^{2} = 650$ cách chọn 2 kí tự đầu. Có $A_{10}^{3} = 720$ cách chọn 3 kí tự tiếp theo. Có 3 cách chọn 1 kí tự cuối cùng.

Vậy số cách tạo ra một mật khẩu là: $650\ .\ 720\ .\ 3 = 1\ 404\ 000$.

**19.** *Cách 1:* Chọn 18 học sinh ngồi ở hàng đầu có $A_{40}^{18}$ cách.

Xếp vị trí của 22 học sinh còn lại đứng ở hàng sau có 22! cách.

Vậy số cách xếp vị trí chụp ảnh là $A_{40}^{18}\ .\ 22!$.

*Cách 2:* Vì ta có thể xếp vị trí của 40 học sinh rồi chia 18 học sinh ngồi ở hàng đầu và 22 học sinh đứng ở hàng sau nên số cách xếp vị trí chụp ảnh có thể tính bằng 40!.

## §3 TỔ HỢP

**20.** B. **21.** C.

**22.** Mỗi đoạn thẳng tương ứng với một cặp điểm (không tính thứ tự) chọn trong 10 điểm phân biệt nên có $C_{10}^{2} = 45$ đoạn thẳng.

**23.** Số đoạn thẳng có hai đầu mút là 2 trong $n$ điểm đã cho là $C_n^2 = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$.

Theo đề bài, ta có:

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 78 \Rightarrow \frac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!} = 156 \Rightarrow n^2 - n - 156 = 0.$$

Giải phương trình $n^2 - n - 156 = 0$ $(n > 1)$ ta có: $n = 13$ hoặc $n = -12$ (loại).

Vậy $n = 13$.

**24.** Mỗi đường chéo tương ứng với một cặp đỉnh (không tính cạnh) chọn trong 12 đỉnh của đa giác lồi nên có $C_{12}^2 - 12 = 54$ đường chéo.

**25.** Số đường chéo của đa giác lồi $n$ đỉnh là $C_n^2 - n = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} - n$.

Theo đề bài, ta có:

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} - n = 170 \Rightarrow (n-1)n - 2n = 340 \Rightarrow n^2 - 3n - 340 = 0.$$

Giải phương trình trên $(n > 3)$ ta có: $n = 20$ hoặc $n = -17$ (loại).

Vậy $n = 20$.

**26.** Tổng số ghế loại A là: $20 + 15 = 35$ (chiếc)

Vậy số cách chọn mua 2 chiếc ghế loại A là: $C_{35}^2 = 595$.

**27.** Ta có:

a) $$kC_n^k = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k\,.\,n!}{k(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}$$
$$= nC_{n-1}^{k-1}.$$

b) $$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$$
$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}.$$

## §4 NHỊ THỨC NEWTON

**28. D**. **29. A**. **30. B**. **31. C**.

**32.** a) $(4x+1)^4 = 256x^4 + 256x^3 + 96x^2 + 16x + 1$.

b) $(5x-3)^4 = 625x^4 - 1\,500x^3 + 1\,350x^2 - 540x + 81$.

c) $$\left(\frac{1}{3}x + 5\right)^5 = \frac{1}{243}x^5 + \frac{25}{81}x^4 + \frac{250}{27}x^3 + \frac{1\,250}{9}x^2 + \frac{3\,125}{3}x + 3\,125.$$

d) $$\left(3x - \frac{1}{3}\right)^5 = 243x^5 - 135x^4 + 30x^3 - \frac{10}{3}x^2 + \frac{5}{27}x - \frac{1}{243}.$$

**33.** Hệ số của $x^2$ trong khai triển biểu thức $(4x-3)^4$ là 864.

**34.** Hệ số của $x^3$ trong khai triển biểu thức $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)^5$ là $\frac{5}{27}$.

**35.** a) $a_2=\frac{8}{3}$.

b) $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=a_0+a_1 \cdot 1+a_2 \cdot 1^2+a_3 \cdot 1^3+a_4 \cdot 1^4$

$$=\left(2 \cdot 1-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{625}{81}.$$

**36.** a) $a_3=\frac{27}{50}$.

b) $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=a_0+a_1 \cdot 1+a_2 \cdot 1^2+a_3 \cdot 1^3+a_4 \cdot 1^4+a_5 \cdot 1^5$

$$=\left(\frac{3}{5} \cdot 1+\frac{1}{2}\right)^5=\frac{161\,051}{100\,000}.$$

**37*.** Dựa vào kết quả chứng minh của bài 27 chương V là

$$\frac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k=\frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}\ (0 \le k \le n),$$

ta có:

a) $T=1\mathrm{C}_4^0+\frac{1}{2}\mathrm{C}_4^1+\frac{1}{3}\mathrm{C}_4^2+\frac{1}{4}\mathrm{C}_4^3+\frac{1}{5}\mathrm{C}_4^4=\frac{1}{5}\mathrm{C}_5^1+\frac{1}{5}\mathrm{C}_5^2+\frac{1}{5}\mathrm{C}_5^3+\frac{1}{5}\mathrm{C}_5^4+\frac{1}{5}\mathrm{C}_5^5$

$=\frac{1}{5} \cdot (\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_5^2+\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_5^4+\mathrm{C}_5^5)=\frac{1}{5} \cdot [(\mathrm{C}_5^0+\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_5^2+\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_5^4+\mathrm{C}_5^5)-\mathrm{C}_5^0]$

$=\frac{1}{5} \cdot [(1+1)^5-1]=\frac{31}{5}.$

b) Áp dụng kết quả $k\mathrm{C}_n^k=n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ $(1 \le k \le n)$ ta có

$S=1\mathrm{C}_6^1+2\mathrm{C}_6^2+3\mathrm{C}_6^3+4\mathrm{C}_6^4+5\mathrm{C}_6^5+6\mathrm{C}_6^6$

$=6\mathrm{C}_{6-1}^{1-1}+6\mathrm{C}_{6-1}^{2-1}+6\mathrm{C}_{6-1}^{3-1}+6\mathrm{C}_{6-1}^{4-1}+6\mathrm{C}_{6-1}^{5-1}+6\mathrm{C}_{6-1}^{6-1}$

$=6 \cdot (\mathrm{C}_5^0+\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_5^2+\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_5^4+\mathrm{C}_5^5)$

$=6 \cdot (\mathrm{C}_5^0 \cdot 1^5+\mathrm{C}_5^1 \cdot 1^4 \cdot 1+\mathrm{C}_5^2 \cdot 1^3 \cdot 1^2+\mathrm{C}_5^3 \cdot 1^2 \cdot 1^3+\mathrm{C}_5^4 \cdot 1 \cdot 1^4+\mathrm{C}_5^5 \cdot 1^5)$

$=6 \cdot (1+1)^5=6 \cdot 2^5=192.$

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

**38. B**. **39. C**. **40. A**. **41. A**. **42.** a) **B**. b) **A**. **43. C**.

**44.** a) $(x-2y)^4 = x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$.

b) $(-3x-y)^5 = -243x^5 - 405x^4y - 270x^3y^2 - 90x^2y^3 - 15xy^4 - y^5$.

**45.** Hệ số của $x^3$ trong khai triển biểu thức $(5x-1)^4$ là $-500$.

**46.** Hệ số của $x^4$ trong khai triển biểu thức $(2x+3)^5$ là 240.

**47.** Nếu đi thành phố M, lớp 10A có $A_{10}^4 = 5\,040$ cách lập một danh sách 4 địa điểm tham quan.

Nếu đi thành phố N, lớp 10A có $P_4 = 4! = 24$ cách lập một danh sách 4 địa điểm tham quan.

Vậy số cách lập một danh sách các địa điểm để tham quan là

$$5\,040 + 24 = 5\,064.$$

**48.** Xếp 3 đội của nước X vào 3 bảng khác nhau có $3! = 6$ cách.

Xếp 6 đội còn lại vào 3 bảng A, B, C có

$$C_6^2 \,.\, C_4^2 \,.\, C_2^2 = 90 \text{ (cách)}.$$

Vậy số cách xếp sao cho 3 đội bóng của nước X ở 3 bảng khác nhau là:

$$6 \,.\, 90 = 540.$$

**49.** Vì đề thi có số câu thông hiểu không ít hơn 2 và có đủ 3 mức độ nên xảy ra 3 trường hợp:

Nếu đề thi có 3 câu thông hiểu, 1 câu vận dụng thấp và 1 câu vận dụng cao thì có $C_{15}^3 \,.\, C_{10}^1 \,.\, C_5^1 = 22\,750$ (cách chọn đề).

Nếu đề thi có 2 câu thông hiểu, 2 câu vận dụng thấp và 1 câu vận dụng cao thì có $C_{15}^2 \,.\, C_{10}^2 \,.\, C_5^1 = 23\,625$ (cách chọn đề).

Nếu đề thi có 2 câu thông hiểu, 1 câu vận dụng thấp và 2 câu vận dụng cao thì có $C_{15}^2 \,.\, C_{10}^1 \,.\, C_5^2 = 10\,500$ (cách chọn đề).

Vậy số đề thi tốt có thể chọn được là:

$$22\,750 + 23\,625 + 10\,500 = 56\,875.$$

**50*.** Gọi $x$ là số câu trả lời đúng, suy ra $50-x$ là số câu trả lời sai.

Ta có số điểm của thí sinh là $0{,}2x - 0{,}1(50-x) = 9{,}4 \Leftrightarrow x = 48$.

Do đó, thí sinh làm đúng 48 câu và sai 2 câu thì được 9,4 điểm.

Vì mỗi câu hỏi có 1 phương án đúng và 3 phương án sai nên số khả năng đạt 9,4 điểm ở bài thi trên là $C_{50}^{48} \,.\, 1 \,.\, 3^2 = 11\,025$.

Chương VI

# MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

## §1 SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

**I. Sai số của số gần đúng**

**1. Sai số tuyệt đối**

Nếu $a$ là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng $a$.

**2. Độ chính xác của một số gần đúng**

Ta nói $a$ là số gần đúng của $\overline{a}$ với *độ chính xác d* nếu $\Delta_a = |\overline{a} - a| \leq d$ và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

**3. Sai số tương đối**

Tỉ số $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$ được gọi là *sai số tương đối* của số gần đúng $a$.

**II. Số quy tròn. Quy tròn số đúng và số gần đúng**

**1. Số quy tròn**

Khi quy tròn một số nguyên hoặc một số thập phân đến một hàng nào đó thì số nhận được gọi là *số quy tròn* của số ban đầu.

**2. Quy tròn số đến một hàng cho trước**

• Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0.

• Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm một đơn vị vào chữ số của hàng quy tròn.

*Nhận xét:* Ta có thể lấy độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

### 3. Quy tròn số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước

***Quy ước:*** Cho $a$ là số gần đúng với độ chính xác $d$. Giả sử $a$ là số nguyên hoặc số thập phân. Khi được yêu cầu quy tròn số $a$ mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn số $a$ đến hàng thấp nhất mà $d$ nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó.

## B. VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Xác định sai số tuyệt đối, độ chính xác, sai số tương đối của số gần đúng

***Ví dụ 1*** Theo Quyết định số 648/QĐ-BCT ngày 20/3/2019 của Bộ Công Thương, giá bán lẻ điện sinh hoạt từ ngày 20/3/2019 sẽ dao động trong khoảng từ 1 678 đồng đến 2 927 đồng mỗi kWh tuỳ bậc thang. Dưới đây là bảng giá bán lẻ điện sinh hoạt (chưa bao gồm thuế VAT):

| Mức sử dụng điện trong tháng (kWh) | Đơn giá (đồng/kWh) |
|---|---|
| – Bậc 1: Cho kWh từ 0 – 50 | 1 678 |
| – Bậc 2: Cho kWh từ 51 – 100 | 1 734 |
| – Bậc 3: Cho kWh từ 101 – 200 | 2 014 |
| – Bậc 4: Cho kWh từ 201 – 300 | 2 536 |
| – Bậc 5: Cho kWh từ 301 – 400 | 2 834 |
| – Bậc 6: Cho kWh từ 401 – 500 | 2 927 |

Biết rằng, nhà bạn Hoa sử dụng điện trong tháng 3 hết 347 kWh.

a) Nhà bạn Hoa phải trả bao nhiêu tiền điện (bao gồm thuế VAT)?

b) Bạn Hoa nói rằng nhà bạn phải trả số tiền điện là 759 000 đồng, còn em của bạn Hoa nói rằng phải trả số tiền điện là 758 800 đồng. Ai nói chính xác hơn?

*Giải*

a) Số tiền điện nhà bạn Hoa phải trả là:

$$50 \,.\, 1\,678 + 50 \,.\, 1\,734 + 100 \,.\, 2\,014 + 100 \,.\, 2\,536 + 47 \,.\, 2\,834 = 758\,798 \text{ (đồng)}.$$

b) Gọi $\Delta_{T_1}, \Delta_{T_2}$ lần lượt là sai số tuyệt đối của 759 000 và 758 800 so với số đúng 758 798. Ta có:

$$\Delta_{T_1} = |758\,798 - 759\,000| = 202,\ \Delta_{T_2} = |758\,798 - 758\,800| = 2.$$

Vì $\Delta_{T_1} = 202 > 2 = \Delta_{T_2}$ nên em của bạn Hoa nói chính xác hơn.

**Ví dụ 2** Một chiếc ti vi có màn hình dạng hình chữ nhật với độ dài đường chéo là 32 in, tỉ số giữa chiều dài và chiều rộng của màn hình là 16 : 9. Tìm một giá trị gần đúng (theo đơn vị inch) của chiều dài màn hình ti vi và tìm độ chính xác, sai số tương đối của số gần đúng đó.

*Giải*

Gọi chiều dài của màn hình ti vi là $x$ (in) với $x > 0$.

Khi đó, chiều rộng màn hình ti vi là $\frac{9x}{16}$ (in).

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$x^2 + \left(\frac{9x}{16}\right)^2 = 32^2 \Rightarrow 337x^2 = 262\,144 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{262\,144}{337}} = 27,89041719...$$

Nếu lấy giá trị gần đúng của $x$ là 27,9 ta có: $27,89 < x < 27,9$.

Suy ra $\Delta_{27,9} = |x - 27,9| < |27,89 - 27,9| = 0,01$.

Vậy chiều dài màn hình ti vi xấp xỉ 27,9 in và độ chính xác của kết quả tìm được là 0,01 in, hay $x = 27,9 \pm 0,01$ (in).

Theo đó, ta ước lượng sai số tương đối của 27,9 là:

$$\delta_{27,9} = \frac{\Delta_{27,9}}{|27,9|} < \frac{0,01}{27,9} \approx 0,036\%.$$

**Vấn đề 2. Xác định độ chính xác của số quy tròn và quy tròn số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước**

**Ví dụ 3** Quy tròn số – 52,3649 đến hàng phần trăm. Số gần đúng nhận được có độ chính xác là bao nhiêu?

*Giải*

Khi quy tròn số – 52,3649 đến hàng phần trăm ta được số – 52,36. Vì hàng quy tròn là hàng phần trăm nên ta có thể lấy độ chính xác của – 52,36 là 0,005.

**Ví dụ 4** Viết số quy tròn của mỗi số gần đúng sau với độ chính xác $d$:

a) 893,275846 với $d = 0,007$;     b) – 12,9674507 với $d = 0,0005$.

*Giải*

a) Do $0,001 < d = 0,007 < 0,01$ nên hàng thấp nhất mà $d$ nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm. Vì thế, ta quy tròn số 893,275846 đến hàng phần trăm. Vậy số quy tròn của 893,275846 là 893,28.

b) Do $0{,}0001 < d = 0{,}0005 < 0{,}001$ nên hàng thấp nhất mà $d$ nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần nghìn. Vì thế, ta quy tròn số – 12,9674507 đến hàng phần nghìn. Vậy số quy tròn của – 12,9674507 là – 12,967.

## C. BÀI TẬP

**1.** Số quy tròn của 219,46 đến hàng chục là:

**A.** 210. **B.** 219,4. **C.** 219,5. **D.** 220.

**2.** Số quy tròn của số gần đúng 673 582 với độ chính xác $d = 500$ là:

**A.** 673 500. **B.** 674 000. **C.** 673 000. **D.** 673 600.

**3.** Mặt đáy của một hộp sữa có dạng hình tròn bán kính 4 cm. Tính diện tích mặt đáy của hộp sữa.

a) Có thể sử dụng số thập phân hữu hạn ghi chính xác diện tích mặt đáy của hộp sữa được không? Vì sao?

b) Bạn Hoà và bạn Bình lần lượt cho kết quả tính diện tích của mặt đáy hộp sữa đó là $S_1 = 49{,}6$ cm$^2$ và $S_2 = 50{,}24$ cm$^2$. Bạn nào cho kết quả chính xác hơn?

**4.** Một thớt gỗ có bề mặt dạng hình tròn với bán kính là 15 cm. Hai bạn Thảo và Hoa cùng muốn tính diện tích $S$ của mặt thớt gỗ đó. Bạn Thảo lấy một giá trị gần đúng của $\pi$ là 3,14 và bạn Hoa lấy một giá trị gần đúng của $\pi$ là 3,1415. Bạn nào cho kết quả tính diện tích của mặt thớt gỗ chính xác hơn?

**5.** Một sân bóng đá có dạng hình chữ nhật với chiều dài và chiều rộng của sân lần lượt là 105 m và 68 m. Khoảng cách xa nhất giữa hai vị trí trên sân đúng bằng độ dài đường chéo của sân. Tìm một giá trị gần đúng (theo đơn vị mét) của độ dài đường chéo sân và tìm độ chính xác, sai số tương đối của số gần đúng đó.

**6.** a) Quy tròn số 865 549 đến hàng trăm. Số gần đúng nhận được có độ chính xác là bao nhiêu?

b) Quy tròn số – 0,526 đến hàng phần trăm. Số gần đúng nhận được có độ chính xác là bao nhiêu?

**7.** Viết số quy tròn của mỗi số gần đúng sau:

a) – 131 298 với độ chính xác $d = 20$;

b) 0,02298 với độ chính xác $d = 0{,}0006$.

# §2 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Số trung bình cộng (số trung bình)

*Số trung bình cộng* $\overline{x}$ của mẫu $n$ số liệu $x_1, x_2, ..., x_n$ là $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Ngoài ra, số trung bình cộng có thể tính theo các công thức sau:

• $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n}$, trong đó, $n_1, n_2, ..., n_k$ lần lượt là tần số của các số liệu $x_1, x_2, ..., x_k$ và $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

• $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k$, trong đó, $f_1, f_2, ..., f_k$ lần lượt là tần số tương đối của các số liệu $x_1, x_2, ..., x_k$.

### 2. Trung vị

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm $n$ số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).

• Nếu $n$ là số lẻ thì số liệu đứng ở vị trí thứ $\dfrac{n+1}{2}$ (số đứng chính giữa) gọi là *trung vị*.

• Nếu $n$ là số chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng ở vị trí thứ $\dfrac{n}{2}$ và $\dfrac{n}{2}+1$ gọi là *trung vị*.

Trung vị kí hiệu là $M_e$.

### 3. Tứ phân vị

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm $n$ số liệu thành một dãy không giảm.

*Tứ phân vị* của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị: tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba; ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau.

• Tứ phân vị thứ hai $Q_2$ bằng trung vị.

• Nếu $n$ là số chẵn thì tứ phân vị thứ nhất $Q_1$ bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba $Q_3$ bằng trung vị của nửa dãy phía trên.

• Nếu $n$ là số lẻ thì tứ phân vị thứ nhất $Q_1$ bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm $Q_2$) và tứ phân vị thứ ba $Q_3$ bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm $Q_2$).

### 4. Mốt

*Mốt* của mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là $M_o$.

*Chú ý:* Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều mốt.

## B. VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Xác định số trung bình cộng của mẫu số liệu

***Ví dụ 1*** Bốn bạn Bình, Cường, Hoa, Kiên cùng thi vào trường phổ thông chất lượng cao Bình Minh. Kết quả thi được cho bởi bảng thống kê sau:

| Học sinh | Điểm Toán | Điểm Ngữ Văn | Điểm Tiếng Anh |
|---|---|---|---|
| Bình | 10 | 8 | 9 |
| Cường | 6 | 7 | 5 |
| Hoa | 10 | 10 | 4 |
| Kiên | 9 | 5 | 10 |

Tính điểm trung bình kết quả thi 3 môn Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh của mỗi bạn và cho biết bạn nào trúng tuyển. Biết rằng, nếu muốn trúng tuyển, điểm trung bình các môn thi ở trên phải lớn hơn hoặc bằng 8 và không môn nào dưới 5 điểm.

*Giải*

Điểm trung bình kết quả thi của các bạn Bình, Cường, Hoa, Kiên lần lượt là:

$$\overline{x}_B = \frac{10+8+9}{3} = 9, \qquad \overline{x}_C = \frac{6+7+5}{3} = 6,$$

$$\overline{x}_H = \frac{10+10+4}{3} = 8, \qquad \overline{x}_K = \frac{9+5+10}{3} = 8.$$

Dựa vào các số liệu trên, ta thấy bạn Bình và bạn Kiên trúng tuyển.

### Vấn đề 2. Xác định trung vị của mẫu số liệu

***Ví dụ 2*** Đầu năm học, nhà trường cho học sinh khám sức khỏe. Mẫu số liệu thống kê kết quả đo cân nặng (đơn vị: ki-lô-gam) của 7 bạn nam đầu tiên như sau:

64 58 62,1 55 67 61 60,5

Trung vị của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

*Giải*

Sắp xếp các số liệu của mẫu trên theo thứ tự không giảm:

55 58 60,5 61 62,1 64 67

Mẫu số liệu trên có 7 số. Số thứ tư là 61. Vì vậy $M_e = 61$ (kg).

*Ví dụ 3* Mẫu số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: xăng-ti-mét) của 10 bạn tổ I lớp 10A như sau:

164 156 170 168 158 173 167 161 157 174

Trung vị của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

*Giải*

Sắp xếp các số liệu của mẫu trên theo thứ tự không giảm:

156 157 158 161 164 167 168 170 173 174

Mẫu số liệu trên có 10 số. Số thứ năm và số thứ sáu lần lượt là 164 và 167.

Vì vậy $M_e = \dfrac{164+167}{2} = 165,5$ (cm).

**Vấn đề 3. Xác định tứ phân vị của mẫu số liệu**

*Ví dụ 4* Mẫu số liệu thống kê số cân nặng (đơn vị: ki-lô-gam) tăng thêm của 7 trẻ sơ sinh trong ba tháng đầu tiên như sau:

0,9 1,0 1,1 1,14 1,18 1,2 1,3

Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

*Giải*

Mẫu số liệu trên đã được sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Trung vị của mẫu số liệu trên là 1,14.

Trung vị của dãy 0,9; 1,0; 1,1 là 1,0.

Trung vị của dãy 1,18; 1,2; 1,3 là 1,2.

Vậy $Q_1 = 1,0$; $Q_2 = 1,14$; $Q_3 = 1,2$.

*Ví dụ 5* Mẫu số liệu thống kê thời gian (đơn vị: phút) đọc hết một cuốn sách của 9 bạn tổ I lớp 10A như sau:

102 130 118 127 115 138 121 109 132

Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

*Giải*

Sắp xếp các số liệu của mẫu trên theo thứ tự không giảm:

102 109 115 118 121 127 130 132 138

Trung vị của mẫu số liệu trên là 121.

Trung vị của dãy 102, 109, 115, 118 là: $\frac{109+115}{2}=112$.

Trung vị của dãy 127, 130, 132, 138 là: $\frac{130+132}{2}=131$.

Vậy $Q_1 = 112, Q_2 = 121, Q_3 = 131$.

### Vấn đề 4. Xác định mốt của mẫu số liệu

***Ví dụ 6*** Một cửa hàng bán giày thống kê số đôi giày bán được trong Quý III năm 2020 như sau:

| Cỡ giày | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số đôi giày bán được (Tần số) | 41 | 49 | 50 | 71 | 53 | 46 | 27 | 5 |

a) Mốt trong bảng tần số thống kê số giày bán ra trong Quý III năm 2020 của cửa hàng trên là bao nhiêu?

b) Cửa hàng đó nên nhập về nhiều hơn cỡ giày nào để bán tiếp?

*Giải*

a) Vì tần số lớn nhất là 71 và 71 tương ứng với cỡ giày 40 nên mốt của bảng trên là 40.

b) Cửa hàng nên nhập về nhiều hơn cỡ giày 40 để bán tiếp.



## C. BÀI TẬP

**8.** Cho mẫu số liệu: 1 3 6 8 9 12

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

**A.** 6. **B.** 6,5. **C.** 7. **D.** 8.

b) Trung vị của mẫu số liệu trên là:

**A.** 6. **B.** 6,5. **C.** 7. **D.** 8.

c) Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

**A.** $Q_1 = 3, Q_2 = 6,5, Q_3 = 9$. **B.** $Q_1 = 1, Q_2 = 6,5, Q_3 = 12$.

**C.** $Q_1 = 6, Q_2 = 7, Q_3 = 8$. **D.** $Q_1 = 3, Q_2 = 7, Q_3 = 9$.

**9.** Tính đến ngày 19/01/2022, trong bảng xếp hạng giải bóng đá Ngoại hạng Anh (Vòng 24), số điểm của 5 đội dẫn đầu bảng như sau:

| Đội | Manchester City | Liverpool | Chelsea | West Ham | Arsenal |
|---|---|---|---|---|---|
| Điểm | 56 | 45 | 43 | 37 | 35 |

*(Nguồn: https://bongda24h.vn/bang-xep-hang.html)*

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

**A.** 43. **B.** 43,2. **C.** 44. **D.** 56.

b) Trung vị của mẫu số liệu trên là:

**A.** 43. **B.** 43,2. **C.** 44. **D.** 56.

c) Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

**A.** $Q_1 = 45, Q_2 = 43, Q_3 = 37$. **B.** $Q_1 = 56, Q_2 = 43, Q_3 = 35$.

**C.** $Q_1 = 36, Q_2 = 43, Q_3 = 50,5$. **D.** $Q_1 = 50,5, Q_2 = 43, Q_3 = 36$.

**10.** Cho mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số sau:

| Giá trị | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| Tần số | 7 | 12 | 11 | 10 |

Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu trên.

**11.** Cho mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối sau:

| Giá trị | 10 | 12 | 15 | 16 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số tương đối | 0,1 | 0,2 | 0,25 | 0,35 | 0,1 |

Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu trên.

**12.** Thời gian (đơn vị: phút) hoàn thành một bài kiểm tra trực tuyến của 8 học sinh lần lượt là:

40 35 45 42 44 38 43 39

Đối với mẫu số liệu trên, hãy tìm:

a) Số trung bình cộng; b) Trung vị; c) Tứ phân vị.

**13.** Kết quả kiểm tra Toán của một lớp 40 học sinh được thống kê trong bảng sau:

| **Điểm** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Số học sinh (Tần số)** | 1 | 2 | 1 | 7 | 9 | 9 | 8 | 3 |

Mốt trong bảng thống kê kết quả kiểm tra Toán của lớp trên là bao nhiêu?

# §3 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Khoảng biến thiên. Khoảng tứ phân vị

– Trong một mẫu số liệu, *khoảng biến thiên* là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

Ta có thể tính khoảng biến thiên $R$ của mẫu số liệu theo công thức sau:

$$R = x_{max} - x_{min},$$

trong đó $x_{max}$ là giá trị lớn nhất, $x_{min}$ là giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

– Giả sử $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ là tứ phân vị của mẫu số liệu. Ta gọi hiệu

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$$

là *khoảng tứ phân vị* của mẫu số liệu đó.

### 2. Phương sai

Cho mẫu số liệu thống kê có $n$ giá trị $x_1, x_2, ..., x_n$ và số trung bình cộng là $\overline{x}$.

Ta gọi số $s^2 = \dfrac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}$ là *phương sai* của mẫu số liệu trên.

Ngoài ra, phương sai có thể tính theo các công thức sau:

• $s^2 = \dfrac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + n_k(x_k - \overline{x})^2}{n}$, trong đó, $n_1, n_2, ..., n_k$ lần lượt là tần số của các số liệu $x_1, x_2, ..., x_k$ và $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

• $s^2 = f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + f_k(x_k - \overline{x})^2$, trong đó, $f_1, f_2, ..., f_k$ lần lượt là tần số tương đối của các số liệu $x_1, x_2, ..., x_k$.

**3. Độ lệch chuẩn**

Căn bậc hai (số học) của phương sai gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê.

**4. Tính hợp lí của số liệu thống kê**

Ta có thể sử dụng khoảng tứ phân vị để xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu như sau:

Giả sử $Q_1, Q_2, Q_3$ là tứ phân vị của mẫu số liệu và hiệu $\Delta Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Một giá trị trong mẫu số liệu được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q$ hoặc lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q$.

## B. VÍ DỤ

**Vấn đề 1. Xác định khoảng biến thiên của mẫu số liệu**

*Ví dụ 1* Mẫu số liệu thống kê tiền lương (đơn vị: triệu đồng/tháng) của 8 cán bộ trong một tổ của công ty là:

8 8,5 10 9 10,5 9,5 11 12

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

*Giải*

Trong mẫu số liệu trên, số lớn nhất là 12 và số nhỏ nhất là 8. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là: $R = x_{max} - x_{min} = 12 - 8 = 4$ (triệu đồng/tháng).

**Vấn đề 2. Xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu**

*Ví dụ 2* Mẫu số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của 12 cây thông là:

30,5 31 30,1 33,2 30,7 34,8 35 34,5 31,6 32,8 31,5 34,9

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

*Giải*

Sắp xếp mẫu số liệu trên theo thứ tự không giảm, ta được:

30,1 30,5 30,7 31 31,5 31,6 32,8 33,2 34,5 34,8 34,9 35

Trung vị của mẫu số liệu trên là: $\frac{31,6 + 32,8}{2} = 32,2$.

Trung vị của dãy 30,1; 30,5; 30,7; 31; 31,5; 31,6 là: $\dfrac{30,7+31}{2} = 30,85$.

Trung vị của dãy 32,8; 33,2; 34,5; 34,8; 34,9; 35 là: $\dfrac{34,5+34,8}{2} = 34,65$.

Vậy $Q_1 = 30{,}85$, $Q_2 = 32{,}2$, $Q_3 = 34{,}65$. Do đó khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 34,65 - 30,85 = 3,8$ (m).

### Vấn đề 3. Xác định phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu

***Ví dụ 3*** Kết quả 5 lần nhảy xa (đơn vị: mét) của bạn Huy và bạn Tùng cho ở bảng sau:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Huy** | 2,2 | 2,5 | 2,4 | 2,6 | 2,3 |
| **Tùng** | 2,0 | 2,8 | 2,5 | 2,4 | 2,3 |

a) Kết quả trung bình của hai bạn có bằng nhau hay không?

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê kết quả 5 lần nhảy xa của mỗi bạn. Từ đó cho biết bạn nào có kết quả nhảy xa ổn định hơn?

*Giải*

a) Gọi kết quả trung bình của bạn Huy và bạn Tùng lần lượt là $\overline{x}_H$, $\overline{x}_T$. Ta có:

$$\overline{x}_H = \frac{2,2+2,5+2,4+2,6+2,3}{5} = 2,4 \text{ (m)};$$

$$\overline{x}_T = \frac{2,0+2,8+2,5+2,4+2,3}{5} = 2,4 \text{ (m)}.$$

Vậy kết quả trung bình của hai bạn bằng nhau.

b) Gọi phương sai tương ứng với mẫu số liệu thống kê kết quả 5 lần nhảy của Huy và Tùng lần lượt là: $s_H^2$, $s_T^2$. Ta có:

$$s_H^2 = \frac{(2,2-2,4)^2+(2,5-2,4)^2+(2,4-2,4)^2+(2,6-2,4)^2+(2,3-2,4)^2}{5}$$
$$= 0{,}02;$$

$$s_T^2 = \frac{(2,0-2,4)^2+(2,8-2,4)^2+(2,5-2,4)^2+(2,4-2,4)^2+(2,3-2,4)^2}{5}$$
$$= 0{,}068.$$

Ta cũng có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê kết quả 5 lần nhảy của Huy và Tùng lần lượt là:

$$s_H = \sqrt{s_H^2} = \sqrt{0,02} \text{ (m)};\ s_T = \sqrt{s_T^2} = \sqrt{0,068} \text{ (m)}.$$

Do $s_H^2 = 0,02 < s_T^2 = 0,068$ nên bạn Huy có kết quả nhảy xa ổn định hơn bạn Tùng.

## Vấn đề 4. Xác định giá trị bất thường của mẫu số liệu

*Ví dụ 4* Nêu các giá trị bất thường của mẫu số liệu thống kê sau:

0 1 13 16 17 18 19 20 21 22 23 24 28 37 38

*Giải*

Mẫu số liệu trên có tứ phân vị là $Q_1 = 16; Q_2 = 20; Q_3 = 24$. Suy ra

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 24 - 16 = 8.$$

Các giá trị 0, 1 (nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q = 16 - \frac{3}{2} . 8 = 4$) và các giá trị 37, 38 (lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q = 24 + \frac{3}{2} . 8 = 36$) là các giá trị bất thường của mẫu số liệu đã cho.

## Vấn đề 5. Xác định mẫu số liệu từ biểu đồ và tính các số đặc trưng cho mẫu số liệu đó

*Ví dụ 5* Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 1* biểu diễn tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam giai đoạn 2012 – 2019.

a) Viết mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được từ biểu đồ ở *Hình 1*.

b) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó.

c) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.


(*Nguồn https://gso.gov.vn*)

*Hình 1*

*Giải*

a) Mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được từ biểu đồ trên là:

5,25 5,42 5,98 6,68 6,21 6,81 7,08 7,02

b) Trong mẫu số liệu trên, số lớn nhất là 7,08 và số nhỏ nhất là 5,25. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó là:

$$R = x_{max} - x_{min} = 7{,}08 - 5{,}25 = 1{,}83\ (\%).$$

c) Sắp xếp mẫu số liệu trên theo thứ tự tăng dần, ta được:

5,25 5,42 5,98 6,21 6,68 6,81 7,02 7,08

Vậy ta có tứ phân vị của mẫu số liệu đó là:

$$Q_1 = \frac{5,42 + 5,98}{2} = 5,7\ (\%), \qquad Q_2 = \frac{6,21 + 6,68}{2} = 6,445\ (\%),$$

$$Q_3 = \frac{6,81 + 7,02}{2} = 6,915\ (\%).$$

Do đó khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 6,915 - 5,7 = 1,215\ (\%).$$

d) Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

$$\overline{x} = \frac{5,25+5,42+5,98+6,68+6,21+6,81+7,08+7,02}{8} = 6,30625\ (\%).$$

Ta có:

$$(5,25 - 6,30625)^2 + (5,42 - 6,30625)^2 + (5,98 - 6,30625)^2 + (6,68 - 6,30625)^2$$
$$+ (6,21 - 6,30625)^2 + (6,81 - 6,30625)^2 + (7,08 - 6,30625)^2 + (7,02 - 6,30625)^2$$
$$= 3,5183875.$$

Phương sai của mẫu số liệu trên là: $s^2 = \dfrac{3,5183875}{8} \approx 0,44.$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là: $s \approx \sqrt{0,44} \approx 0,66\ (\%).$

## C. BÀI TẬP

**14.** Cho mẫu số liệu: 21 22 23 24 25

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

c) Phương sai của mẫu số liệu trên là:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là:

**A.** 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 4.

**15.** Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 2* biểu diễn thu nhập bình quân đầu người/năm của Việt Nam ở một số năm trong giai đoạn từ 1986 đến 2020.

Mẫu số liệu nhận được từ biểu đồ ở *Hình 2* có khoảng biến thiên là bao nhiêu?

**A.** 71. **B.** 85.

**C.** 1 180. **D.** 2 648.


(*Nguồn: https://data.worldbank.org*)

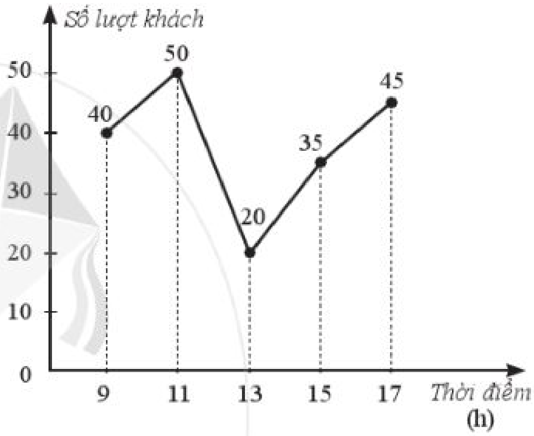
*Hình 2*

**16.** Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 3* biểu diễn số lượt khách vào một cửa hàng trong ngày đầu khai trương tại một số mốc thời gian.

Mẫu số liệu nhận được từ biểu đồ ở *Hình 3* có khoảng tứ phân vị là bao nhiêu?

**A.** 10. **B.** 15.

**C.** 20. **D.** 5.




*Hình 3*

**17.** Cho mẫu số liệu: 1 11 13 15 17 21

a) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

b) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

c) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

d) Tìm giá trị bất thường của mẫu số liệu trên.



**18.** Kết quả dự báo nhiệt độ cao nhất trong 10 ngày liên tiếp ở Nghệ An cuối tháng 01 năm 2022 được cho ở bảng sau:

| **Ngày** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** | **31** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nhiệt độ (°C) | 23 | 25 | 26 | 27 | 27 | 27 | 27 | 21 | 19 | 18 |

(*Nguồn: https://nchmf.gov.vn*)

a) Viết mẫu số liệu thống kê nhiệt độ nhận được từ bảng trên.

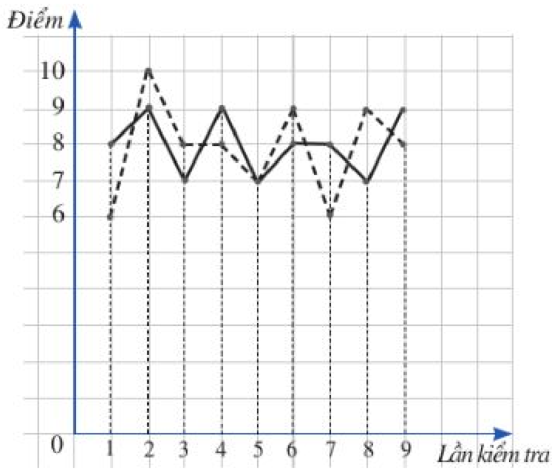
b) Tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

**19.** Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 4* cho biết kết quả thi Ngoại ngữ ở câu lạc bộ của Dũng (đường nét liền) và Hoàng (đường nét đứt đậm) qua 9 lần kiểm tra.

a) Viết mẫu số liệu thống kê kết quả thi ngoại ngữ của Dũng và Hoàng nhận được từ biểu đồ ở *Hình 4*.

b) Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu đó.

c) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu đó. Cho biết kết quả thi của bạn nào ổn định hơn?




*Hình 4*

# §4 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Xác suất của biến cố trong trò chơi tung đồng xu

Trong trò chơi tung đồng xu, ta quy ước đồng xu là cân đối và đồng chất.

Xét trò chơi: ***Tung một đồng xu hai lần liên tiếp***

– Không gian mẫu $\Omega$ trong trò chơi trên là tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu sau hai lần tung, tức là $\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}$, trong đó, chẳng hạn SN là kết quả "Lần thứ nhất đồng xu xuất hiện mặt sấp, lần thứ hai đồng xu xuất hiện mặt ngửa".

– Biến cố $A$ trong trò chơi trên là tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với một sự kiện nào đó cho hai lần tung đồng xu, ta có: $A \subset \Omega$. Mỗi phần tử của tập hợp $A$ được gọi là một kết quả thuận lợi cho biến cố $A$.

– Trong trò chơi trên, đối với mỗi biến cố $A$, ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau:

*Xác suất của biến cố A*, kí hiệu là $\mathrm{P}(A)$, là tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố $A$ và số phần tử của không gian mẫu:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

ở đó $n(A)$, $n(\Omega)$ *lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A* và $\Omega$.

**2.** ***Xác suất của biến cố trong trò chơi gieo xúc xắc***

Trong trò chơi gieo xúc xắc, ta quy ước xúc xắc là cân đối và đồng chất.

Xét trò chơi: ***Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp***

– Không gian mẫu $\Omega$ trong trò chơi trên là tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc sau hai lần gieo, tức là $\Omega = \{(i\,; j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, trong đó $(i\,; j)$ là kết quả "Lần thứ nhất xuất hiện mặt $i$ chấm, lần thứ hai xuất hiện mặt $j$ chấm".

– Biến cố $C$ trong trò chơi trên là tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với một sự kiện nào đó cho hai lần gieo xúc xắc, ta có: $C \subset \Omega$. Mỗi phần tử của tập hợp $C$ được gọi là một kết quả thuận lợi cho biến cố $C$.

– Trong trò chơi trên, đối với mỗi biến cố $C$, ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau:

*Xác suất của biến cố C*, kí hiệu là $\mathrm{P}(C)$, là tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố $C$ và số phần tử của không gian mẫu $\Omega$:

$$\mathrm{P}(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)},$$

*ở đó* $n(C)$, $n(\Omega)$ *lần lượt là số phần tử của hai tập hợp C và* $\Omega$.

## B. VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Xác suất của biến cố trong trò chơi tung một đồng xu hai lần liên tiếp

***Ví dụ 1*** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Tính xác xuất của biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau".

*Giải*

– Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp $\Omega$ = {SS; SN; NS; NN}. Do đó, $n(\Omega) = 4$.

– Gọi $A$ là biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau". Các kết quả thuận lợi cho biến cố $A$ là: SN, NS, tức là $A = \{SN; NS\}$. Vì thế, $n(A) = 2$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

**Vấn đề 2. Xác suất của biến cố trong trò chơi gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp**

***Ví dụ 2*** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10";

b) "Mặt 1 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

*Giải*

Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp $\Omega = \{(i\,;j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Vậy $n(\Omega) = 36$.

a) Gọi $E$ là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10". Các kết quả thuận lợi cho biến cố $E$ là: $(5\,;5)$, $(5\,;6)$, $(6\,;5)$, $(6\,;6)$, tức là $E = \{(5\,;5), (5\,;6), (6\,;5), (6\,;6)\}$. Vì thế, $n(E) = 4$.

Vậy xác suất của biến cố $E$ là: $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

b) Gọi $G$ là biến cố "Mặt 1 chấm xuất hiện ít nhất một lần". Các kết quả thuận lợi cho biến cố $G$ là: $(1\,;1)$, $(1\,;2)$, $(1\,;3)$, $(1\,;4)$, $(1\,;5)$, $(1\,;6)$, $(2\,;1)$, $(3\,;1)$, $(4\,;1)$, $(5\,;1)$, $(6\,;1)$, tức là $G = \{(1\,;1), (1\,;2), (1\,;3), (1\,;4), (1\,;5), (1\,;6), (2\,;1), (3\,;1), (4\,;1), (5\,;1), (6\,;1)\}$. Vì thế, $n(G) = 11$.

Vậy xác suất của biến cố $G$ là: $P(G) = \dfrac{n(G)}{n(\Omega)} = \dfrac{11}{36}$.

## C. BÀI TẬP

**20.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

a) Xác xuất của biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau" là:

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

b) Xác xuất của biến cố "Hai lần tung đều xuất hiện mặt sấp" là:

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

c) Xác xuất của biến cố "Lần thứ nhất xuất hiện mặt sấp" là:

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

d) Xác xuất của biến cố "Mặt sấp xuất hiện đúng một lần" là:

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**21.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

a) Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất xuất hiện mặt 1 chấm, lần thứ hai xuất hiện mặt 3 chấm" là:

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

b) Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất xuất hiện mặt 6 chấm" là:

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

c) Xác suất của biến cố "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là giống nhau" là:

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

d) Xác suất của biến cố "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số chẵn" là:

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

**22.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện:

a) $A = \{NS; SS\}$; b) $B = \{NN; NS; SN; SS\}$.

**23.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố "Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa".

**24.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện:

a) $C = \{(1 ; 1)\}$;

b) $D = \{(1 ; 6); (6 ; 1)\}$;

c) $G = \{(3 ; 3); (3 ; 6); (6 ; 3); (6 ; 6)\}$;

d) $E = \{(1 ; 1); (1 ; 3); (1 ; 5); (3 ; 3); (3 ; 1); (3 ; 5); (5 ; 5); (5 ; 1); (5 ; 3)\}$.

**25.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) $A$: "Lần thứ hai xuất hiện mặt 5 chấm";

b) $B$: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo bằng 7";

c) $C$: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo chia hết cho 3";

d) $D$: "Số chấm xuất hiện lần thứ nhất là số nguyên tố";

e) $E$: "Số chấm xuất hiện lần thứ nhất nhỏ hơn số chấm xuất hiện lần thứ hai".

**26.** Tung một đồng xu ba lần liên tiếp.

a) Tìm số phần tử của tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xác định mỗi biến cố:

$A$: "Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa";

$B$: "Mặt sấp xuất hiện đúng hai lần".

# §5 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Một số khái niệm về xác suất

#### a) Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

– Có những phép thử mà ta không thể đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó. Những phép thử như thế gọi là *phép thử ngẫu nhiên* (gọi tắt là phép thử).

– Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra của một phép thử gọi là *không gian mẫu* của phép thử đó.

#### b) Biến cố và xác suất của biến cố

– *Biến cố ngẫu nhiên* (gọi tắt là *biến cố*) là một tập con của không gian mẫu.

– Xét phép thử $T$ với không gian mẫu là Ω. Mỗi biến cố là một tập con của tập hợp Ω. Vì thế, tập rỗng ∅ cũng là một biến cố, gọi là *biến cố không thể* (gọi tắt là *biến cố không*). Còn tập hợp Ω gọi là *biến cố chắc chắn*.

– Tập con $\Omega \setminus A$ xác định một biến cố, gọi là *biến cố đối* của biến cố $A$, kí hiệu là $\overline{A}$.

– Xét phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả có thể xảy ra và khả năng xảy ra của từng kết quả là giống nhau. Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Khi đó, với mỗi biến cố $A$, ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau:

*Xác suất của biến cố $A$*, kí hiệu là $P(A)$, bằng tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, ở đó $n(A)$, $n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp $A$ và Ω. Như vậy: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

## 2. Tính chất của xác suất

Xét phép thử $T$ với không gian mẫu là $\Omega$. Khi đó, ta có các tính chất sau:

- $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$;
- $0 \leq P(A) \leq 1$ với mỗi biến cố $A$;
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ với mỗi biến cố $A$.

# B. VÍ DỤ

## Vấn đề 1. Xác định không gian mẫu, số phần tử của không gian mẫu

***Ví dụ 1*** Một hộp có 2 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ được rút ra và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên liên tiếp 2 chiếc thẻ trong hộp". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó và tính số phần tử của không gian mẫu.

*Giải*

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp $\Omega = \{(1 ; 1); (1 ; 2); (2 ; 1); (2 ; 2)\}$, ở đó, chẳng hạn $(1 ; 2)$ là kết quả "Lần thứ nhất rút ra thẻ ghi số 1, lần thứ hai rút ra thẻ ghi số 2". Không gian mẫu có 4 phần tử.

***Ví dụ 2*** Cho một hộp chứa 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ; các bi có hình dạng và kích thước giống nhau. Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi". Xác định số phần tử của không gian mẫu trong phép thử đó.

*Giải*

Tổng số viên bi là $4 + 5 = 9$. Mỗi cách lấy ra đồng thời 2 viên bi là một tổ hợp chập 2 của 9 phần tử. Do đó, không gian mẫu $\Omega$ gồm các tổ hợp chập 2 của 9 phần tử (9 viên bi) và $n(\Omega) = C_9^2 = 36$.

## Vấn đề 2. Xác định biến cố, biến cố đối, biến cố không, biến cố chắc chắn

***Ví dụ 3*** Một hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong hộp, ghi lại màu của quả bóng được lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên liên tiếp 2 quả bóng trong hộp". Hãy xác định biến cố $A$: "Lấy liên tiếp 2 quả bóng cùng màu" và phát biểu biến cố đối của biến cố $A$.

*Giải*

Biến cố $A$ = {XX; ĐĐ; VV}, trong đó, XX là kết quả lấy liên tiếp 2 quả bóng xanh; ĐĐ là kết quả lấy liên tiếp 2 quả bóng đỏ; VV là kết quả lấy liên tiếp 2 quả bóng vàng.

Biến cố đối của biến cố $A$ là $\overline{A}$: "Lấy liên tiếp 2 quả bóng khác màu".

***Ví dụ 4*** Xét phép thử "Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc một lần". Xét các biến cố:

$A$: "Mặt xuất hiện có số chấm là số nguyên dương";

$B$: "Mặt xuất hiện có số chấm là số chia hết cho 7";

$C$: "Mặt xuất hiện có số chấm là số lớn hơn – 1";

$D$: "Mặt xuất hiện có số chấm là số nguyên âm".

Trong các biến cố trên, biến cố nào là biến cố không? Biến cố chắc chắn?

*Giải*

Biến cố chắc chắn là các biến cố $A$, $C$. Biến cố không là các biến cố $B$, $D$.

**Vấn đề 3. Tính xác suất của biến cố**

***Ví dụ 5*** Một người bấm số gọi điện thoại nhưng quên hai số cuối của số điện thoại cần gọi và chỉ nhớ rằng hai chữ số đó khác nhau. Tính xác suất của biến cố "Người đó bấm thử 1 lần được đúng số điện thoại cần gọi".

*Giải*

Hai số cuối là hai chữ số khác nhau thuộc tập hợp $\{0; 1; ...; 9\}$. Mỗi cách bấm hai chữ số đó cho ta một chỉnh hợp chập 2 của tập hợp 10 phần tử. Vì vậy, không gian mẫu $\Omega$ gồm các chỉnh hợp chập 2 của tập hợp 10 phần tử và $n(\Omega) = \mathrm{A}_{10}^{2} = 90$.

Gọi $C$ là biến cố "Người đó bấm thử 1 lần được đúng số điện thoại cần gọi". Vì chỉ có 1 số điện thoại cần gọi là đúng nên $n(C) = 1$. Vậy xác suất của biến cố $C$ là:

$$\mathrm{P}(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{90}.$$

***Ví dụ 6*** Hai bạn nữ Hoa, Thảo và hai bạn nam Dũng, Huy được xếp ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế đặt theo hàng dọc. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Bạn Thảo ngồi ghế đầu tiên";

b) "Bạn Thảo ngồi ghế đầu tiên và bạn Huy ngồi ghế cuối cùng".

*Giải*

Mỗi cách xếp 4 bạn ngồi vào bốn ghế là một hoán vị của 4 phần tử. Vì vậy, không gian mẫu $\Omega$ gồm các hoán vị của 4 phần tử và $n(\Omega) = 4! = 24$.

a) Gọi $A$ là biến cố "Bạn Thảo ngồi ghế đầu tiên". Vì bạn Thảo ngồi ghế đầu tiên nên chỉ xếp 3 bạn còn lại vào ba ghế sau. Do đó, tập hợp $A$ gồm các hoán vị của 3 phần tử và $n(A) = 3! = 6$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ *là:* $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$.

b) Gọi $B$ là biến cố "Bạn Thảo ngồi ghế đầu tiên và bạn Huy ngồi ghế cuối cùng". Vì bạn Thảo ngồi ghế đầu tiên và bạn Huy ngồi ghế cuối cùng nên chỉ xếp 2 bạn còn lại vào hai ghế ở giữa. Do đó, tập hợp $B$ gồm các hoán vị của 2 phần tử và $n(B) = 2! = 2$.

Vậy xác suất của biến cố $B$ là: $\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{24} = \dfrac{1}{12}$.

**Ví dụ 7.** Có 3 bông hoa màu trắng, 4 bông hoa màu vàng và 5 bông hoa màu đỏ. Người ta chọn ra 4 bông hoa từ các bông hoa trên. Tính xác suất của biến cố "Bốn bông hoa chọn ra có cả ba màu".

*Giải*

Mỗi cách chọn ra đồng thời 4 bông hoa là một tổ hợp chập 4 của 12 phần tử. Do đó, không gian mẫu $\Omega$ gồm các tổ hợp chập 4 của 12 phần tử và $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^4 = 495$.

Gọi $A$ là biến cố "Bốn bông hoa chọn ra có cả ba màu". Có 3 trường hợp xảy ra:

*Trường hợp 1:* Chọn ra 2 bông hoa màu trắng, 1 bông hoa màu vàng, 1 bông hoa màu đỏ.

Số cách chọn ra 2 bông hoa màu trắng là: $\mathrm{C}_3^2 = 3$.

Số cách chọn ra 2 bông hoa màu trắng, 1 bông hoa màu vàng, 1 bông hoa màu đỏ là:

$$3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 60.$$

*Trường hợp 2:* Chọn ra 1 bông hoa màu trắng, 2 bông hoa màu vàng, 1 bông hoa màu đỏ.

Số cách chọn ra 2 bông hoa màu vàng là: $\mathrm{C}_4^2 = 6$.

Số cách chọn ra 1 bông hoa màu trắng, 2 bông hoa màu vàng, 1 bông hoa màu đỏ là:

$$3 \,.\, 6 \,.\, 5 = 90.$$

*Trường hợp 3:* Chọn ra 1 bông hoa màu trắng, 1 bông hoa màu vàng, 2 bông hoa màu đỏ.

Số cách chọn ra 2 bông hoa màu đỏ là: $\mathrm{C}_5^2 = 10$.

Số cách chọn ra 1 bông hoa màu trắng, 1 bông hoa màu vàng, 2 bông hoa màu đỏ là:

$$3 \,.\, 4 \,.\, 10 = 120.$$

Tập hợp $A$ bao gồm các phần tử là các khả năng của tất cả trường hợp 1, 2, 3 và $n(A) = 60 + 90 + 120 = 270$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{270}{495} = \dfrac{6}{11}$.

## C. BÀI TẬP

**27.** Xét phép thử "Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp". Biến cố nào dưới đây là biến cố không?

**A.** Tổng số chấm ở hai lần gieo nhỏ hơn hoặc bằng 1.

**B.** Cả hai lần gieo đều xuất hiện số chấm lẻ.

**C.** Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo đều chia hết cho 5.

**D.** Số chấm ở lần gieo thứ nhất nhỏ hơn số chấm ở lần gieo thứ hai.

**28.** Xét phép thử "Tung một đồng xu hai lần liên tiếp". Biến cố nào dưới đây là biến cố chắc chắn?

**A.** Mặt sấp chỉ xuất hiện 1 lần.

**B.** Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa.

**C.** Lần thứ nhất xuất hiện mặt sấp hoặc mặt ngửa.

**D.** Cả hai lần tung đều xuất hiện mặt sấp.

**29.** Cho tập hợp $A$ gồm 2 022 số nguyên dương liên tiếp 1, 2, 3, ..., 2 022. Chọn ngẫu nhiên 2 số thuộc tập hợp $A$. Xác suất của biến cố "Tích 2 số được chọn là số chẵn" là:

**A.** $\dfrac{C_{1\,011}^2}{C_{2\,022}^2}$. **B.** $1 - \dfrac{C_{1\,011}^2}{C_{2\,022}^2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $1 - \dfrac{C_{2\,022}^2}{C_{4\,044}^2}$.

**30.** Ngân hàng đề thi của một môn khoa học xã hội gồm 200 câu hỏi. Người ta chọn trong ngân hàng đề thi 5 câu hỏi để làm thành một đề thi, hai đề thi được gọi là giống nhau nếu có cùng tập hợp 5 câu hỏi. Một học sinh chắc chắn trả lời đúng 120 câu hỏi trong ngân hàng đề thi đó. Xác suất để học sinh đó rút ngẫu nhiên được một đề thi mà có đúng 3 câu hỏi chắc chắn trả lời đúng là:

**A.** $\dfrac{C_{120}^3}{C_{200}^5}$. **B.** $1 - \dfrac{C_{80}^2}{C_{200}^5}$. **C.** $\dfrac{120}{200}$. **D.** $\dfrac{C_{80}^2 C_{120}^3}{C_{200}^5}$.

**31.** Từ một hộp chứa 3 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ, 5 quả cầu vàng, các quả cầu có kích thước và khối lượng giống nhau, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Tính xác suất lấy được 3 quả cầu có màu đôi một khác nhau.

**32.** Có 20 tấm thẻ màu xanh, 30 tấm thẻ màu đỏ. Người ta chọn ra đồng thời 18 tấm thẻ. Tính xác suất của biến cố $A$: "Trong 18 tấm thẻ được chọn ra có ít nhất một tấm thẻ màu xanh".

**33.** Lớp 10A có 16 nam và 24 nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 bạn để phân công trực nhật. Tính xác suất của biến cố $A$: "Trong 5 bạn được chọn có 2 bạn nam và 3 bạn nữ'.

**34.** Xếp ngẫu nhiên 6 bạn An, Bình, Cường, Dũng, Đông, Huy vào một dãy hàng dọc. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) $A$: "Bạn Dũng luôn đứng liền sau bạn Bình".

b) $B$: "Bạn Bình và bạn Cường luôn đứng liền nhau".

**35.** Từ bộ tú lơ khơ có 52 quân bài thường đang được úp, rút ngẫu nhiên đồng thời 4 quân bài. Tính xác suất các biến cố sau:

a) $A$: "Rút được 4 quân bài cùng một giá trị" (ví dụ 4 quân 3, 4 quân K, ...);

b) $B$: "Rút được 4 quân bài có cùng chất";

c) $C$: "Trong 4 quân bài rút được chỉ có 2 quân Át".

**36**. Một giải bóng đá gồm 16 đội, trong đó có 4 đội của nước V. Ban tổ chức bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 4 bảng đấu A, B, C, D, mỗi bảng đấu có 4 đội. Tính xác suất của biến cố "Bốn đội của nước V ở 4 bảng đấu khác nhau".

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

**37.** Số quy tròn của số gần đúng 38,4753701 với độ chính xác 0,005 là:

**A.** 38,47. **B.** 38,48. **C.** 38,49. **D.** 38,5.

**38.** Số quy tròn của số gần đúng – 97 186 với độ chính xác 50 là:

**A.** – 97 100. **B.** – 97 000. **C.** – 97 200. **D.** – 97 300.

**39.** Cho mẫu số liệu: 3 4 6 9 13

a) Trung vị của mẫu số liệu trên là:

**A.** 7. **B.** 6. **C.** 6,5. **D.** 8.

b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

**A.** 7 **B.** 6. **C.** 6,5. **D.** 8.

c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là:

**A.** 7. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 10.

d) Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

**A.** $Q_1 = 4, Q_2 = 6, Q_3 = 9$.

**B.** $Q_1 = 3,5, Q_2 = 6, Q_3 = 9$.

**C.** $Q_1 = 4, Q_2 = 6, Q_3 = 11$.

**D.** $Q_1 = 3,5, Q_2 = 6, Q_3 = 11$.

e) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

**A.** 7,5. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 10.

g) Phương sai của mẫu số liệu trên là:

**A.** 66. **B.** 13,2. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $\sqrt{13,2}$.

h) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là:

**A.** 66. **B.** 13,2. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $\sqrt{13,2}$.

**40.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Xác suất của biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau" là:

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**41.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Xác suất của biến cố "Tích số chấm trong hai lần gieo là số chẵn" bằng

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**42.** Bác Ngân có một chiếc điện thoại cũ để mật khẩu 6 chữ số. Bác đã quên mật khẩu chính xác và chỉ nhớ các chữ số đó là đôi một khác nhau. Xác suất để bác Ngân bấm đúng mật khẩu của chiếc điện thoại cũ đó trong một lần là:

**A.** $\frac{1}{A_{10}^6}$. **B.** $\frac{1}{C_{10}^6}$. **C.** $\frac{A_{10}^6}{6!}$. **D.** $\frac{6!}{A_{10}^6}$.

**43.** Bảng dưới đây thống kê sản lượng thuỷ sản của Việt Nam từ năm 2013 đến năm 2020 (đơn vị: triệu tấn).

| **Năm** | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sản lượng (triệu tấn)** | 6,053 | 6,319 | 6,563 | 6,728 | 7,279 | 7,743 | 8,150 | 8,410 |

*(Nguồn: https://vasep.com.vn/gioi-thieu/tong-quan-nganh)*

a) Viết mẫu số liệu thống kê sản lượng thuỷ sản của Việt Nam nhận được từ bảng trên.

b) Tìm số trung bình cộng, trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

c) Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

**44.** Một hội thảo quốc tế gồm 12 học sinh đến từ các nước: Việt Nam, Nhật Bản, Singapore, Ấn Độ, Hàn Quốc, Brasil, Canada, Tây Ban Nha, Đức, Pháp, Nam Phi, Cameroon, mỗi nước chỉ có đúng một học sinh. Chọn ra ngẫu nhiên 2 học sinh trong nhóm học sinh quốc tế để tham gia ban tổ chức.

Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) $A$: "Hai học sinh được chọn ra đến từ châu Á";

b) $B$: "Hai học sinh được chọn ra đến từ châu Âu";

c) $C$: "Hai học sinh được chọn ra đến từ châu Mĩ";

d) $D$: "Hai học sinh được chọn ra đến từ châu Phi".

**45**. Trong một trò chơi, bạn Hằng ghi tên 63 tỉnh, thành phố trực thuộc Trung ương của Việt Nam (tính đến năm 2021) vào 63 phiếu, hai phiếu khác nhau ghi tên hai nơi khác nhau, rồi bỏ tất cả các phiếu đó vào một hộp kín. Bạn Hoài rút ngẫu nhiên 2 phiếu. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) $A$: "Hai phiếu rút được ghi tên hai nơi bắt đầu bằng âm tiết Hà";

b) $B$: "Hai phiếu rút được ghi tên hai nơi bắt đầu bằng chữ K";

c) $C$: "Hai phiếu rút được ghi tên hai nơi bắt đầu bằng chữ B".

**46.** Một đội thanh niên tình nguyện gồm 27 người đến từ các tỉnh (thành phố): Kon Tum, Gia Lai, Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng, Phú Yên, Khánh Hoà, Ninh Thuận, Bình Thuận, Bà Rịa – Vũng Tàu, Bình Dương, Bình Phước, Đồng Nai, Tây Ninh, Long An, Tiền Giang, Vĩnh Long, Bến Tre, Đồng Tháp, Trà Vinh, An Giang, Cần Thơ, Hậu Giang, Bạc Liêu, Sóc Trăng, Kiên Giang và Cà Mau; mỗi tỉnh chỉ có đúng một thành viên của đội.

Chọn ngẫu nhiên 3 thành viên của đội để phân công nhiệm vụ trước. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) $A$: "Ba thành viên được chọn đến từ Tây Nguyên".

b) $B$: "Ba thành viên được chọn đến từ Duyên hải Nam Trung Bộ".

c) $C$: "Ba thành viên được chọn đến từ Đông Nam Bộ".

d) $D$: "Ba thành viên được chọn đến từ Đồng bằng sông Cửu Long".

**47.** Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, 4, 5; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ được rút ra và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên liên tiếp 3 chiếc thẻ trong hộp".

Tính xác suất của biến cố $A$: "Tích các số ghi trên thẻ ở 3 lần rút là số chẵn".

**48.** Có 3 khách hàng (không quen biết nhau) cùng đến một cửa hàng có 5 quầy phục vụ khác nhau. Tính xác suất để có 2 khách hàng cùng vào một quầy và khách hàng còn lại vào một quầy khác.

# LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

## §1 SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

**1.** **D**. **2. B**.

**3.** Diện tích mặt đáy của hộp sữa là: $S = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ ($cm^2$).

a) Vì $\pi = 3{,}141592653...$ là số vô tỉ nên không thể sử dụng số thập phân hữu hạn ghi chính xác diện tích mặt đáy của hộp sữa.

b) Vì $S_1 < S_2 < 50{,}26548... = 16\pi$ nên bạn Bình cho kết quả chính xác hơn.

**4.** Bạn Hoa cho kết quả chính xác hơn.

**5.** Gọi $x$ là độ dài đường chéo của sân bóng. Áp dụng định lí Pythagore, ta có:

$$x = \sqrt{105^2 + 68^2} = \sqrt{15\,649} = 125{,}09596...$$

Lấy một giá trị gần đúng của $x$ là 125,1 ta có: $125{,}09 < x < 125{,}1$.

Suy ra $|x - 125{,}1| < |125{,}09 - 125{,}1| = 0{,}01$.

Vậy độ dài sân bóng có thể lấy bằng 125,1 m với độ chính xác $d = 0{,}01$.

Sai số tương đối của 125,1 là $\delta_{125,1} = \dfrac{\Delta_{125,1}}{|125{,}1|} < \dfrac{0{,}01}{125{,}1} \approx 0{,}008\%$.

**6.** a) $d = 50$. b) $d = 0{,}005$.

**7.** a) – 131 300. b) 0,023.

## §2 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

**8.** a) **B.** b) **C.** c) **D.**

**9.** a) **B.** b) **A.** c) **C.**

**10.** 6,6.

**11.** 14,65.

**12.** a) 40,75 (phút). b) 41 (phút).

c) $Q_1 = 38{,}5$ (phút), $Q_2 = 41$ (phút), $Q_3 = 43{,}5$ (phút).

**13.** Mốt là 7 và 8 vì có cùng tần số lớn nhất là 9.

## §3 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

**14.** a) **D.** b) **C.** c) **B.** d) **B.** **15. D.** **16. C.**

**17.** a) 20. b) 6. c) Phương sai là $\frac{116}{3}$, độ lệch chuẩn là $\frac{2\sqrt{87}}{3}$. d) 1.

**18.** a) 23 25 26 27 27 27 27 21 19 18

b) Số trung bình cộng là 24 (°C).

Phương sai là 11,2. Độ lệch chuẩn là $\frac{2\sqrt{70}}{5}$ (°C).

**19.** a) Mẫu số liệu kết quả thi của bạn Dũng là: 8 9 7 9 7 8 8 7 9 (1)

Mẫu số liệu kết quả thi của bạn Hoàng là: 6 10 8 8 7 9 6 9 8 (2)

b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu (1) và (2) lần lượt là 2 và 4.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (1) và (2) lần lượt là 2 và 2,5.

c) Phương sai của mẫu số liệu (1) và (2) lần lượt là $\frac{2}{3}$ và $\frac{134}{81}$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu (1) và (2) lần lượt là $\frac{\sqrt{6}}{3}$ và $\frac{\sqrt{134}}{9}$.

Ta có: $\frac{2}{3} < \frac{134}{81}$ nên kết quả thi của bạn Dũng ổn định hơn.

## §4 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

**20.** a) **A.** b) **B.** c) **A.** d) **A.** **21.** a) **C.** b) **B.** c) **B.** d) **D.**

**22.** a) $A$: "Lần thứ hai xuất hiện mặt sấp".

b) $B$: "Lần thứ nhất xuất hiện mặt sấp hoặc mặt ngửa".

**23.** $\frac{1}{2}$.

**24.** a) $C$: "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo đều là 1".

b) $D$: "Giá trị tuyệt đối của hiệu số chấm giữa hai lần gieo là 5".

c) $E$: "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo chia hết cho 3".

d) $G$: "Tích số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số lẻ".

**25.** Không gian mẫu có 36 phần tử.

a) $A = \{(i\,;5) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Suy ra $n(A) = 6$. Vậy $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{6}$.

b) $B = \{(1 ; 6); (6 ; 1); (2 ; 5); (5 ; 2); (3 ; 4); (4 ; 3)\}$. Suy ra $n(B) = 6$.

Vậy $P(B) = \frac{1}{6}$.

c) $C = \{(1 ; 2); (2 ; 1); (1 ; 5); (5 ; 1); (2 ; 4); (4 ; 2); (3 ; 3); (3 ; 6); (6 ; 3); (4 ; 5); (5 ; 4); (6 ; 6)\}$.

Suy ra $n(C) = 12$. Vậy $P(C) = \frac{1}{3}$.

d) $D = \{(2 ; 1); (2 ; 2); (2 ; 3); (2 ; 4); (2 ; 5); (2 ; 6); (3 ; 1); (3 ; 2); (3 ; 3); (3 ; 4); (3 ; 5); (3 ; 6); (5 ; 1); (5 ; 2); (5 ; 3); (5 ; 4); (5 ; 5); (5 ; 6)\}$.

Suy ra $n(D) = 18$. Vậy $P(D) = \frac{1}{2}$.

e) $E = \{(1 ; 2); (1 ; 3); (1 ; 4); (1 ; 5); (1 ; 6); (2 ; 3); (2 ; 4); (2 ; 5); (2 ; 6); (3 ; 4); (3 ; 5); (3 ; 6); (4 ; 5); (4 ; 6); (5 ; 6)\}$.

Suy ra $n(E) = 15$. Vậy $P(E) = \frac{5}{12}$.

**26.** a) $\Omega = \{\text{NNN; NNS; NSS; NSN; SNN; SNS; SSN; SSS}\}$. Suy ra $n(\Omega) = 8$.

b) $A = \{\text{NNN; NNS; SNN; SNS}\}$. $B = \{\text{NSS; SNS; SSN}\}$.

## §5 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

**27. A.** **28. C.** **29. B.** **30. D.**

**31.** Mỗi cách lấy ra 3 quả cầu từ 12 quả cầu là một tổ hợp chập 3 của 12 phần tử.

Vậy không gian mẫu $\Omega$ có số phần tử là: $n(\Omega) = C_{12}^{3} = 220$.

Gọi $A$ là biến cố "Lấy được 3 quả cầu có màu đôi một khác nhau".

Vì 3 quả cầu có màu đôi một khác nhau, tức là 1 quả cầu trắng, 1 quả cầu đỏ, 1 quả cầu vàng, nên số cách lấy 3 quả cầu như thế là: $3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 60$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

**32.** Mỗi cách chọn 18 tấm thẻ từ 50 tấm thẻ là một tổ hợp chập 18 của 50 phần tử.

Vậy không gian mẫu $\Omega$ có số phần tử là: $n(\Omega) = C_{50}^{18}$.

Xét biến cố $\overline{A}$: "Trong 18 tấm thẻ được chọn ra, không có tấm thẻ màu xanh nào" là biến cố đối của biến cố $A$.

Vì không có tấm thẻ màu xanh nào nên 18 thẻ chọn ra phải có màu đỏ nên số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $C_{30}^{18}$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = 1 - \dfrac{C_{30}^{18}}{C_{50}^{18}}$.

**33.** Mỗi cách chọn 5 bạn từ 40 bạn học sinh là một tổ hợp chập 5 của 40 phần tử. Vậy không gian mẫu $\Omega$ có số phần tử là: $n(\Omega) = C_{40}^{5} = 658\ 008$.

Xét biến cố $A$: "Năm bạn được chọn có 2 bạn nam và 3 bạn nữ". Số phần tử của biến cố $A$ là: $C_{16}^{2} \,.\, C_{24}^{3} = 242\ 880$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{242\ 880}{658\ 008} = \dfrac{10\ 120}{27\ 417}$.

**34.** Xếp 6 bạn theo một hàng dọc có $6! = 720$ cách nên số phần tử của không gian mẫu $\Omega$ là 720.

a) Vì bạn Dũng đứng liền sau bạn Bình nên ta có thể coi 2 bạn đó là 1 bạn. Như vậy, chỉ còn xếp chỗ cho 4 bạn và 1 bạn "Bình – Dũng". Suy ra số cách xếp các vị trí đứng hay số phần tử của biến cố $A$ là: $5! = 120$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{120}{720} = \dfrac{1}{6}$.

b) Vì bạn Bình và bạn Cường luôn đứng liền nhau nên ta có thể coi 2 bạn đó là 1 bạn, tuy nhiên có hai trường hợp là bạn Bình đứng trước hoặc bạn Cường đứng trước. Như vậy, số cách xếp các vị trí đứng hay số phần tử của biến cố $B$ là: $2 \,.\, 5! = 240$.

Vậy xác suất của biến cố $B$ là: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{240}{720} = \dfrac{1}{3}$.

**35.** Mỗi cách rút 4 quân bài từ 52 quân bài là một tổ hợp chập 4 của 52 phần tử nên số phần tử của không gian mẫu $\Omega$ là: $C_{52}^{4} = 270\ 725$.

a) Trong bộ 52 quân bài có 13 nhóm 4 quân bài cùng một giá trị. Suy ra số phần tử của biến cố $A$ là 13.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{13}{270\ 725} = \dfrac{1}{20\ 825}$.

b) Có 4 cách chọn chất của bộ bài. Mỗi chất có 13 quân bài, vậy mỗi cách chọn 4 quân bài ở mỗi chất là một tổ hợp chập 4 của 13. Suy ra số phần tử của biến cố $B$ là: $4C_{13}^{4} = 2\ 860$.

Vậy xác suất của biến cố $B$ là: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2\ 860}{270\ 725} = \dfrac{44}{4\ 165}$.

c) Số quân Át trong bộ bài là 4. Sau khi chọn 2 quân Át thì 2 quân bài còn lại được chọn từ 48 quân bài không phải Át. Suy ra số phần tử của biến cố $C$ là: $C_4^2 . C_{48}^2 = 6\ 768$.

Vậy xác suất của biến cố $C$ là: $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{6\ 768}{270\ 725}$.

**36.** Số phần tử của không gian mẫu $\Omega$ là số cách xếp 16 đội lần lượt vào 4 bảng đấu, tức là: $C_{16}^4 . C_{12}^4 . C_8^4$.

Gọi $E$ là biến cố "Bốn đội của nước V ở 4 bảng đấu khác nhau".

Số cách xếp 4 đội của nước V vào 4 bảng đấu là $4! = 24$.

Số cách xếp 12 đội còn lại vào 4 bảng đấu là: $C_{12}^3 . C_9^3 . C_6^3$.

Suy ra số phần tử của biến cố $E$ là: $24 . C_{12}^3 . C_9^3 . C_6^3$.

Vậy xác suất của biến cố $E$ là: $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{24 . C_{12}^3 . C_9^3 . C_6^3}{C_{16}^4 . C_{12}^4 . C_8^4} = \dfrac{64}{455}$.

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

**37. B.** **38. C.** **39.** a) **B.** b) **A.** c) **D.** d) **D.** e) **A.** g) **B.** h) **D.**

**40. A.** **41. C.** **42. A.**

**43.** a) 6,053 6,319 6,563 6,728 7,279 7,743 8,150 8,410

b) Số trung bình cộng là 7,155625 (triệu tấn). Trung vị là 7,0035 (triệu tấn).

Tứ phân vị là $Q_1 = 6,441$ (triệu tấn), $Q_2 = 7,0035$ (triệu tấn), $Q_3 = 7,9465$ (triệu tấn).

c) Khoảng biến thiên là 2,357 (triệu tấn). Khoảng tứ phân vị là 1,5055 (triệu tấn).

d) Phương sai xấp xỉ là 0,67. Độ lệch chuẩn xấp xỉ là 0,82 (triệu tấn).

**44.** Mỗi cách chọn 2 học sinh từ 12 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 12 phần tử. Vậy số phần tử của không gian mẫu $\Omega$ là: $n(\Omega) = C_{12}^2 = 66$.

a) Các học sinh đến từ châu Á là học sinh đến từ 5 nước Việt Nam, Nhật Bản, Singapore, Ấn Độ, Hàn Quốc nên số phần tử của biến cố $A$ là: $C_5^2 = 10$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{66} = \dfrac{5}{33}$.

b) Các học sinh đến từ châu Âu là học sinh đến từ 3 nước Tây Ban Nha, Đức, Pháp nên số phần tử của biến cố $B$ là: $C_3^2 = 3$.

Vậy xác suất của biến cố $B$ là: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{66} = \dfrac{1}{22}$.

c) Các học sinh đến từ châu Mĩ là học sinh đến từ 2 nước Brasil, Canada nên số phần tử của biến cố $C$ là 1.

Vậy xác suất của biến cố $C$ là: $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{66}$.

d) Các học sinh đến từ châu Phi là học sinh đến từ 2 nước Nam Phi, Cameroon nên số phần tử của biến cố $D$ là 1.

Vậy xác suất của biến cố $D$ là: $P(D) = \dfrac{n(D)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{66}$.

**45.** a) Có 4 tỉnh, thành phố mà tên bắt đầu bằng âm tiết Hà là: Hà Nội, Hà Giang, Hà Tĩnh, Hà Nam nên số phần tử của biến cố $A$ là: $C_4^2 = 6$.

Ta có: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{C_{63}^2} = \dfrac{2}{651}$.

b) Có 3 tỉnh mà tên bắt đầu bằng chữ K là: Khánh Hoà, Kiên Giang, Kon Tum nên số phần tử của $B$ là: $C_3^2 = 3$.

Ta có: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{C_{63}^2} = \dfrac{1}{651}$.

c) Có 10 tỉnh mà tên bắt đầu bằng chữ B là: Bà Rịa – Vũng Tàu, Bắc Giang, Bắc Kạn, Bắc Ninh, Bạc Liêu, Bến Tre, Bình Phước, Bình Dương, Bình Định, Bình Thuận nên số phần tử của $C$ là: $C_{10}^2 = 45$.

Ta có: $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{45}{C_{63}^2} = \dfrac{5}{217}$.

**46.** a) Có 5 tỉnh thuộc Tây Nguyên là: Kon Tum, Gia Lai, Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng nên số phần tử của $A$ là $C_5^3 = 10$.

Ta có: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{C_{27}^3} = \dfrac{2}{585}$.

b) Có 4 tỉnh thuộc Duyên hải Nam Trung Bộ là: Phú Yên, Khánh Hoà, Ninh Thuận, Bình Thuận nên số phần tử của $B$ là: $C_4^3 = 4$.

Ta có: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{C_{27}^3} = \dfrac{4}{2\,925}$.

c) Có 5 tỉnh thuộc Đông Nam Bộ là: Bà Rịa – Vũng Tàu, Bình Dương, Bình Phước, Đồng Nai, Tây Ninh nên số phần tử của $C$ là: $C_5^3 = 10$.

Ta có: $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{C_{27}^3} = \dfrac{2}{585}$.

d) Có 13 tỉnh, thành phố thuộc Đồng bằng sông Cửu Long là: Long An, Tiền Giang, Vĩnh Long, Bến Tre, Đồng Tháp, Trà Vinh, An Giang, Cần Thơ, Hậu Giang, Bạc Liêu, Sóc Trăng, Kiên Giang, Cà Mau nên số phần tử của $D$ là $C_{13}^3 = 286$.

Ta có: $P(D) = \dfrac{n(D)}{n(\Omega)} = \dfrac{286}{C_{27}^3} = \dfrac{22}{225}$.

**47.** Không gian mẫu $\Omega$ có số phần tử là: $n(\Omega) = 5^3 = 125$.

Xét biến cố $\overline{A}$: "Tích các số ghi trên thẻ ở 3 lần rút là số lẻ" là biến cố đối của biến cố $A$. Tích các số là số lẻ khi và chỉ khi các số đó đều là số lẻ nên số phần tử của $\overline{A}$ là: $3^3 = 27$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = 1 - \dfrac{27}{125} = \dfrac{98}{125}$.

**48.** Mỗi khách hàng có 5 cách chọn quầy nên số phần tử của không gian mẫu $\Omega$ là: $n(\Omega) = 5^3 = 125$.

Gọi $A$ là biến cố "2 khách hàng cùng vào một quầy và khách hàng còn lại vào một quầy khác".

Số cách chọn 2 khách hàng là $C_3^2 = 3$. Số cách chọn quầy cho 2 khách đó là 5.

Số cách chọn quầy cho khách hàng còn lại là 4.

Suy ra số phần tử của $A$ là: $3 . 5 . 4 = 60$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{60}{125} = \dfrac{12}{25}$.

Chương VII

# PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

## §1 TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

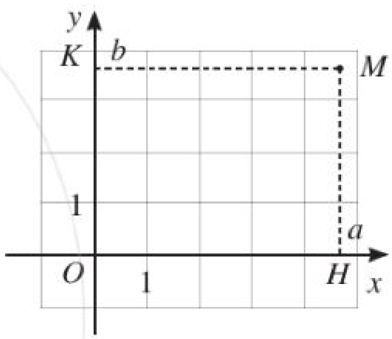
### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

**1. Toạ độ của một điểm**

Để xác định toạ độ của một điểm $M$ tuỳ ý trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, ta làm như sau (*Hình 1*):

– Từ $M$ kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm $H$ ứng với số $a$. Số $a$ là hoành độ của điểm $M$.

– Từ $M$ kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm $K$ ứng với số $b$. Số $b$ là tung độ của điểm $M$.




*Hình 1*

Cặp số $(a ; b)$ là toạ độ của điểm $M$ trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$. Ta kí hiệu là $M(a ; b)$.

**2. Toạ độ của một vectơ**

– Toạ độ của điểm $M$ được gọi là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$. Nếu $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(a ; b)$ thì ta viết $\overrightarrow{OM} = (a ; b)$ hay $\overrightarrow{OM}(a ; b)$, trong đó $a, b$ lần lượt là hoành độ, tung độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

– Vectơ $\vec{i}$ có điểm gốc là $O$ và có toạ độ $(1 ; 0)$ gọi là vectơ đơn vị trên trục $Ox$; vectơ $\vec{j}$ có điểm gốc là $O$ và có toạ độ $(0 ; 1)$ gọi là vectơ đơn vị trên trục $Oy$.

– Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là tọa độ của điểm $A$, trong đó $A$ là điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Nếu $\vec{u}$ có toạ độ $(a ; b)$ thì ta viết $\vec{u} = (a ; b)$ hay $\vec{u}(a ; b)$, trong đó $a, b$ lần lượt là hoành độ, tung độ của vectơ $\vec{u}$.

– Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, nếu $\vec{u} = (a ; b)$ thì $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Ngược lại, nếu $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ thì $\vec{u} = (a ; b)$.

– Với $\vec{a} = (x_1 ; y_1)$; $\vec{b} = (x_2 ; y_2)$, ta có $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2. \end{cases}$

**3. Liên hệ giữa toạ độ của điểm và toạ độ của vectơ**

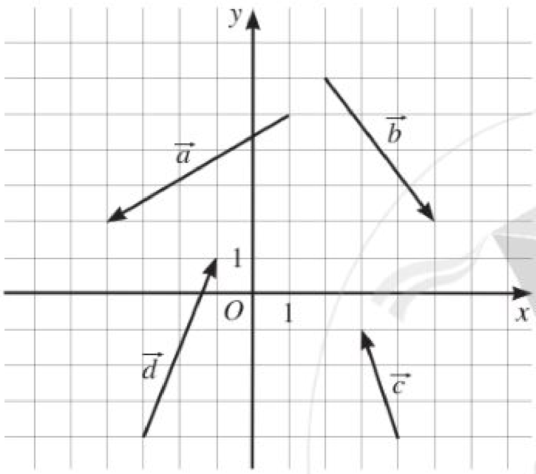
Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho hai điểm $A(x_A\ ;\ y_A)$ và $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$.

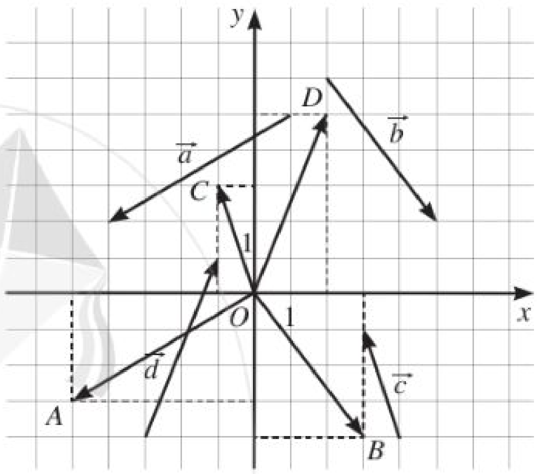
## B. VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Tìm toạ độ của vectơ

**_Ví dụ 1_** Tìm toạ độ của các vectơ trong *Hình 2*.




*Hình 2*




*Hình 3*

*Giải*

Trong *Hình 3*, ta có:

– Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, ta có: $A(-5\ ;-3)$ nên $\vec{a} = (-5\ ;-3)$.

– Vẽ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, ta có: $B(3\ ;-4)$ nên $\vec{b} = (3\ ;-4)$.

– Vẽ $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, ta có: $C(-1\ ;3)$ nên $\vec{c} = (-1\ ;3)$.

– Vẽ $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, ta có: $D(2\ ;5)$ nên $\vec{d} = (2\ ;5)$.

**_Ví dụ 2_** Tìm toạ độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = -2\vec{i}$; b) $\vec{b} = 3\vec{j}$; c) $\vec{c} = -4\vec{i} + \vec{j}$; d) $\vec{d} = \sqrt{5}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.

*Giải*

a) $\vec{a} = (-2\ ;0)$; b) $\vec{b} = (0\ ;3)$; c) $\vec{c} = (-4\ ;1)$; d) $\vec{d} = \left(\sqrt{5}\ ;\frac{1}{2}\right)$.

### Vấn đề 2. Tìm điều kiện để hai vectơ bằng nhau, chứng minh hai vectơ bằng nhau

**_Ví dụ 3_** Tìm các số thực $a$ và $b$ sao cho mỗi cặp vectơ sau bằng nhau:

a) $\vec{m} = (3a - 1\ ;2b + 1)$ và $\vec{n} = (-4\ ;2)$;

b) $\vec{u} = (2a - 1 ; -3)$ và $\vec{v} = (3 ; 4b + 1)$;

c) $\vec{x} = (a + b ; -2a + 3b)$ và $\vec{y} = (2a - 3 ; 4b)$.

*Giải*

a) $\vec{m} = \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 1 = -4 \\ 2b + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

b) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 3 \\ -3 = 4b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \end{cases}$

c) $\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2a - 3 \\ -2a + 3b = 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases}$

***Ví dụ 4*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho bốn điểm $A(-2 ; 1)$, $B(2 ; 3)$, $C(1 ; 0)$, $D(-3 ; -2)$. Chứng minh $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

*Giải*

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4 ; 2)$, $\overrightarrow{DC} = (4 ; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

**Vấn đề 3. Tìm toạ độ của một điểm thoả mãn điều kiện cho trước**

***Ví dụ 5*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho ba điểm $A(2 ; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(3 ; -1)$.

a) Tìm toạ độ điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

b) Tìm toạ độ trung điểm $N$ của đoạn thẳng $AC$. Chứng minh $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}$.

*Giải*

a) Giả sử $M(x ; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x - 2 ; y - 3)$, $\overrightarrow{BC} = (4 ; -2)$.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 \\ y - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1. \end{cases}$ Vậy $M(6 ; 1)$.

b) Giả sử $N(x ; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AN} = (x - 2 ; y - 3)$, $\overrightarrow{NC} = (3 - x ; -1 - y)$.

Vì $N$ là trung điểm của đoạn thẳng $AC$ nên ta có:

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 - x \\ y - 3 = -1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 1. \end{cases}$ Vậy $N\left(\dfrac{5}{2};1\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{BN} = \left(\dfrac{7}{2} ; 0\right)$, $\overrightarrow{NM} = \left(\dfrac{7}{2} ; 0\right)$. Suy ra $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}$.

*Ví dụ 6* Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$. Các điểm $M(1\ ;-2)$, $N(4\ ;-1)$ và $P(6\ ;2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC$, $CA$, $AB$. Tìm toạ độ của các điểm $A$, $B$, $C$.

*Giải*

Vì $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $CA$, $AB$ nên tứ giác $ANMP$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{PM}$. Giả sử $A(x_A\ ;y_A)$.

Ta có: $\overrightarrow{AN}=(4-x_A\ ;-1-y_A)$; $\overrightarrow{PM}=(-5\ ;-4)$.

Suy ra: $\begin{cases}4-x_A=-5\\-1-y_A=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=9\\y_A=3.\end{cases}$ Vậy $A(9\ ;3)$.

Tương tự, từ $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{NP}$, ta tính được $B(3\ ;1)$, $C(-1\ ;-5)$.

## C. BÀI TẬP

**1.** Toạ độ của vectơ $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ là:

**A.** $(-3\ ;2)$. **B.** $(2\ ;-3)$. **C.** $(-3\vec{i}\ ;2\vec{j})$. **D.** $(3\ ;2)$.

**2.** Tọa độ của vectơ $\vec{u}=5\vec{j}$ là:

**A.** $(5\ ;0)$. **B.** $(5\ ;\vec{j})$. **C.** $(0\ ;5\vec{j})$. **D.** $(0\ ;5)$.

**3.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $A(2\ ;-5)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$ là:

**A.** $(2\ ;5)$. **B.** $(2\ ;-5)$. **C.** $(-2\ ;-5)$. **D.** $(-2\ ;5)$.

**4.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $A(-1\ ;3)$, $B(2\ ;-1)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

**A.** $(1\ ;-4)$. **B.** $(-3\ ;4)$. **C.** $(3\ ;-4)$. **D.** $(1\ ;-2)$.

**5.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $\vec{u}=(-2\ ;-4)$, $\vec{v}=(2x-y\ ;y)$. Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng nhau nếu:

**A.** $\begin{cases}x=1\\y=-4.\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-3\\y=-4.\end{cases}$

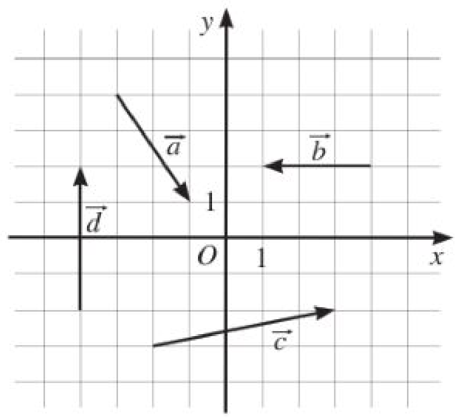
**C.** $\begin{cases}x=1\\y=4.\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=-3\\y=4.\end{cases}$

**6.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1\ ;-2)$, $B(3\ ;2)$, $C(4\ ;-1)$. Toạ độ của đỉnh $D$ là:

**A.** $(8\ ;3)$. **B.** $(3\ ;8)$.

**C.** $(-5\ ;0)$. **D.** $(0\ ;-5)$.

**7.** Tìm toạ độ của các vectơ trong *Hình 4*.



*Hình 4*

**8.** Tìm các số thực $a$ và $b$ sao cho mỗi cặp vectơ sau bằng nhau:

a) $\vec{m} = (2a + 3 ; b - 1)$ và $\vec{n} = (1 ; -2)$;

b) $\vec{u} = (3a - 2 ; 5)$ và $\vec{v} = (5 ; 2b + 1)$;

c) $\vec{x} = (2a + b ; 2b)$ và $\vec{y} = (3 + 2b ; b - 3a)$.

**9.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4 ; 2)$, $B(2 ; 4)$, $C(8 ; -2)$. Tìm toạ độ của điểm $D$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

**10.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho tứ giác $ABCD$ có $A(x_A ; y_A)$; $B(x_B ; y_B)$; $C(x_C ; y_C)$; $D(x_D ; y_D)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $x_A + x_C = x_B + x_D$ và $y_A + y_C = y_B + y_D$

**11.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho ba điểm không thẳng hàng $M(1 ; -2)$, $N(3 ; 1)$, $P(-1 ; 2)$. Tìm toạ độ điểm $Q$ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình thang có $MN \parallel PQ$ và $PQ = 2MN$.

# §2 BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Biểu thức toạ độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ

Nếu $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$ thì

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2);$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2 ; y_1 - y_2);$$

$$k\vec{u} = (kx_1 ; ky_1) \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

*Nhận xét:* Hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$, $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực $k$ sao cho $x_1 = kx_2$ và $y_1 = ky_2$.

### 2. Toạ độ trung điểm đoạn thẳng và toạ độ trọng tâm tam giác

– Cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$. Nếu $M(x_M ; y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ thì

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

– Cho tam giác $ABC$ có $A(x_A\ ;\ y_A)$, $B(x_B\ ;\ y_B)$, $C(x_C\ ;\ y_C)$. Nếu $G(x_G\ ;\ y_G)$ là trọng tâm tam giác $ABC$ thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

**3. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng**

– Nếu $\vec{u} = (x_1\ ;\ y_1)$ và $\vec{v} = (x_2\ ;\ y_2)$ thì $\vec{u}\ .\ \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.

– Nếu $\vec{a} = (x\ ;\ y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\ .\ \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

– Nếu $A(x_1\ ;\ y_1)$ và $B(x_2\ ;\ y_2)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

– Với hai vectơ $\vec{u} = (x_1\ ;\ y_1)$ và $\vec{v} = (x_2\ ;\ y_2)$ đều khác $\vec{0}$, ta có:

- $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.
- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\ .\ \vec{v}}{|\vec{u}|\ .\ |\vec{v}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ .\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

## B. VÍ DỤ

**Vấn đề 1. Tìm toạ độ của vectơ dựa trên biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ**

***Ví dụ 1*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $\vec{u} = (1\ ;\ -2)$, $\vec{v} = (-2\ ;\ -3)$.

Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $-2\vec{u}$ và $3\vec{u} - 4\vec{v}$.

*Giải*

Ta có: $\vec{u} + \vec{v} = (-1\ ;\ -5)$, $\vec{u} - \vec{v} = (3\ ;\ 1)$, $-2\vec{u} = (-2\ ;\ 4)$.

Với $3\vec{u} = (3\ ;\ -6)$, $4\vec{v} = (-8\ ;\ -12)$ ta có: $3\vec{u} - 4\vec{v} = (11\ ;\ 6)$.

***Ví dụ 2*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $\vec{a} = (-1\ ;\ 2)$, $\vec{b} = (3\ ;\ 1)$, $\vec{c} = (2\ ;\ -3)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.

*Giải*

a) Ta có: $2\vec{a} = (-2\ ;\ 4)$ nên $2\vec{a} + \vec{b} = (1\ ;\ 5)$. Mà $3\vec{c} = (6\ ;\ -9)$.

Suy ra $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} = (-5\ ;\ 14)$.

b) Ta có: $\vec{x} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$. Mà $\vec{a} + \vec{c} = (1\ ;\ -1)$, $2\vec{b} = (6\ ;\ 2)$.

Suy ra $\vec{x} = \vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b} = (-5\ ;\ -3)$.

### Vấn đề 2. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

*Ví dụ 3* Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $A(-1 ; 2)$, $B(2 ; 3)$, $C(-4 ; m)$. Tìm $m$ để ba điểm $A, B, C$ thẳng hàng.

*Giải*

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3 ; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3 ; m-2)$.

$A, B, C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ Tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Từ $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ta có: $\begin{cases} 3 = k\,.\,(-3) \\ 1 = k(m-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ m = 1. \end{cases}$

Suy ra với $m = 1$ thì tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ hay $A, B, C$ thẳng hàng.

### Vấn đề 3. Tìm toạ độ trung điểm đoạn thẳng và toạ độ trọng tâm tam giác

*Ví dụ 4* Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $A(-2 ; 3)$, $B(4 ; 5)$, $C(2 ; -3)$.

a) Chứng minh ba điểm $A, B, C$ không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ trung điểm $M$ của đoạn thẳng $BC$.

c) Tìm toạ độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

*Giải*

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (6 ; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (4 ; -6)$.

Do $\frac{6}{4} \neq \frac{2}{-6}$ nên không tồn tại $k \in \mathbb{R}$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Vì vậy ba điểm $A, B, C$ không thẳng hàng.

b) Do $M(x_M ; y_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng $BC$ nên ta có:

$x_M = \frac{4+2}{2} = 3$; $y_M = \frac{5+(-3)}{2} = 1$. Vậy $M(3 ; 1)$.

c) Do $G(x_G ; y_G)$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ nên ta có:

$x_G = \frac{-2+4+2}{3} = \frac{4}{3}$; $y_G = \frac{3+5+(-3)}{3} = \frac{5}{3}$. Vậy $G\left(\frac{4}{3} ; \frac{5}{3}\right)$.

### Vấn đề 4. Tìm toạ độ điểm thoả mãn điều kiện cho trước

*Ví dụ 5* Cho ba điểm không thẳng hàng $A(1 ; 1)$, $B(4 ; 3)$ và $C(6 ; -2)$.

Tìm toạ độ điểm $D$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $CD = 2AB$.

*Giải*

Giả sử $D(x ; y)$. Ta có: $\overrightarrow{CD} = (x-6 ; y+2)$, $\overrightarrow{AB} = (3 ; 2)$. Từ giả thiết suy ra:

$\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 = (-2)\,.\,3 \\ y + 2 = (-2)\,.\,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6. \end{cases}$ Vậy $D(0 ; -6)$.

### Vấn đề 5. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng và ứng dụng

**Ví dụ 6** Tính góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (-2\ ;\ -2\sqrt{3})$, $\vec{v} = (3\ ;\ \sqrt{3})$.

*Giải*

Ta có: $\vec{u} . \vec{v} = (-2) . 3 + (-2\sqrt{3}) . \sqrt{3} = -12$,

$|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$, $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$.

Suy ra $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} . \vec{v}}{|\vec{u}| . |\vec{v}|} = \dfrac{-12}{4 . 2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $(\vec{u}, \vec{v}) = 150°$.

**Ví dụ 7** Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có $A(-2\ ;\ 3)$, $B(4\ ;\ 5)$, $C(2\ ;\ -3)$. Giải tam giác *ABC* (làm tròn các kết quả đến hàng đơn vị).

*Giải*

– Ta có: $AB = \sqrt{(4-(-2))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6$,

$BC = \sqrt{(2-4)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \approx 8$,

$AC = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7$.

– Ta có: $\overrightarrow{AB} = (6\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{AC} = (4\ ;\ -6)$ nên $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 6 . 4 + 2 . (-6) = 12$.

Suy ra $\cos\widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| . |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{12}{2\sqrt{10} . 2\sqrt{13}} = \dfrac{3\sqrt{130}}{130}$.

Vậy $\widehat{BAC} \approx 75°$.

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-6\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{BC} = (-2\ ;\ -8)$ nên

$$\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC} = (-6) . (-2) + (-2) . (-8) = 28.$$

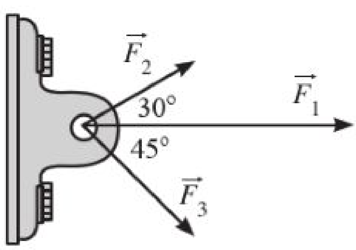
Suy ra $\cos\widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| . |\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{28}{2\sqrt{10} . 2\sqrt{17}} = \dfrac{7\sqrt{170}}{170}$.

Vậy $\widehat{ABC} \approx 58°$.

Suy ra ta có: $\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) \approx 180° - (75° + 58°) = 47°$.

### Vấn đề 6. Ứng dụng

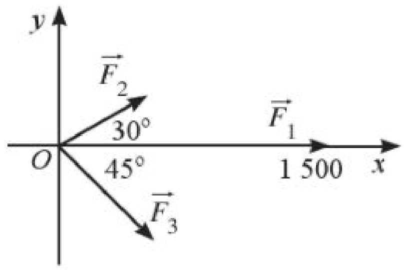
**Ví dụ 8** Một vật đồng thời bị ba lực tác động: lực tác động thứ nhất $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là 1 500 N, lực tác động thứ hai $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là 600 N, lực tác động thứ ba $\overrightarrow{F_3}$ có độ lớn là 800 N. Các lực này được biểu diễn bằng những vectơ như *Hình 5*, với $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 30°$, $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_3}) = 45°$ và $(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}) = 75°$. Tính độ lớn lực tổng hợp tác động lên vật (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



*Hình 5*

*Giải*

Chọn hệ trục toạ độ *Oxy* như *Hình 6*, *x* và *y* tính bằng Newton .



*Hình 6*

Ta có:

$\vec{F_1} = (1\,500\ ;\ 0)$;

$(\vec{F_1}, \vec{F_2}) = 30°$ nên toạ độ của $\vec{F_2}$ là:

$\vec{F_2} = (600\cos 30°\ ;\ 600\sin 30°)$ hay $\vec{F_2} = (300\sqrt{3}\ ;\ 300)$.

$(\vec{F_1}, \vec{F_3}) = 45°$ nên toạ độ của $\vec{F_3}$ là:

$\vec{F_3} = (800\cos 45°\ ;\ -800\sin 45°)$ hay $\vec{F_3} = (400\sqrt{2}\ ;\ -400\sqrt{2})$.

Do đó, lực $\vec{F}$ tổng hợp các lực tác động lên vật có toạ độ là:

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = (1\,500 + 300\sqrt{3} + 400\sqrt{2}\ ;\ 300 - 400\sqrt{2})$.

Độ lớn lực tổng hợp $\vec{F}$ tác động lên vật là:

$|\vec{F}| = \sqrt{(1\,500 + 300\sqrt{3} + 400\sqrt{2})^2 + (300 - 400\sqrt{2})^2} \approx 2\,599$ (N).

## C. BÀI TẬP

**12.** Cho hai vectơ $\vec{u} = (-1\ ;\ 3)$ và $\vec{v} = (2\ ;\ -5)$. Toạ độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là:

**A.** $(1\ ;\ -2)$. **B.** $(-2\ ;\ 1)$. **C.** $(-3\ ;\ 8)$. **D.** $(3\ ;\ -8)$.

**13.** Cho hai vectơ $\vec{u} = (2\ ;\ -3)$ và $\vec{v} = (1\ ;\ 4)$. Toạ độ của vectơ $\vec{u} - 2\vec{v}$ là:

**A.** $(0\ ;\ 11)$. **B.** $(0\ ;\ -11)$. **C.** $(-11\ ;\ 0)$. **D.** $(-3\ ;\ 10)$.

**14.** Cho hai điểm $A(4\ ;\ -1)$ và $B(-2\ ;\ 5)$. Toạ độ trung điểm *M* của đoạn thẳng *AB* là:

**A.** $(2\ ;\ 4)$. **B.** $(-3\ ;\ 3)$. **C.** $(3\ ;\ -3)$. **D.** $(1\ ;\ 2)$.

**15.** Cho tam giác *ABC* có $A(4\ ;\ 6)$, $B(1\ ;\ 2)$, $C(7\ ;\ -2)$. Toạ độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC* là:

**A.** $\left(4\ ;\ \dfrac{10}{3}\right)$. **B.** $(8\ ;\ 4)$. **C.** $(2\ ;\ 4)$. **D.** $(4\ ;\ 2)$.

**16.** Cho hai điểm $M(-2\ ;\ 4)$ và $N(1\ ;\ 2)$. Khoảng cách giữa hai điểm *M* và *N* là:

**A.** $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 13. **D.** $\sqrt{37}$.

**17.** Cho hai vectơ $\vec{u} = (-4\ ;\ -3)$ và $\vec{v} = (-1\ ;\ -7)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là:

**A.** 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

**18.** Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (1 ; 1)$ và $\vec{v} = (-2 ; 1)$ là:

**A.** $\dfrac{-1}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\dfrac{-\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\dfrac{3}{10}$.

**19.** Cho tam giác $ABC$ có $A(2 ; 6)$, $B(-2 ; 2)$, $C(8 ; 0)$. Khi đó, tam giác $ABC$ là:

**A**. Tam giác đều. **B.** Tam giác vuông tại $A$.

**C.** Tam giác có góc tù tại $A$. **D.** Tam giác cân tại $A$.

**20.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho ba điểm $A(1 ; 5)$, $B(-1 ; -1)$, $C(2 ; -5)$.

a) Chứng minh ba điểm $A$, $B$, $C$ không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

c) Tìm toạ độ điểm $D$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB$ // $CD$ và $CD = \dfrac{3}{2}AB$.

**21.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(-2 ; 4)$, $B(-5 ; -1)$, $C(8 ; -2)$. Giải tam giác $ABC$ (làm tròn các kết quả số đo góc đến hàng đơn vị).

**22.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho hai điểm $A(4 ; -2)$, $B(10 ; 4)$ và điểm $M$ nằm trên trục $Ox$. Tìm toạ độ điểm $M$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

**23.** Trên màn hình ra đa của đài kiểm soát không lưu (được coi như mặt phẳng toạ độ $Oxy$ với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), một máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều từ thành phố $A$ có toạ độ $(600 ; 200)$ đến thành phố $B$ có toạ độ $(200 ; 500)$ và thời gian bay quãng đường $AB$ là 3 giờ. Hãy tìm toạ độ của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ.

# §3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Phương trình tham số của đường thẳng

– Vectơ $\vec{u}$ được gọi là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng $\Delta$ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với $\Delta$.

– Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ ($a^2 + b^2 > 0$ và $t$ là tham số) được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng $\Delta$ đi qua $M_0(x_0 ; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a ; b)$ làm vectơ chỉ phương.

**2. Phương trình tổng quát của đường thẳng**

– Vectơ $\vec{n}$ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của đường thẳng $\Delta$ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{n}$ vuông góc với $\Delta$.

*Nhận xét:* Nếu đường thẳng $\Delta$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a\,;b)$ thì vectơ $\vec{n} = (-b\,;a)$ là một vectơ pháp tuyến của $\Delta$ và ngược lại.

– Phương trình $ax + by + c = 0$ ($a$ và $b$ không đồng thời bằng 0) được gọi là *phương trình tổng quát* của đường thẳng.

**3. Lập phương trình đường thẳng**

**a) Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến**

Phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a\,;b)$ $(\vec{n} \neq \vec{0})$ làm vectơ pháp tuyến là $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

**b) Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ chỉ phương**

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a\,;b)$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ làm vectơ chỉ phương là:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \text{ ($t$ là tham số).}$$

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng $\Delta$ ở dạng:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

**c) Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm**

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm $A(x_0\,;y_0)$, $B(x_1\,;y_1)$ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \text{ ($t$ là tham số).}$$

Nếu $x_1 - x_0 \neq 0$ và $y_1 - y_0 \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng $\Delta$ ở dạng: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$.

*Chú ý:* Đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm $A(a\,;0)$ và $B(0\,;b)$ $(ab \neq 0)$ có phương trình $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, gọi là *phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.*

## B. VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Lập phương trình tham số của đường thẳng

*Phương pháp:* Để lập phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ ta thực hiện các bước sau:

– Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a\ ;\ b)$ của đường thẳng $\Delta$;

– Tìm một điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ thuộc $\Delta$;

– Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ ($t$ là tham số).

***Ví dụ 1*** Lập phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta$ đi qua điểm $A(-1\ ;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2\ ;\ -3)$;

b) $\Delta$ đi qua điểm $B(2\ ;\ 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-3\ ;\ -4)$;

c) $\Delta$ đi qua hai điểm $A(3\ ;\ -3)$ và $B(-2\ ;\ -1)$.

*Giải*

a) Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$ ($t$ là tham số).

b) $\Delta$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-3\ ;\ -4)$ nên có thể chọn một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (4\ ;\ -3)$. Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là: $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$ ($t$ là tham số).

c) Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là:

$$\begin{cases} x = 3 + (-2 - 3)t \\ y = -3 + [-1 - (-3)]t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = -3 + 2t \end{cases} \text{ ($t$ là tham số).}$$

***Ví dụ 2*** Cho đường thẳng $d$ có phương trình tổng quát là $x - 2y - 5 = 0$. Lập phương trình tham số của đường thẳng $d$.

*Giải*

Từ phương trình tổng quát của $d$, ta lấy được một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1\ ;\ -2)$ nên ta chọn được một vectơ chỉ phương của $d$ là $\vec{u} = (2\ ;\ 1)$. Chọn điểm $A(1\ ;\ -2)$ thuộc $d$. Vậy phương trình tham số của đường thẳng $d$ là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \text{ ($t$ là tham số).}$$

### Vấn đề 2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng

*Phương pháp:* Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ ta thực hiện các bước sau:

– Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a\ ;\ b)$ của đường thẳng $\Delta$;

– Tìm một điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ thuộc $\Delta$;

– Lập phương trình của $\Delta$: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ rồi biến đổi về dạng tổng quát: $ax + by + c = 0$ ($c = -ax_0 - by_0$).

***Ví dụ 3*** Lập phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta$ đi qua điểm $A(-2\ ;-1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3\ ;-4)$;

b) $\Delta$ đi qua điểm $B(3\ ;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5\ ;-3)$;

c) $\Delta$ đi qua hai điểm $C(5\ ;\ 0)$ và $D(0\ ;-2)$.

*Giải*

a) Đường thẳng $\Delta$ có phương trình là $3(x + 2) - 4(y + 1) = 0$. Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ là $3x - 4y + 2 = 0$.

b) $\Delta$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (5\ ;-3)$ nên có thể chọn một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3\ ;\ 5)$. Đường thẳng $\Delta$ có phương trình là $3(x - 3) + 5(y + 2) = 0$. Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ là $3x + 5y + 1 = 0$.

c) *Cách 1:* $\Delta$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{CD} = (-5\ ;-2)$ nên có thể chọn một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2\ ;-5)$. Đường thẳng $\Delta$ có phương trình là $2(x - 5) - 5(y - 0) = 0$. Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ là $2x - 5y - 10 = 0$.

*Cách 2:* Phương trình theo đoạn chắn của đường thẳng $\Delta$ là $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$. Ta có:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1 \Leftrightarrow -2x + 5y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y - 10 = 0.$$

Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ là $2x - 5y - 10 = 0$.

***Ví dụ 4*** Cho tam giác $ABC$, biết $A(1\ ;\ 3)$, $B(-1\ ;-1)$, $C(5\ ;-3)$. Lập phương trình tổng quát của:

a) Ba đường thẳng $AB$, $BC$, $AC$;

b) Đường trung trực cạnh $AB$;

c) Đường cao $AH$ và đường trung tuyến $AM$.

*Giải*

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2\ ;-4)$, $\overrightarrow{BC} = (6\ ;-2)$, $\overrightarrow{AC} = (4\ ;-6)$.

– $AB$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-1\ ;-2)$ nên có thể chọn một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2\ ;-1)$. Phương trình của đường thẳng $AB$ là $2(x - 1) - 1(y - 3) = 0$. Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng $AB$ là $2x - y + 1 = 0$.

– $BC$ có vectơ chỉ phương là $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (3\ ;\ -1)$ nên có thể chọn một vectơ pháp tuyến $\vec{m} = (1\ ;\ 3)$. Phương trình của đường thẳng $BC$ là $1(x+1) + 3(y+1) = 0$. Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng $BC$ là $x + 3y + 4 = 0$.

– $AC$ có vectơ chỉ phương là $\vec{t} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (2\ ;\ -3)$ nên có thể chọn một vectơ pháp tuyến $\vec{p} = (3\ ;\ 2)$. Phương trình của đường thẳng $AC$ là $3(x-1) + 2(y-3) = 0$. Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng $AC$ là $3x + 2y - 9 = 0$.

b) Gọi $d$ là đường trung trực cạnh $AB$. Lấy $N$ là trung điểm $AB$, suy ra $N(0\ ;\ 1)$. Đường thẳng $d$ có vectơ pháp tuyến $\vec{q} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1\ ;\ 2)$ và đi qua $N$. Phương trình của đường thẳng $d$ là $1(x-0) + 2(y-1) = 0$. Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ là $x + 2y - 2 = 0$.

c) $AH$ vuông góc với $BC$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (3\ ;\ -1)$. Phương trình của đường cao $AH$ là $3(x-1) - 1(y-3) = 0$. Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng $AH$ là $3x - y = 0$.

$M$ là trung điểm $BC$, suy ra $M(2\ ;\ -2)$. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (1\ ;\ -5)$. Trung tuyến $AM$ có vectơ chỉ phương là $\vec{r} = \overrightarrow{AM} = (1\ ;\ -5)$ nên có thể chọn một vectơ pháp tuyến $\vec{s} = (5\ ;\ 1)$. Phương trình của đường thẳng $AM$ là $5(x-1) + 1(y-3) = 0$. Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng $AM$ là $5x + y - 8 = 0$.

### Vấn đề 3. Tìm toạ độ điểm thuộc đường thẳng thoả mãn điều kiện cho trước

***Ví dụ 5*** Cho đường thẳng $d$ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t. \end{cases}$

a) Tìm toạ độ điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $OM = 5$ với $O$ là gốc toạ độ.

b) Tìm toạ độ điểm $N$ thuộc $d$ sao cho khoảng cách từ $N$ đến trục hoành $Ox$ là 3.

*Giải*

a) Điểm $M$ thuộc $d$ nên ta có: $M(1 + 2m\ ;\ -2 + m)$ với $m \in \mathbb{R}$.

$$OM = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(1+2m)^2 + (-2+m)^2} = 5 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2. \end{array}\right.$$

Với $m = 2$ ta có: $M(5\ ;\ 0)$.

Với $m = -2$ ta có: $M(-3\ ;\ -4)$.

Vậy có hai điểm $M$ thoả mãn bài toán: $M(5\ ;\ 0)$ và $M(-3\ ;\ -4)$.

b) Điểm $N$ thuộc $d$ nên ta có: $N(1 + 2n ; -2 + n)$. Khoảng cách từ $N$ đến trục hoành $Ox$ bằng giá trị tuyệt đối của tung độ điểm $N$. Do đó, khoảng cách từ $N$ đến trục hoành $Ox$ bằng 3 khi và chỉ khi

$$|-2+n| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = -1. \end{array}\right.$$

Với $n = 5$ ta có: $N(11 ; 3)$.

Với $n = -1$ ta có: $N(-1 ; -3)$.

Vậy có hai điểm $N$ thoả mãn bài toán: $N(11 ; 3)$ và $N(-1 ; -3)$.

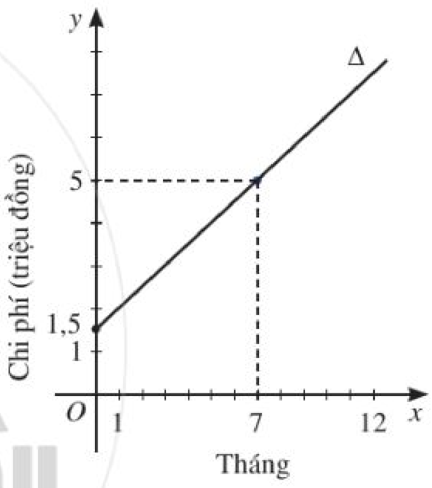
### Vấn đề 4. Ứng dụng

***Ví dụ 6*** Để tham gia một phòng tập thể dục, người tập phải trả một khoản phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Đường thẳng $\Delta$ ở *Hình 7* biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) tham gia một phòng tập thể dục theo thời gian tập của một người (đơn vị: tháng).

a) Viết phương trình của đường thẳng $\Delta$.

b) Giao điểm của đường thẳng $\Delta$ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì?

c) Tính tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng.




*Hình 7*

*Giải*

a) Đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm lần lượt có toạ độ $(0 ; 1,5)$ và $(7 ; 5)$ nên $\Delta$ có phương trình là:

$$\frac{x-0}{7-0} = \frac{y-1,5}{5-1,5} \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{y-1,5}{3,5} \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

b) Giao điểm của đường thẳng $\Delta$ với trục $Oy$ ứng với $x = 0$. Thời điểm $x = 0$ cho biết khoản phí tham gia ban đầu mà người tập phải trả. Khi $x = 0$ thì $y = 1,5$, vì vậy khoản phí tham gia ban đầu mà người tập phải trả là 1 500 000 đồng.

c) 12 tháng đầu tiên ứng với $x = 12$. Do đó: $y = \frac{1}{2} . 12 + \frac{3}{2} = 7,5.$

Vậy tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng là 7 500 000 đồng.

## C. BÀI TẬP

**24.** Cho đường thẳng $\Delta$: $2x - 3y + 5 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của $\Delta$?

**A.** $\vec{n}_1 = (2\ ;\ -3)$.　　**B.** $\vec{n}_2 = (-3\ ;\ 2)$.

**C.** $\vec{n}_3 = (2\ ;\ 3)$.　　**D.** $\vec{n}_4 = (3\ ;\ 2)$.

**25.** Cho đường thẳng $\Delta$: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 2t. \end{cases}$ Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của $\Delta$?

**A.** $\vec{u}_1 = (3\ ;\ 4)$.　　**B.** $\vec{u}_2 = (-2\ ;\ 1)$.

**C.** $\vec{u}_3 = (-1\ ;\ 2)$.　　**D.** $\vec{u}_4 = (-2\ ;\ -1)$.

**26.** Cho đường thẳng $\Delta$: $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -1 + 3t. \end{cases}$ Trong các điểm có toạ độ dưới đây, điểm nào nằm trên đường thẳng $\Delta$?

**A.** $(-3\ ;\ -2)$.　　**B.** $(2\ ;\ -1)$.　　**C.** $(-2\ ;\ 1)$.　　**D.** $(-5\ ;\ 3)$.

**27.** Cho đường thẳng $\Delta$: $x - 3y + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của $\Delta$?

**A.** $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 + t. \end{cases}$　　**B.** $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + t. \end{cases}$

**C.** $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 1 + t. \end{cases}$　　**D.** $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 - t. \end{cases}$

**28.** Cho đường thẳng $\Delta$: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - 5t. \end{cases}$ Phương trình nào dưới đây là phương trình tổng quát của $\Delta$?

**A.** $5x + 2y - 4 = 0$.　　**B.** $2x - 5y + 19 = 0$.

**C.** $-5x + 2y - 16 = 0$.　　**D.** $5x + 2y + 4 = 0$.

**29.** Cho tam giác $ABC$, biết toạ độ trung điểm các cạnh $BC$, $CA$, $AB$ lần lượt là $M(-1\ ;\ 1)$, $N(3\ ;\ 4)$, $P(5\ ;\ 6)$.

a) Viết phương trình tham số của các đường thẳng $AB$, $BC$, $CA$.

b) Viết phương trình tổng quát của các đường trung trực của tam giác $ABC$.

**30.** Cho tam giác $ABC$ có $A(3\ ;\ 7)$, $B(-2\ ;\ 2)$, $C(6\ ;\ 1)$. Viết phương trình tổng quát của các đường cao của tam giác $ABC$.

**31.** Cho đường thẳng $\Delta$: $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ và điểm $A(2 ; 1)$. Hai điểm $M$, $N$ nằm trên $\Delta$.

a) Tìm toạ độ điểm $M$ sao cho $AM = \sqrt{17}$.

b) Tìm toạ độ điểm $N$ sao cho đoạn thẳng $AN$ ngắn nhất.

**32.** Cho ba điểm $A(-2 ; 2)$, $B(7 ; 5)$, $C(4 ; -5)$ và đường thẳng $\Delta$: $2x + y - 4 = 0$.

a) Tìm toạ độ điểm $M$ thuộc $\Delta$ và cách đều hai điểm $A$ và $B$.

b*) Tìm toạ độ điểm $N$ thuộc $\Delta$ sao cho $\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

# §4 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

a) Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$ lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Khi đó

• $\Delta_1$ cắt $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương.

• $\Delta_1$ song song với $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc một đường thẳng mà không thuộc đường thẳng còn lại.

• $\Delta_1$ trùng với $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó.

*Chú ý:* $\Delta_1$ vuông góc với $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ vuông góc với nhau.

b) Cho hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có phương trình lần lượt là:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ (I)

Khi đó

• $\Delta_1$ cắt $\Delta_2$ khi và chỉ khi hệ (I) có nghiệm duy nhất.

• $\Delta_1$ song song với $\Delta_2$ khi và chỉ khi hệ (I) vô nghiệm.

• $\Delta_1$ trùng với $\Delta_2$ khi và chỉ khi hệ (I) có vô số nghiệm.

**2. Góc giữa hai đường thẳng**

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1 ; b_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2 ; b_2)$. Khi đó

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

*Nhận xét*

• $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

• Cho hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Ta cũng có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

**3. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$ và điểm $M(x_0 ; y_0)$. Khoảng cách từ điểm $M$ đến đường thẳng $\Delta$, kí hiệu là $d(M, \Delta)$, được tính bởi công thức sau:

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

*Chú ý:* Nếu $M \in \Delta$ thì $d(M, \Delta) = 0$.

## B. VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

***Ví dụ 1*** Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau:

a) $d_1$: $3x + 2y - 5 = 0$ và $d_2$: $x - 4y + 1 = 0$;

b) $d_3$: $x - 2y + 3 = 0$ và $d_4$: $-2x + 4y + 10 = 0$;

c) $d_5$: $4x + 2y - 3 = 0$ và $d_6$: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} + t \\ y = \dfrac{5}{2} - 2t. \end{cases}$

*Giải*

*Cách 1:*

a) $d_1$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-2 ; 3)$, $d_2$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (4 ; 1)$. Do $\frac{-2}{4} \neq \frac{3}{1}$ nên $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương, suy ra $d_1$ cắt $d_2$.

b) $d_3$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_3 = (2 ; 1)$, $d_4$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_4 = (-4 ; -2)$. Suy ra $\vec{u}_3 = -\frac{1}{2}\vec{u}_4$. Chọn điểm $M(-1 ; 1) \in d_3$. Do $M(-1 ; 1) \notin d_4$ suy ra $d_3$ song song với $d_4$.

c) $d_5$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_5 = (-2 ; 4)$, $d_6$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_6 = (1 ; -2)$. Suy ra $\vec{u}_5 = -2\vec{u}_6$. Chọn điểm $N\left(-\frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right) \in d_6$. Do $N\left(-\frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right) \in d_5$ suy ra $d_5$ trùng với $d_6$.

*Cách 2:*

a) Toạ độ giao điểm của hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{7} \\ y = \dfrac{4}{7}. \end{cases}$$

Hệ trên có một nghiệm duy nhất. Như vậy, $d_1$ và $d_2$ cắt nhau.

b) Toạ độ giao điểm của hai đường thẳng $d_3$ và $d_4$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ -2x + 4y + 10 = 0. \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm. Như vậy, $d_3$ song song với $d_4$.

c) Toạ độ giao điểm của hai đường thẳng $d_5$ và $d_6$ tương ứng với $t$ thoả mãn phương trình:

$$4\left(-\frac{1}{2} + t\right) + 2\left(\frac{5}{2} - 2t\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow 0t = 0.$$

Phương trình này có nghiệm với mọi $t$. Như vậy, $d_5$ và $d_6$ có vô số điểm chung, tức là $d_5$ trùng với $d_6$.

**Vấn đề 2. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và song song hoặc vuông góc với một đường thẳng cho trước**

***Ví dụ 2*** Lập phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta$ đi qua $M(2\ ;-2)$ và song song với đường thẳng $\Delta_1$: $2x + y - 5 = 0$;

b) $\Delta$ đi qua $M(2\ ;3)$ vuông góc với đường thẳng $\Delta_2$: $x + 4y + 3 = 0$.

*Giải*

a) Đường thẳng $\Delta_1$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u_1} = (-1\ ;2)$. $\Delta$ song song với đường thẳng $\Delta_1$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{u_1} = (-1\ ;2)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua $M(2\ ;-2)$ nên phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + 2t. \end{cases}$$

b) Đường thẳng $\Delta_2$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_2} = (1\ ;4)$. $\Delta$ vuông góc với đường thẳng $\Delta_2$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n_2} = (1\ ;4)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua $M(2\ ;3)$ nên phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 4t. \end{cases}$$

**Vấn đề 3. Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng**

***Ví dụ 3*** Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1$: $-2x + y + 5 = 0$ và $\Delta_2$: $3x + y + 7 = 0$;

b) $\Delta_1$: $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ và $\Delta_2$: $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}t. \end{cases}$

*Giải*

a) Ta có $\vec{n_1} = (-2\ ;1)$, $\vec{n_2} = (3\ ;1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của các đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$. Suy ra

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})\right| = \frac{\left|(-2) \cdot 3 + 1 \cdot 1\right|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $(\Delta_1, \Delta_2) = 45°$.

b) Ta có $\vec{u_1} = (1\ ;\sqrt{3})$, $\vec{u_2} = \left(-1\ ;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$. Suy ra

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\right| = \frac{\left|1 . (-1) + \sqrt{3} . \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} . \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $(\Delta_1, \Delta_2) = 30°$.

**Vấn đề 4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**

***Ví dụ 4*** Cho đường thẳng $\Delta$: $x - 3y + 3 = 0$.

a) Tính khoảng cách từ điểm $A(4 ; -1)$ đến đường thẳng $\Delta$;

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $\Delta$ và $\Delta_1$: $x - 3y - 3 = 0$.

*Giải*

a) Ta có: $d(A, \Delta) = \dfrac{|4 - 3 . (-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10}$.

b) Lấy $M(-3 ; 0) \in \Delta$. Ta có:

$$d(M, \Delta_1) = \frac{|(-3) - 3 . 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

Vì hai đường thẳng $\Delta$ và $\Delta_1$ song song nên khoảng cách giữa hai đường thẳng đó bằng $d(M, \Delta_1) = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

***Ví dụ 5*** Cho ba điểm $A(2 ; 4)$, $B(-1 ; 2)$, $C(3 ; -1)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $B$ đồng thời cách đều $A$ và $C$.

*Giải*

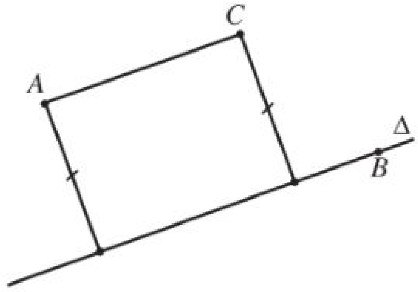
*Cách 1:* Xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1* (*Hình 8*): $A$, $C$ ở cùng phía so với $\Delta$. Khi đó,

$$d(A, \Delta) = d(C, \Delta) \Leftrightarrow \Delta \,//\, AC.$$

Ta có: $\overrightarrow{AC} = (1 ; -5)$ là vectơ chỉ phương của $\Delta$, do đó phương trình của $\Delta$ là:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-5} \text{ hay } 5x + y + 3 = 0.$$

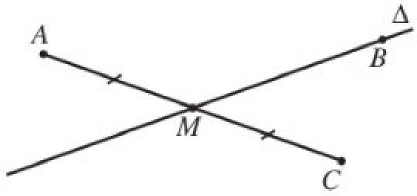



*Hình 8*

*Trường hợp 2* (*Hình 9*): $A$, $C$ ở khác phía so với $\Delta$. Khi đó, $d(A, \Delta) = d(C, \Delta)$ khi và chỉ khi $\Delta$ đi qua trung điểm $M$ của $AC$.

Ta có: $M\left(\frac{5}{2} ; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(\frac{7}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.

Chọn $\vec{u} = (7 ; -1)$ làm vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$. Phương trình đường thẳng $\Delta$ là:



*Hình 9*

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y-2}{-1} \text{ hay } x + 7y - 13 = 0.$$

*Cách 2:* Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $B$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a ; b)$. Khi đó, ta có phương trình $\Delta$ là: $a(x+1) + b(y-2) = 0$ hay $ax + by + (a - 2b) = 0$.

Ta có:

$$d(A, \Delta) = d(C, \Delta) \Leftrightarrow \frac{|3a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |3a + 2b| = |4a - 3b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a + 2b = 4a - 3b \\ 3a + 2b = -4a + 3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -a + 5b = 0 & (1) \\ 7a - b = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Với (1), ta có thể chọn $a = 5$, $b = 1$. Khi đó, phương trình đường thẳng $\Delta$ là: $5x + y + 3 = 0$.

Với (2), ta có thể chọn $a = 1$, $b = 7$. Khi đó, phương trình đường thẳng $\Delta$ là: $x + 7y - 13 = 0$.

## Vấn đề 5. Ứng dụng

***Ví dụ 6*** Có hai con tàu $A$ và $B$ cùng xuất phát từ hai bến, chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình ra đa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng toạ độ $Oxy$ với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), sau khi xuất phát $t$ (giờ) ($t \geq 0$), vị trí của tàu $A$ có toạ độ được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 3 - 35t \\ y = -4 + 25t \end{cases}$, vị trí của tàu $B$ có toạ độ là $N(4 - 30t ; 3 - 40t)$.

a) Tính côsin góc giữa hai đường đi của hai tàu $A$ và $B$.

b) Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhau nhất?

c) Nếu tàu $A$ đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu $B$ chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

*Giải*

a) Tàu $A$ di chuyển theo hướng cùng hướng với vectơ $\vec{u}_1 = (-35 ; 25)$; tàu $B$ di chuyển theo hướng cùng hướng với vectơ $\vec{u}_2 = (-30 ; -40)$. Gọi $\alpha$ là góc giữa hai đường đi của hai tàu.

Ta có:

$$\cos\alpha = \left|\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\right| = \frac{\left|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right| \cdot \left|\vec{u}_2\right|} = \frac{\left|(-35) \cdot (-30) + 25 \cdot (-40)\right|}{\sqrt{(-35)^2 + 25^2} \cdot \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2}} = \frac{1}{5\sqrt{74}}.$$

b) Vị trí của tàu $A$ tại thời điểm sau khi xuất phát $t$ (giờ) ($t \geq 0$) là điểm $M$ có toạ độ là $(3 - 35t\,;\, -4 + 25t)$.

Vị trí của tàu $B$ tại thời điểm sau khi xuất phát $t$ (giờ) ($t \geq 0$) là điểm $N$ có toạ độ là $(4 - 30t\,;\, 3 - 40t)$.

Do đó, $\overrightarrow{MN} = (1 + 5t\,;\, 7 - 65t)$. Suy ra

$$MN = \sqrt{(1+5t)^2 + (7-65t)^2} = \sqrt{4\,250t^2 - 900t + 50}$$

$$= \sqrt{4\,250\left(t - \frac{9}{85}\right)^2 + \frac{40}{17}} \geq \sqrt{\frac{40}{17}} \approx 1{,}53 \text{ (km)}.$$

$MN$ nhỏ nhất xấp xỉ bằng 1,53 km khi $t = \dfrac{9}{85}$ giờ.

Như vậy, sau $\dfrac{9}{85}$ giờ kể từ thời điểm xuất phát thì hai tàu gần nhau nhất và cách nhau khoảng 1,53 km.

c) *Cách 1:* Vị trí ban đầu của tàu $A$ tại $M_0$ ứng với $t = 0$, khi đó $M_0(3\,;\,-4)$.

Tàu $B$ di chuyển theo đường thẳng $\Delta$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (40\,;\,-30)$ và đi qua điểm $K(4\,;\,3)$. Phương trình tổng quát của $\Delta$ là: $40(x-4) - 30(y-3) = 0$ hay $4x - 3y - 7 = 0$.

Ta có: $d(M_0, \Delta) = \dfrac{\left|4 \cdot 3 - 3 \cdot (-4) - 7\right|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{17}{5} = 3{,}4$ (km).

Kiểm tra thấy khoảng cách này bằng khoảng cách giữa tàu $A$ tại $M_0$ và tàu $B$ tại vị trí sau khi xuất phát $t = \dfrac{31}{250}$ (giờ).

Vậy nếu tàu $A$ đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu $B$ chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng 3,4 km.

*Cách 2:* Vị trí ban đầu của tàu $A$ tại $M_0$ ứng với $t = 0$, khi đó $M_0(3\,;\,-4)$.

Vị trí của tàu $B$ sau khi xuất phát $t$ (giờ) ($t \geq 0$) có toạ độ là $N(4 - 30t\,;\, 3 - 40t)$.

Do đó $\overrightarrow{M_0N} = (1 - 30t\,;\, 7 - 40t)$.

Suy ra $M_0N = \sqrt{(1-30t)^2 + (7-40t)^2} = \sqrt{2\,500t^2 - 620t + 50}$.

Đặt $f(t) = 2\,500t^2 - 620t + 50$. Ta có $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{31}{250}$, khi đó $f\left(\dfrac{31}{250}\right) = \dfrac{289}{25}$.

Do $t = \dfrac{31}{250} > 0$ và $f\left(\dfrac{31}{250}\right) = \dfrac{289}{25} > 0$

nên suy ra $M_0N$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{17}{5} = 3{,}4$ (km) khi $t = \dfrac{31}{250}$ (giờ).

Vậy, nếu tàu $A$ đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu $B$ chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng 3,4 km.

## C. BÀI TẬP

**33.** Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của một đường thẳng song song với đường thẳng $x - 2y + 3 = 0$?

**A.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t. \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t. \end{cases}$

**34.** Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của một đường thẳng vuông góc với đường thẳng $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$?

**A.** $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 - 3t. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 + 3t. \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 1 + 2t. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 1 - 2t. \end{cases}$

**35.** Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M(-1\,;\,2)$ và song song với đường thẳng $d$: $2x - y - 5 = 0$ có phương trình tổng quát là:

**A.** $2x - y = 0$. **B.** $2x - y + 4 = 0$. **C.** $2x + y + 4 = 0$. **D.** $x + 2y - 3 = 0$.

**36.** Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M(3\,;\,-4)$ và vuông góc với đường thẳng $d$: $x - 3y + 1 = 0$ có phương trình tổng quát là:

**A.** $x - 3y - 15 = 0$. **B.** $-3x + y + 5 = 0$.

**C.** $3x + y - 13 = 0$. **D.** $3x + y - 5 = 0$.

**37.** Cho $\Delta_1$: $x - 2y + 3 = 0$ và $\Delta_2$: $-2x - y + 5 = 0$. Số đo góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ là:

**A.** $30^\circ$. **B.** $45^\circ$. **C.** $90^\circ$. **D.** $60^\circ$.

**38.** Cho $\Delta_1$: $\begin{cases} x = -2 + \sqrt{3}t \\ y = 1 - t \end{cases}$ và $\Delta_2$: $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t' \\ y = 2 + t'. \end{cases}$

Số đo góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ là:

**A.** $30°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

**39.** Khoảng cách từ điểm $M(5 ; -2)$ đến đường thẳng $\Delta$: $-3x + 2y + 6 = 0$ là:

**A.** 13. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

**40.** Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau:

a) $d_1$: $2x - 3y + 5 = 0$ và $d_2$: $2x + y - 1 = 0$;

b) $d_3$: $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$ và $d_4$: $x + 3y - 5 = 0$;

c) $d_5$: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ và $d_6$: $\begin{cases} x = -2 + 2t' \\ y = 1 - t'. \end{cases}$

**41**. Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng của mỗi cặp đường thẳng sau:

a) $\Delta_1$: $3x + y - 5 = 0$ và $\Delta_2$: $x + 2y - 3 = 0$;

b) $\Delta_3$: $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$ và $\Delta_4$: $\begin{cases} x = 3 - \sqrt{3}t' \\ y = -t'; \end{cases}$

c) $\Delta_5$: $-\sqrt{3}x + 3y + 2 = 0$ và $\Delta_6$: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - \sqrt{3}t. \end{cases}$

**42**. Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) $A(-3 ; 1)$ và $\Delta_1$: $2x + y - 4 = 0$; b) $B(1 ; -3)$ và $\Delta_2$: $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 1 - t. \end{cases}$

**43.** Cho hai đường thẳng song song $\Delta_1$: $ax + by + c = 0$ và $\Delta_2$: $ax + by + d = 0$. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ bằng $\dfrac{|d - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

**44**. Cho hai đường thẳng $\Delta_1$: $mx - 2y - 1 = 0$ và $\Delta_2$: $x - 2y + 3 = 0$. Với giá trị nào của tham số $m$ thì:

a) $\Delta_1 \parallel \Delta_2$? b) $\Delta_1 \perp \Delta_2$?

**45.** Cho ba điểm $A(-2 ; 2)$, $B(4 ; 2)$, $C(6 ; 4)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $B$ đồng thời cách đều $A$ và $C$.

**46.** Có hai tàu điện ngầm $A$ và $B$ chạy trong nội đô thành phố cùng xuất phát từ hai ga, chuyển động đều theo đường thẳng. Trên màn hình ra đa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng toạ độ $Oxy$ với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), sau khi xuất phát $t$ (giờ) ($t \geq 0$), vị trí của tàu $A$ có toạ độ được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 7 + 36t \\ y = -8 + 8t \end{cases}$, vị trí của tàu $B$ có toạ độ là $(9 + 8t\,;\, 5 - 36t)$.

a) Tính côsin góc giữa hai đường đi của hai tàu $A$ và $B$.

b) Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhau nhất?

# §5 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Phương trình đường tròn

– *Phương trình đường tròn tâm $I(a\,;\,b)$ bán kính $R$* là: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

– Ta có thể viết phương trình đường tròn về dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Một phương trình có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2>c$, lúc này đường tròn đó có tâm $I(a\,;\,b)$ bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

### 2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn $(C)$ tâm $I(a\,;\,b)$ và điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ nằm trên đường tròn đó. Gọi $\Delta$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C)$ tại điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$. Khi đó, ta có:

– Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ và có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{IM_0}=(x_0-a\,;\,y_0-b).$$

– *Phương trình tiếp tuyến* $\Delta$ là: $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$.

## B. VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Xác định tâm và bán kính của đường tròn cho trước

***Ví dụ 1*** Tìm tâm và bán kính của đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn có phương trình $x^2+y^2=2$;

b) Đường tròn có phương trình $(x+9)^2+(y-4)^2=5$;

c) Đường tròn có phương trình $x^2+y^2+4x-6y-36=0$.

*Giải*

a) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ có tâm là $O(0 ; 0)$ và bán kính là $R = \sqrt{2}$.

b) Ta có: $(x+9)^2 + (y-4)^2 = 5 \Leftrightarrow \left[x - (-9)\right]^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{5})^2$.

Suy ra đường tròn có tâm là $I(-9 ; 4)$ và bán kính là $R = \sqrt{5}$.

c) Ta có: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 . (-2)x - 2 . 3y - 36 = 0$ và $(-2)^2 + 3^2 - (-36) = 49 > 0$.

Suy ra đường tròn có tâm là $I(-2 ; 3)$ và bán kính là $R = 7$.

### Vấn đề 2. Lập phương trình đường tròn

***Ví dụ 2*** Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn tâm $I(7 ; -11)$ bán kính $R = 4$;

b) Đường tròn tâm $I(-1 ; 3)$ và đi qua điểm $M(-5 ; 6)$;

c) Đường tròn đường kính $AB$ với $A(3 ; -4)$ và $B(-1 ; -6)$.

*Giải*

a) Phương trình đường tròn là:

$$(x-7)^2 + \left[y - (-11)\right]^2 = 4^2 \Leftrightarrow (x-7)^2 + (y+11)^2 = 16.$$

b) Bán kính của đường tròn là:

$$R = IM = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + (6-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Phương trình đường tròn là:

$$[x-(-1)]^2 + (y-3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

c) Gọi $I(a ; b)$ là tâm của đường tròn. Ta có $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$.

Suy ra $a = \dfrac{3+(-1)}{2} = 1$, $b = \dfrac{(-4)+(-6)}{2} = -5$. Vậy $I(1 ; -5)$.

Bán kính của đường tròn là: $R = IA = \sqrt{(3-1)^2 + [(-4)-(-5)]^2} = \sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là:

$$(x-1)^2 + [y-(-5)]^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+5)^2 = 5.$$

***Ví dụ 3*** Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn tâm $I(-2 ; -2)$ và có một tiếp tuyến là $\Delta : 4x + 3y + 4 = 0$;

b) Đường tròn đi qua 3 điểm $A(1 ; 2)$, $B(5 ; 2)$, $C(1 ; -3)$.

*Giải*

a) Bán kính của đường tròn bằng khoảng cách từ điểm $I$ đến đường thẳng $\Delta$.

Ta có: $R = d(I, \Delta) = \dfrac{|4 . (-2) + 3 . (-2) + 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{10}{5} = 2.$

Phương trình đường tròn là:

$$[x - (-2)]^2 + [y - (-2)]^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

b) Giả sử tâm của đường tròn là điểm $I(a ; b)$. Ta có $IA = IB = IC \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2$.

Vì $IA^2 = IB^2$, $IB^2 = IC^2$ nên

$$\begin{cases} (1 - a)^2 + (2 - b)^2 = (5 - a)^2 + (2 - b)^2 \\ (5 - a)^2 + (2 - b)^2 = (1 - a)^2 + (-3 - b)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 4b + 5 = a^2 + b^2 - 10a - 4b + 29 \\ a^2 + b^2 - 10a - 4b + 29 = a^2 + b^2 - 2a + 6b + 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 24 \\ -8a - 10b = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{-1}{2}. \end{cases}$$

Bán kính đường tròn là:

$$R = IA = \sqrt{(1 - 3)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Phương trình đường tròn là:

$$(x - 3)^2 + \left[y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{41}{4}.$$

### Vấn đề 3. Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn

**Ví dụ 4** Lập phương trình đường thẳng $\Delta$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C)$: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta$ tiếp xúc $(C)$ tại điểm có hoành độ bằng $-2$;

b) $\Delta$ song song với đường thẳng $12x + 5y + 63 = 0$;

c) $\Delta$ đi qua điểm $A(6 ; -1)$.

*Giải*

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(1 ; -2)$ bán kính $R = 5$.

a) Giả sử tiếp điểm là $M_0(-2 ; y_0)$. Vì $M_0$ thuộc đường tròn $(C)$ nên ta có:

$$(-2 - 1)^2 + (y_0 + 2)^2 = 25 \Leftrightarrow y_0^2 + 4y_0 - 12 = 0.$$

Giải phương trình trên ta có: $y_0 = 2$ hoặc $y_0 = -6$.

*Trường hợp 1:* $y_0 = 2$.

Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ là:

$$(-2-1)\left[x-(-2)\right]+\left[2-(-2)\right](y-2)=0 \Leftrightarrow -3x+4y-14=0.$$

*Trường hợp 2:* $y_0 = -6$.

Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ là:

$$(-2-1)[x-(-2)]+[-6-(-2)][y-(-6)]=0 \Leftrightarrow -3x-4y-30=0.$$

b) $\Delta$ song song với đường thẳng có phương trình $12x+5y+63=0$ nên $\Delta$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(12\ ;\ 5)$.

Suy ra phương trình của đường thẳng $\Delta$ có dạng $12x+5y+m=0$ với $m \neq 63$.

Vì $\Delta$ tiếp xúc với $(C)$ nên

$$d(I, \Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|12\ .\ 1+5\ .\ (-2)+m|}{\sqrt{12^2+5^2}}=5 \Leftrightarrow |m+2|=65.$$

Giải phương trình trên ta có $m=-67$ hoặc $m=63$ (loại vì $m \neq 63$).

Vậy phương trình tiếp tuyến $\Delta$ là: $12x+5y-67=0$.

c) Ta xét hai khả năng:

*Khả năng 1:* Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với trục $Ox$. Vì $\Delta$ đi qua điểm $A(6\ ;-1)$ và vuông góc với trục $Ox$ nên có phương trình là: $x=6$ hay $x-6=0$.

Khoảng cách từ tâm $I(1\ ;-2)$ đến đường thẳng $\Delta$ là: $d(I, \Delta)=\dfrac{|1-6|}{\sqrt{1^2+0^2}}=5=R$.

Suy ra đường thẳng $x-6=0$ là một tiếp tuyến của đường tròn.

*Khả năng 2:* Đường thẳng $\Delta$ không vuông góc với trục $Ox$. Khi đó, ta có thể xét dạng phương trình của $\Delta$ là: $y=ax+b$ với $a$, $b$ là tham số. Vì $\Delta$ đi qua điểm $A(6\ ;-1)$ nên $-1=6a+b$ hay $b=-6a-1$.

Như vậy, phương trình $\Delta$ là: $y=ax-6a-1$ hay $ax-y-6a-1=0$.

Vì $\Delta$ tiếp xúc với $(C)$ nên

$$d(I, \Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|a\ .\ 1-(-2)-6a-1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=5 \Leftrightarrow |-5a+1|=5\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow a=-\frac{12}{5}.$$

Suy ra phương trình $\Delta$ là: $-\dfrac{12}{5}x-y+\dfrac{67}{5}=0 \Leftrightarrow 12x+5y-67=0$.

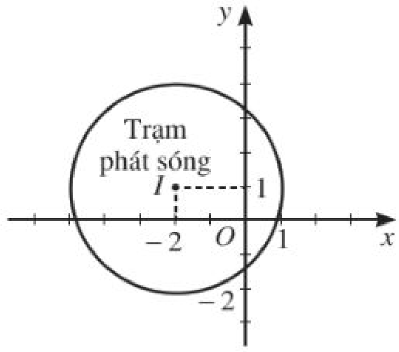
Vậy phương trình tiếp tuyến $\Delta$ có hai khả năng là: $x-6=0$ và $12x+5y-67=0$.

## Vấn đề 4. Ứng dụng

**Ví dụ 5** *Hình 10* mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí $I$ có toạ độ $(-2 ; 1)$ trong mặt phẳng toạ độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét).

a) Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí $A$ có toạ độ $(-1 ; 3)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? Giải thích.



*Hình 10*

c) Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí $B$ có toạ độ $(-3 ; 4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

*Giải*

a) Phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng là:

$$[x-(-2)]^2+(y-1)^2=3^2 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=9.$$

b) Khoảng cách từ tâm $I(-2 ; 1)$ đến điểm $A(-1 ; 3)$ là:

$$IA=\sqrt{[-1-(-2)]^2+(3-1)^2}=\sqrt{5} \text{ (km)}.$$

Vì $IA < 3$ km nên điểm $A$ nằm trong đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, suy ra người dùng điện thoại ở vị trí $A$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm.

c) Khoảng cách từ tâm $I(-2 ; 1)$ đến điểm $B(-3 ; 4)$ là:

$$IB=\sqrt{[-3-(-2)]^2+(4-1)^2}=\sqrt{10} \text{ (km)}.$$

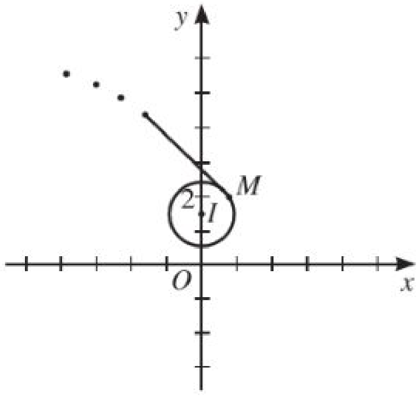
Vì $IB > 3$ km nên điểm $B$ nằm ngoài đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng.

Xét $M$ là điểm bất kì thuộc vùng phủ sóng, khi đó $M$ nằm trong hoặc nằm trên đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng nên $IM \leq 3$ km. Khoảng cách tính theo đường chim bay từ người ở vị trí $B$ đến vùng phủ sóng là $BM$.

Ta có: $BM \geq IB - IM \geq \sqrt{10}-3$ (Vì $IM \leq 3$). Suy ra $BM$ nhỏ nhất bằng $\sqrt{10}-3$ (km) khi và chỉ khi $M$ là giao điểm của đoạn thẳng $IB$ với đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng.

Vậy khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí $B$ di chuyển được tới vùng phủ sóng tính theo đường chim bay là $\sqrt{10}-3 \approx 0,2$ (km).

*Ví dụ 6* Ném đĩa là một môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè. Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa. Giả sử đĩa chuyển động trên một đường tròn tâm $I\left(0\ ;\ \frac{3}{2}\right)$ bán kính 0,8 trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$ (đơn vị trên hai trục là mét). Đến điểm $M\left(\frac{\sqrt{39}}{10}\ ;\ 2\right)$, đĩa được ném đi (*Hình 11*). Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?



*Hình 11*

*Giải*

Sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa nằm trên tiếp tuyến của đường tròn tâm $I$ tại điểm $M$.

Vậy quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa nằm trên đường thẳng có phương trình là:

$$\left(\frac{\sqrt{39}}{10}-0\right)\left(x-\frac{\sqrt{39}}{10}\right)+\left(2-\frac{3}{2}\right)(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{39}}{10}\left(x-\frac{\sqrt{39}}{10}\right)+\frac{1}{2}(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{39}x+5y-13{,}9=0.$$

## C. BÀI TẬP

**47.** Phương trình nào sau đây **không** là phương trình đường tròn?

**A.** $x^2+y^2=4$. **B.** $x^2+y^2+2x-1=0$.

**C.** $2x^2+3y^2+2x+3y=9$. **D.** $x^2+y^2+4y+3=0$.

**48.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x+8)^2+(y-10)^2=36$. Toạ độ tâm $I$ của $(C)$ là:

**A.** $(8\ ;-10)$. **B.** $(-8\ ;10)$. **C.** $(-10\ ;8)$. **D.** $(10\ ;-8)$.

**49.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x-1)^2+(y+2)^2=4$. Bán kính của $(C)$ bằng:

**A.** 4. **B.** 16. **C.** 2. **D.** 1.

**50.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, đường tròn tâm $I(-4 ; 2)$ bán kính $R = 9$ có phương trình là:

**A.** $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 81$. **B.** $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 9$.

**C.** $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$. **D.** $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 81$.

**51.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Tiếp tuyến tại điểm $M(0 ; 8)$ thuộc đường tròn có một vectơ pháp tuyến là:

**A.** $\vec{n} = (-3 ; 4)$. **B.** $\vec{n} = (3 ; 4)$.

**C.** $\vec{n} = (4 ; -3)$. **D.** $\vec{n} = (4 ; 3)$.

**52.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 16$. Hai điểm $M$, $N$ chuyển động trên đường tròn $(C)$. Khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm $M$ và $N$ bằng:

**A.** 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 256.

**53.** Tìm $k$ sao cho phương trình: $x^2 + y^2 - 6x + 2ky + 2k + 12 = 0$ là phương trình đường tròn.

**54**. Viết phương trình đường tròn $(C)$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $(C)$ có tâm $I(-6 ; 2)$ bán kính 7;

b) $(C)$ có tâm $I(3 ; -7)$ và đi qua điểm $A(4 ; 1)$;

c) $(C)$ có tâm $I(1 ; 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $3x + 4y + 19 = 0$;

d) $(C)$ có đường kính $AB$ với $A(-2 ; 3)$ và $B(0 ; 1)$;

e) $(C)$ có tâm $I$ thuộc đường thẳng $\Delta_1$: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$ và $(C)$ tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_2$: $3x + 4y - 1 = 0$, $\Delta_3$: $3x - 4y + 2 = 0$.

**55**. Lập phương trình đường thẳng $\Delta$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C)$: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta$ tiếp xúc $(C)$ tại điểm có tung độ bằng 3;

b) $\Delta$ vuông góc với đường thẳng $5x - 12y + 1 = 0$;

c) $\Delta$ đi qua điểm $D(0 ; 4)$.

**56.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$ và điểm $A(-1 ; 3)$.

a) Xác định vị trí tương đối của điểm $A$ đối với đường tròn $(C)$.

b) Đường thẳng $d$ thay đổi đi qua $A$ cắt đường tròn tại $M$ và $N$. Viết phương trình đường thẳng $d$ sao cho $MN$ ngắn nhất.

**57.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho các đường thẳng:

$$\Delta_1: x + y + 1 = 0, \quad \Delta_2: 3x + 4y + 20 = 0, \quad \Delta_3: 2x - y + 50 = 0$$

và đường tròn $(C)$: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Xác định vị trí tương đối của các đường thẳng đã cho đối với đường tròn $(C)$.

**58.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $M(1 ; 1)$ và đường thẳng $\Delta$: $3x + 4y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn $(C)$, biết $(C)$ có tâm $M$ và đường thẳng $\Delta$ cắt $(C)$ tại hai điểm $N, P$ thoả mãn tam giác $MNP$ đều.

# §6 BA ĐƯỜNG CONIC

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Đường elip

**a) Định nghĩa**

Cho hai điểm $F_1$, $F_2$ cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

*Đường elip* (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm $M$ trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó $a$ là số cho trước lớn hơn $c$.

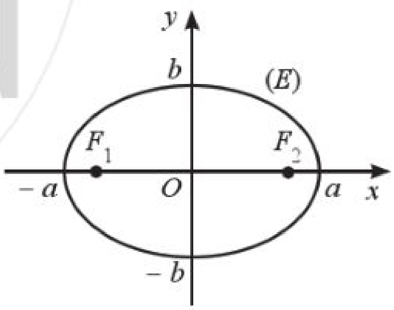
Hai điểm $F_1$ và $F_2$ được gọi là hai tiêu điểm của elip.

**b) Phương trình chính tắc**

Khi chọn hệ trục toạ độ như *Hình 12*, phương trình chính tắc của đường elip $(E)$ là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ trong đó } a > b > 0.$$

$F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$ là hai tiêu điểm, $c^2 = a^2 - b^2$.



*Hình 12*

### 2. Đường hypebol

**a) Định nghĩa**

Cho hai điểm $F_1$, $F_2$ cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

*Đường hypebol* (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm $M$ sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó $a$ là số dương cho trước nhỏ hơn $c$.

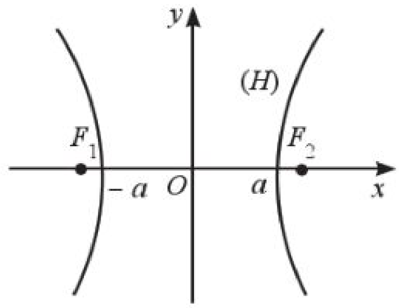
Hai điểm $F_1$ và $F_2$ được gọi là hai tiêu điểm của hypebol.

**b) Phương trình chính tắc**

Khi chọn hệ trục toạ độ như *Hình 13*, phương trình chính tắc của đường hypebol $(H)$ là:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ trong đó } a > 0, b > 0.$$

$F_1(-c\ ;\ 0)$, $F_2(c\ ;\ 0)$ là hai tiêu điểm, $c^2 = a^2 + b^2$.



*Hình 13*

### 3. Đường parabol

**a) Định nghĩa**

Cho một điểm $F$ cố định và một đường thẳng $\Delta$ cố định không đi qua $F$.

*Đường parabol* (còn gọi là parabol) là tập hợp các điểm $M$ trong mặt phẳng cách đều $F$ và $\Delta$.

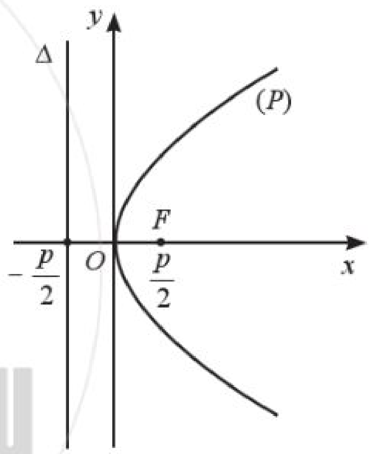
Điểm $F$ được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng $\Delta$ được gọi là đường chuẩn của parabol.

**b) Phương trình chính tắc**

Khi chọn hệ trục toạ độ như *Hình 14*, phương trình chính tắc của đường parabol $(P)$ là:

$$y^2 = 2px\ (p > 0).$$

$F\left(\frac{p}{2}\ ;\ 0\right)$ là tiêu điểm, $x + \frac{p}{2} = 0$ là phương trình đường chuẩn $\Delta$.



*Hình 14*

## B. VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Xác định phương trình chính tắc của ba đường conic

***Ví dụ 1*** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường elip? Đường hypebol? Đường parabol?

a) $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1;$ b) $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1;$ c) $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{7^2} = 1;$ d) $y^2 = 5x.$

*Giải*

Dựa vào dạng phương trình chính tắc của mỗi đường conic, ta có trường hợp b) là phương trình đường elip, trường hợp c) là phương trình đường hypebol, trường hợp d) là phương trình đường parabol.

### Vấn đề 2. Viết phương trình chính tắc của ba đường conic

*Ví dụ 2* Lập phương trình chính tắc của mỗi đường conic trong các trường hợp sau:

a) Elip có một tiêu điểm là $F_2(3\ ;\ 0)$ và đi qua điểm $A(11\ ;\ 0)$;

b) Elip đi qua hai điểm $M(0\ ;\ 3)$ và $N\left(3\ ;-\dfrac{12}{5}\right)$;

c) Hypebol có một tiêu điểm là $F_2(2\ ;\ 0)$ và đi qua điểm $A(1\ ;\ 0)$;

d) Parabol có tiêu điểm là $F(8\ ;\ 0)$.

*Giải*

a) Gọi elip cần lập phương trình chính tắc là $(E)$. Elip $(E)$ có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

Do $F_2(3\ ;\ 0)$ là một tiêu điểm của $(E)$ nên $c=3$.

Điểm $A(11\ ;\ 0)$ nằm trên $(E)$ nên $\dfrac{11^2}{a^2}+\dfrac{0^2}{b^2}=1$.

Do đó $a^2=121$, suy ra $b^2=a^2-c^2=121-9=112$.

Vậy elip $(E)$ có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x^2}{121}+\dfrac{y^2}{112}=1$.

b) Gọi elip cần lập phương trình chính tắc là $(E)$. Elip $(E)$ có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

Điểm $M(0\ ;\ 3)$ nằm trên $(E)$ nên $\dfrac{0^2}{a^2}+\dfrac{3^2}{b^2}=1$. Do đó $b^2=9$.

Điểm $N\left(3\ ;-\dfrac{12}{5}\right)$ nằm trên $(E)$ nên:

$$\frac{3^2}{a^2}+\frac{\left(-\frac{12}{5}\right)^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{144}{225}=1 \Leftrightarrow \frac{9}{a^2}=1-\frac{144}{225}=\frac{81}{225} \Leftrightarrow a^2=\frac{9\ .\ 225}{81}=25.$$

Vậy elip $(E)$ có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

c) Gọi hypebol cần lập phương trình chính tắc là $(H)$. Hypebol $(H)$ có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

Do $F_2(2\ ;\ 0)$ là một tiêu điểm của $(H)$ nên $c = 2$.

Điểm $A(1\ ;\ 0)$ nằm trên $(H)$ nên $\frac{1^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$.

Do đó $a^2 = 1$, suy ra $b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$.

Vậy hypebol $(H)$ có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$.

d) Gọi parabol cần lập phương trình chính tắc là $(P)$. Parabol $(P)$ có phương trình chính tắc là: $y^2 = 2px$.

Do $F(8\ ;\ 0)$ là tiêu điểm của $(P)$ nên $\frac{p}{2} = 8$. Suy ra $p = 16$.

Vậy parabol $(P)$ có phương trình chính tắc là: $y^2 = 32x$.

### Vấn đề 3. Xác định một số yếu tố cơ bản của ba đường conic

***Ví dụ 3*** Cho elip $(E)$ có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

a) Tìm các giao điểm của $(E)$ với hai trục toạ độ.

b) Tìm hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$ của $(E)$.

*Giải*

a) Gọi $A$ là giao điểm của $(E)$ với trục $Ox$, suy ra $A(x\ ;\ 0)$. Vì $A$ thuộc $(E)$ nên

$$\frac{x^2}{100} + \frac{0^2}{64} = 1 \Rightarrow x = 10 \text{ hoặc } x = -10.$$

Vậy $(E)$ giao với trục $Ox$ tại hai điểm có toạ độ $(-10\ ;\ 0)$ và $(10\ ;\ 0)$.

Gọi $B$ là giao điểm của $(E)$ với trục $Oy$, suy ra $B(0\ ;\ y)$. Vì $B$ thuộc $(E)$ nên

$$\frac{0^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \Rightarrow y = 8 \text{ hoặc } y = -8.$$

Vậy $(E)$ giao với trục $Oy$ tại hai điểm có toạ độ $(0\ ;\ -8)$ và $(0\ ;\ 8)$.

b) Ta có: $a^2 = 100$, $b^2 = 64$, suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36$.

Vậy hai tiêu điểm của $(E)$ là $F_1(-6\ ;\ 0)$, $F_2(6\ ;\ 0)$.

***Ví dụ 4*** Cho hypebol $(H)$ có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{33} = 1$. Tìm toạ độ các tiêu điểm của $(H)$.

*Giải*

Ta có: $a^2 = 49$, $b^2 = 33$, suy ra $c^2 = a^2 + b^2 = 49 + 33 = 82$.

Vậy hai tiêu điểm của $(H)$ là $F_1(-\sqrt{82}\ ;\ 0)$, $F_2(\sqrt{82}\ ;\ 0)$.

**Ví dụ 5** Cho parabol ($P$) có phương trình chính tắc: $y^2 = 14x$. Tìm toạ độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của ($P$).

*Giải*

Ta có: $2p = 14$, suy ra $p = 7$.

Vậy tiêu điểm của ($P$) là $F\left(\frac{7}{2} ; 0\right)$ và phương trình đường chuẩn của ($P$) là $x + \frac{7}{2} = 0$.

**Vấn đề 4. Tìm điểm thuộc đường conic thoả mãn điều kiện cho trước**

**Ví dụ 6** Tìm toạ độ điểm $M$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Điểm $M$ thuộc elip ($E$): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ và có hoành độ bằng 2.

b) Điểm $M$ thuộc hypebol ($H$): $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ và có tung độ bằng 3.

c) Điểm $M$ thuộc parabol ($P$): $y^2 = 4x$ và đường thẳng $d$: $x - 2y = 0$.

*Giải*

Gọi toạ độ điểm $M$ là $(m ; n)$.

a) Điểm $M$ có hoành độ bằng 2 nên $m = 2$.

Vì $M$ thuộc ($E$) nên ta có: $\frac{2^2}{9} + \frac{n^2}{5} = 1 \Rightarrow n = \frac{5}{3}$ hoặc $n = -\frac{5}{3}$.

Vậy có hai trường hợp là $M\left(2 ; \frac{5}{3}\right)$ và $M\left(2 ; -\frac{5}{3}\right)$.

b) Điểm $M$ có tung độ bằng 3 nên $n = 3$.

Vì $M$ thuộc ($H$) nên ta có: $m^2 - \frac{3^2}{9} = 1 \Rightarrow m = \sqrt{2}$ hoặc $m = -\sqrt{2}$.

Vậy có hai trường hợp là $M(\sqrt{2} ; 3)$ và $M(-\sqrt{2} ; 3)$.

c) Điểm $M$ thuộc đường thẳng $d$ nên $m - 2n = 0$ hay $m = 2n$.

Vì $M$ thuộc ($P$) nên $n^2 = 4m \Rightarrow n^2 = 8n \Rightarrow n = 0$ hoặc $n = 8$.

Vậy có hai trường hợp là $M(0 ; 0)$ và $M(16 ; 8)$.

**Vấn đề 5. Ứng dụng**

**Ví dụ 7** *Hình 15* mô phỏng mặt cắt ngang của một chiếc đèn có dạng parabol trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$ ($x$ và $y$ tính bằng xăng-ti-mét). Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB = 40$ cm và chiều sâu $h = 30$ cm ($h$ bằng khoảng cách từ $O$ đến $AB$). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm $S$. Viết phương trình chính tắc của parabol đó.

*Giải*

Parabol có phương trình chính tắc là:

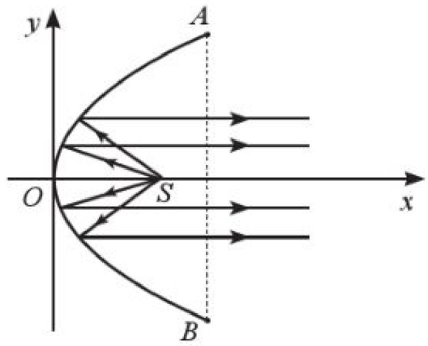
$$y^2 = 2px \ (p > 0).$$

Vì $AB = 40$ cm và $h = 30$ cm nên $A(30\ ;\ 20)$.

Do $A(30\ ;\ 20)$ thuộc parabol nên ta có:

$$20^2 = 2p\ .\ 30 \Rightarrow p = \frac{20}{3}.$$

Vậy parabol có phương trình chính tắc là: $y^2 = \dfrac{40}{3}x$.



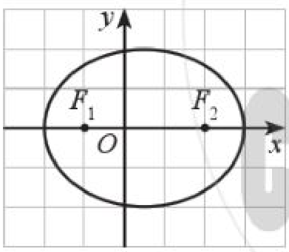
*Hình 15*

## C. BÀI TẬP

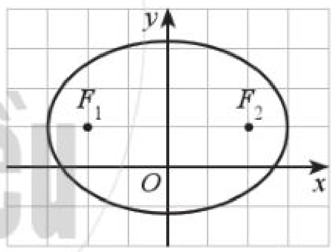
**59.** Elip trong hệ trục toạ độ $Oxy$ nào dưới đây có phương trình chính tắc dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)?$$

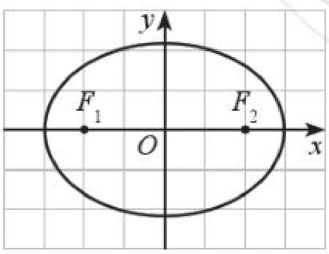
**A.**



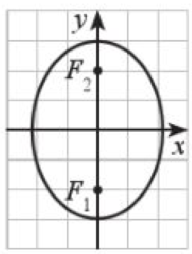

**B.**




**C.**




**D.**




**60.** Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của elip?

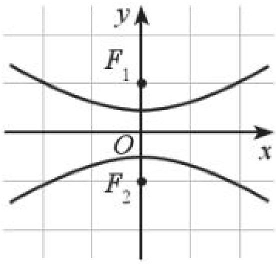
**A.** $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1.$ **B.** $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1.$

**C.** $\dfrac{x^2}{6} + y^2 = 1.$ **D.** $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1.$

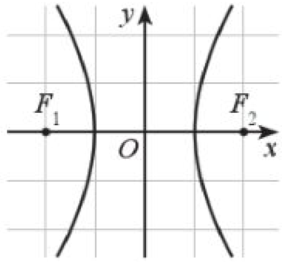
**61.** Hypebol trong hệ trục toạ độ $Oxy$ nào dưới đây có phương trình chính tắc dạng

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)?$$

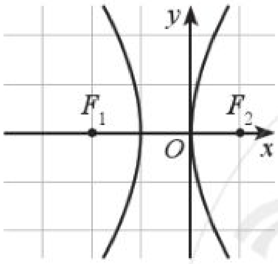
**A.**



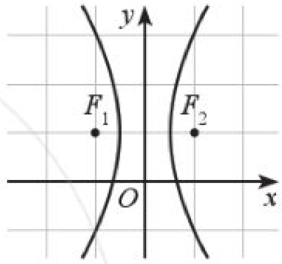

**B.**




**C.**




**D.**




**62.** Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của hypebol?

**A.** $x^2+\frac{y^2}{3^2}=1$.

**B.** $\frac{x^2}{16}-y^2=-1$.

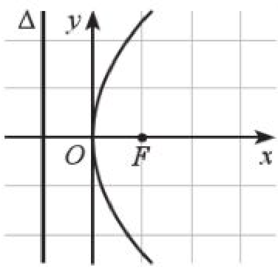
**C.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=-1$.

**D.** $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

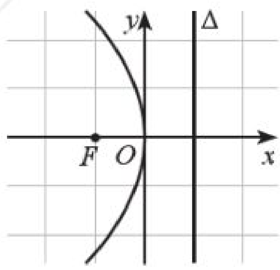
**63.** Parabol trong hệ trục toạ độ $Oxy$ nào dưới đây có phương trình chính tắc dạng

$$y^2=2px\ (p>0)?$$

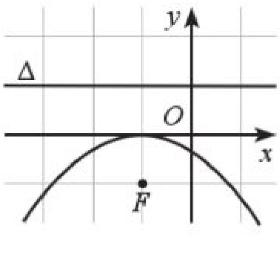
**A.**



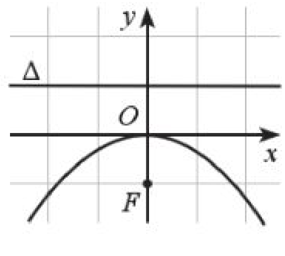

**B.**




**C.**




**D.**



**64.** Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của parabol?

**A.** $y^2 = -0,3x$. **B.** $x^2 = 0,3y$. **C.** $y^2 = 0,3x$. **D.** $x^2 = -0,3y$.

**65.** Lập phương trình chính tắc của elip $(E)$ biết $(E)$ đi qua hai điểm

$$P\left(2\ ;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ và } Q\left(2\sqrt{2}\ ;\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

**66.** Cho elip $(E)$: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Tìm điểm $P$ thuộc $(E)$ thoả mãn $OP = 2,5$.

**67.** Lập phương trình chính tắc của hypebol $(H)$, biết $(H)$ đi qua hai điểm $M(-1\ ;\ 0)$ và $N(2\ ;\ 2\sqrt{3})$.

**68.** Cho hypebol $(H)$ có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0$, $b > 0$ và đường thẳng $y = n$ cắt $(H)$ tại hai điểm $P$, $Q$ phân biệt. Chứng minh hai điểm $P$ và $Q$ đối xứng nhau qua trục $Oy$.

**69.** Viết phương trình chính tắc của parabol $(P)$, biết:

a) Phương trình đường chuẩn của $(P)$ là $x + \frac{1}{8} = 0$;

b) $(P)$ đi qua điểm $M(1\ ;\ -8)$.

**70.** Cho parabol $(P)$ có phương trình chính tắc: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và đường thẳng $x = m$ $(m > 0)$ cắt $(P)$ tại hai điểm $I$, $K$ phân biệt. Chứng minh hai điểm $I$ và $K$ đối xứng nhau qua trục $Ox$.

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

**71.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $A(-2\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ -3)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

**A.** $(1\ ;\ -4)$. **B.** $(-3\ ;\ 4)$.

**C.** $(3\ ;\ -4)$. **D.** $(1\ ;\ -2)$.

**72.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(-1\ ;\ -5)$, $B(5\ ;\ 2)$ và trọng tâm là gốc toạ độ. Toạ độ điểm $C$ là:

**A.** $(4\ ;\ -3)$. **B.** $(-4\ ;\ -3)$.

**C.** $(-4\ ;\ 3)$. **D.** $(4\ ;\ 3)$.

**73.** Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, vectơ nào sau đây có độ dài bằng 1?

**A.** $\vec{a} = (1\,;\,1)$.

**B.** $\vec{b} = \left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$.

**C.** $\vec{c} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

**D.** $\vec{d} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**74.** Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M(-2\,;\,0)$ và song song với đường thẳng $d$: $2x - y + 2 = 0$ có phương trình là:

**A.** $2x - y = 0$.

**B.** $2x - y + 4 = 0$.

**C.** $2x + y + 4 = 0$.

**D.** $x + 2y + 2 = 0$.

**75.** Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x = 3 - \sqrt{3}t' \\ y = -t'. \end{cases}$$

Số đo góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ là:

**A.** $30°$.

**B.** $45°$.

**C.** $90°$.

**D.** $60°$.

**76.** Khoảng cách từ điểm $M(4\,;\,-2)$ đến đường thẳng $\Delta : x - 2y + 2 = 0$ bằng:

**A.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**B.** $2\sqrt{5}$.

**C.** $2$.

**D.** $\sqrt{5}$.

**77.** Phương trình nào dưới đây là phương trình đường tròn?

**A.** $(x + 3)^2 - (y + 4)^2 = 100$.

**B.** $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 100$.

**C.** $2(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 100$.

**D.** $(x + 3)^2 + 2(y + 4)^2 = 100$.

**78**. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường hypebol?

**A.** $\dfrac{x^2}{15^2} + \dfrac{y^2}{15^2} = 1$.

**B.** $\dfrac{x^2}{15^2} + \dfrac{y^2}{16^2} = -1$.

**C.** $\dfrac{x^2}{16^2} + \dfrac{y^2}{15^2} = 1$.

**D.** $\dfrac{x^2}{15^2} - \dfrac{y^2}{16^2} = 1$.

**79**. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường parabol?

**A.** $y^2 = \dfrac{x}{10}$.

**B.** $y^2 = \dfrac{-x}{10}$.

**C.** $x^2 = \dfrac{y}{10}$.

**D.** $x^2 = \dfrac{-y}{10}$.

**80.** Đường elip $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$ có hai tiêu điểm là:

**A.** $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$.

**B.** $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$.

**C.** $F_1(0;-2)$, $F_2(0;2)$.

**D.** $F_1(0;-4)$, $F_2(0;4)$,

**81.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(-3;-1)$, $B(3;5)$, $C(3;-4)$. Gọi $G$, $H$, $I$ lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

a) Lập phương trình các đường thẳng $AB$, $BC$, $AC$.

b) Tìm toạ độ các điểm $G$, $H$, $I$.

c) Tính diện tích tam giác $ABC$.

**82.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho hai điểm $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$.

a) Lập phương trình đường tròn có đường kính là $F_1F_2$.

b) Tập hợp các điểm $M$ trong mặt phẳng toạ độ thoả mãn $MF_1+MF_2=12$ là một đường conic $(E)$. Cho biết $(E)$ là đường conic nào và viết phương trình chính tắc của $(E)$.

c) Tập hợp các điểm $M$ trong mặt phẳng toạ độ thoả mãn $|MF_1-MF_2|=4$ là một đường conic $(H)$. Cho biết $(H)$ là đường conic nào và viết phương trình chính tắc của $(H)$.

**83*.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(-1;-2)$, đường trung tuyến kẻ từ $B$ và đường cao kẻ từ $C$ lần lượt có phương trình là $5x+y-9=0$ và $x+3y-5=0$. Tìm toạ độ của hai điểm $B$ và C.

**84*.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(0;3)$. Tìm tập hợp các điểm $M$ thoả mãn $MA=2MB$.

# LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

## §1 TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

**1.** A. **2.** D. **3.** B. **4.** C. **5.** B. **6.** D.

**7.** $\vec{a} = (2\ ;-3)$, $\vec{b} = (-3\ ;0)$, $\vec{c} = (5\ ;1)$, $\vec{d} = (0\ ;4)$.

**8.** a) $a = -1, b = -1$. b) $a = \dfrac{7}{3}, b = 2$. c) $a = \dfrac{3}{5}, b = \dfrac{-9}{5}$.

**9.** Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Suy ra $D(2\ ;-4)$.

**10.** Ta có: $\overrightarrow{DC} = (x_C - x_D\ ;\ y_C - y_D)$, $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - x_D = x_B - x_A \\ y_C - y_D = y_B - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D. \end{cases}$$

**11.** Gọi $A(a\ ;b)$ là trung điểm $PQ$. Ta có: $\overrightarrow{MN} = (2\ ;3)$. Vì $MN\ //\ PQ$ và $PQ = 2MN$ nên

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -1 - a \\ 3 = 2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1. \end{cases}$$

Suy ra $A(-3\ ;-1)$.

Lại có $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QA} \Rightarrow Q(-5\ ;-4)$.

## §2 BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

**12.** A. **13.** B. **14.** D. **15.** D. **16.** A. **17.** C. **18.** C. **19.** B.

**20.** a) $\overrightarrow{AB} = (-2\ ;-6)$, $\overrightarrow{AC} = (1\ ;-10)$. Do $\dfrac{-2}{1} \neq \dfrac{-6}{-10}$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vậy ba điểm $A, B, C$ không thẳng hàng.

b) $G\left(\dfrac{2}{3}\ ;-\dfrac{1}{3}\right)$. c) $D(5\ ;4)$.

**21.** $AB = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$, $AC = \sqrt{10^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{34}$,

$BC = \sqrt{13^2 + (-1)^2} = \sqrt{170}$.

$\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{ABC} \approx 63^\circ$, $\widehat{ACB} \approx 27^\circ$.

**22.** Vì $M$ nằm trên trục $Ox$ nên có toạ độ $(m\ ;\ 0)$ ($m$ là số thực). Khi đó, $\overrightarrow{MA} = (4 - m\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{MB} = (10 - m\ ;\ 4)$ suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (14 - 2m\ ;\ 2)$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(14 - 2m)^2 + 2^2} \geq 2$ (Vì $(14 - 2m)^2 \geq 0$). Dấu bằng xảy ra khi $m = 7$. Vậy $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $M$ có toạ độ là $(7\ ;\ 0)$.

**23.** Giả sử $M(x\ ;\ y)$ là vị trí của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x - 600\ ;\ y - 200)$, $\overrightarrow{AB} = (-400\ ;\ 300)$.

Vì máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều nên $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Do đó

$$\begin{cases} x - 600 = -\dfrac{400}{3} \\ y - 200 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1\,400}{3} \\ y = 300. \end{cases}$$

Vậy vị trí của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ là

$$M\left(\frac{1\,400}{3}\ ;\ 300\right).$$

## §3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

**24.** A. **25.** C. **26.** B. **27.** B. **28.** D.

**29.** a) Do $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $BC, CA, AB$ nên $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$, $MP \parallel AC$. Ta có: $\overrightarrow{MN} = (4\ ;\ 3)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng $AB$, mà $P(5\ ;\ 6)$ thuộc $AB$. Suy ra phương trình tham số của $AB$ là: $\begin{cases} x = 5 + 4t_1 \\ y = 6 + 3t_1. \end{cases}$

Tương tự, phương trình tham số của $BC$ và $CA$ lần lượt là:

$$\begin{cases} x = -1 + t_2 \\ y = 1 + t_2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 3 - 6t_3 \\ y = 4 - 5t_3. \end{cases}$$

b) Gọi $d$ là đường trung trực của $AB$. Ta có: $\overrightarrow{MN} = (4\ ;\ 3)$ là vectơ pháp tuyến của $d$ và $P(5\ ;\ 6)$ thuộc $d$. Suy ra phương trình của $d$ là $4(x - 5) + 3(y - 6) = 0$. Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của $d$ là $4x + 3y - 38 = 0$.

Tương tự, phương trình tổng quát của đường trung trực cạnh $BC$ và $CA$ lần lượt là:

$$x + y = 0 \text{ và } -6x - 5y + 38 = 0.$$

**30.** Đường cao kẻ từ $A(3\ ;\ 7)$ nhận $\overrightarrow{BC} = (8\ ;\ -1)$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $8(x - 3) - (y - 7) = 0$. Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ $A$ là $8x - y - 17 = 0$.

Tương tự, phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ $B$ và $C$ lần lượt là:

$$-3x + 6y - 18 = 0 \text{ và } x + y - 7 = 0.$$

**31.** a) $M$ nằm trên $\Delta$ nên ta lấy toạ độ của $M$ là $(4 + m\ ;\ -1 + 2m)$ ($m$ là số thực).

Ta có:

$$AM = \sqrt{17} \Leftrightarrow (m+2)^2 + (2m-2)^2 = 17 \Leftrightarrow 5m^2 - 4m - 9 = 0.$$

Giải phương trình trên ta có: $m = \dfrac{9}{5}$ hoặc $m = -1$.

Vậy có 2 trường hợp là $M\left(\dfrac{29}{5}\ ;\ \dfrac{13}{5}\right)$ và $M(3\ ;\ -3)$.

b) $N$ nằm trên $\Delta$ nên ta lấy toạ độ của $N$ là $(4 + n\ ;\ -1 + 2n)$ ($n$ là số thực).

Ta có: $\overrightarrow{AN} = (n + 2\ ;\ 2n - 2)$ và $\vec{u} = (1\ ;\ 2)$ là vectơ chỉ phương của $\Delta$. Đoạn thẳng $AN$ ngắn nhất khi và chỉ khi $N$ là hình chiếu của $A$ lên $\Delta$. Suy ra $AN$ vuông góc với $\Delta$ hay

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow 1(n+2) + 2(2n-2) = 0 \Leftrightarrow n = \frac{2}{5}.$$

Vậy $N\left(\dfrac{22}{5}\ ;\ -\dfrac{1}{5}\right)$.

**32.** a) *Cách 1:* $M$ thuộc đường thẳng $\Delta$ nên $M(m\ ;\ 4 - 2m)$ ($m$ là số thực). Ta có:

$MA = \sqrt{(-2-m)^2 + (-2+2m)^2}$, $MB = \sqrt{(7-m)^2 + (1+2m)^2}$.

$MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{(-2-m)^2 + (-2+2m)^2} = \sqrt{(7-m)^2 + (1+2m)^2} \Leftrightarrow m = 7.$

Vậy $M(7\ ;\ -10)$.

*Cách 2:* Điểm $M$ là giao điểm của đường trung trực đoạn thẳng $AB$ và đường thẳng $\Delta$.

b*) $N$ thuộc đường thẳng $\Delta$ nên $N(n\ ;\ 4 - 2n)$ ($n$ là số thực).

Ta có: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = (9 - 3n\ ;\ -10 + 6n)$.

$$\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right| = \sqrt{(9-3n)^2 + (-10+6n)^2} = \sqrt{45n^2 - 174n + 181}$$

$$= \sqrt{45\left(n - \frac{29}{15}\right)^2 + \frac{64}{5}} \geq \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ khi $N\left(\dfrac{29}{15}\ ;\ \dfrac{2}{15}\right)$.

## §4 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

**33. B**. **34. A**. **35. B**. **36. D**. **37. C**. **38. D**. **39. B**.

**40.** a) $d_1$ cắt $d_2$. b) $d_3$ song song với $d_4$. c) $d_5$ trùng với $d_6$.

**41.** a) $(\Delta_1, \Delta_2) = 45°$. b) $(\Delta_3, \Delta_4) = 30°$. c) $(\Delta_5, \Delta_6) = 60°$.

**42.** a) $d(A, \Delta_1) = \dfrac{|2 \,.\, (-3) + 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$.

b) Phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta_2$ là: $x + 3y = 0$.

Vậy $d(B, \Delta_2) = \dfrac{|1 + 3 \,.\, (-3)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

**43.** Lấy $M(x_0\,;\, y_0) \in \Delta_1$, suy ra $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Khi đó, ta có: $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M, \Delta_2) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$= \frac{|(ax_0 + by_0 + c) + (d - c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|d - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**44.** Ta có $\vec{u}_1 = (2\,;\, m)$ và $\vec{u}_2 = (2\,;\, 1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của $\Delta_1$ và $\Delta_2$.

a) $\Delta_1 \,//\, \Delta_2$ nếu $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương, tức là $\dfrac{2}{2} = \dfrac{m}{1} \Leftrightarrow m = 1$.

b) $\Delta_1 \perp \Delta_2$ nếu $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$, tức là $\vec{u}_1 \,.\, \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow 2 \,.\, 2 + m \,.\, 1 = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

**45.** *Trường hợp 1: A, C* ở cùng phía so với $\Delta$. Khi đó, $\Delta \,//\, AC$, phương trình đường thẳng $\Delta$ là: $x - 4y + 4 = 0$.

*Trường hợp 2: A, C* ở khác phía so với $\Delta$. Khi đó, $\Delta$ đi qua trung điểm của $AC$, phương trình đường thẳng $\Delta$ là: $x + 2y - 8 = 0$.

**46.** a) Tàu $A$ di chuyển theo hướng cùng hướng với vectơ $\vec{u}_1 = (36\,;\, 8)$; tàu $B$ di chuyển theo hướng cùng hướng với vectơ $\vec{u}_2 = (8\,;\, -36)$. Gọi $\varphi$ là góc giữa hai đường đi của hai tàu.

Ta có: $\cos\varphi = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \dfrac{|\vec{u}_1 \,.\, \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \,.\, |\vec{u}_2|} = \dfrac{|36 \,.\, 8 + 8 \,.\, (-36)|}{\sqrt{36^2 + 8^2} \,.\, \sqrt{8^2 + (-36)^2}} = 0$.

b) Vị trí của tàu $A$ sau khi xuất phát $t$ (giờ) là điểm $M$ có toạ độ là $(7 + 36t ; -8 + 8t)$.

Vị trí của tàu $B$ sau khi xuất phát $t$ (giờ) là điểm $N$ có toạ độ là $(9 + 8t ; 5 - 36t)$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = (2 - 28t ; 13 - 44t)$. Suy ra

$$MN = \sqrt{(2-28t)^2 + (13-44t)^2} = \sqrt{2\,720\left(t - \frac{157}{680}\right)^2 + \frac{4\,761}{170}} \geq \sqrt{\frac{4\,761}{170}}$$

$\approx 5{,}29$ (km).

$MN$ nhỏ nhất bằng xấp xỉ 5,29 khi $t = \frac{157}{680}$ (giờ).

Như vậy, sau $\frac{157}{680}$ giờ di chuyển thì hai tàu gần nhau nhất và cách nhau khoảng 5,29 km.

## §5 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

**47.** C. **48.** B. **49.** C. **50.** D. **51.** A. **52.** B.

**53.** Ta có:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2ky + 2k + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\,.\,3x - 2(-k)y + 2k + 12 = 0.$$

Phương trình trên là phương trình đường tròn khi và chỉ khi

$$3^2 + (-k)^2 - (2k + 12) > 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 3 > 0.$$

Giải bất phương trình trên ta có: $k < -1$ hoặc $k > 3$.

**54.** a) $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 49$. b) $(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 65$.

c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$. d) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

e) Vì $I$ thuộc $\Delta_1$ nên $I(1 + t ; 1 - t)$ ($t$ là số thực). Ta có:

$$d(I, \Delta_2) = d(I, \Delta_3) \Leftrightarrow \frac{|3(1+t) + 4(1-t) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3(1+t) - 4(1-t) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$\Leftrightarrow |-t + 6| = |7t + 1| \Leftrightarrow t = \frac{5}{8} \text{ hoặc } t = \frac{-7}{6}.$$

Với $t = \frac{5}{8}$, phương trình đường tròn là: $\left(x - \frac{13}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{8}\right)^2 = \left(\frac{43}{40}\right)^2$.

Với $t = \frac{-7}{6}$, phương trình đường tròn là: $\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{6}\right)^2 = \left(\frac{43}{30}\right)^2$.

**55.** Đường tròn tâm $I(-2\ ;\ 3)$ bán kính $R = 2$.

a) Giả sử tiếp điểm là $M(m\ ;\ 3)$. Vì $M$ thuộc đường tròn nên ta có:

$$(m+2)^2 + (3-3)^2 = 4 \Rightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = -4.$$

Với $m = 0$ thì phương trình tiếp tuyến $\Delta$ là: $x = 0$.

Với $m = -4$ thì phương trình tiếp tuyến $\Delta$ là: $x + 4 = 0$.

b) $\Delta$ vuông góc với đường thẳng $5x - 12y + 1 = 0$ nên $\vec{n} = (12\ ;\ 5)$ là vectơ pháp tuyến của $\Delta$. Khi đó, phương trình $\Delta$ có dạng: $12x + 5y + c = 0$. Ta có:

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|12 \,.\, (-2) + 5 \,.\, 3 + c|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 2 \Rightarrow c = 35 \text{ hoặc } c = -17.$$

Với $c = 35$ thì phương trình tiếp tuyến $\Delta$ là: $12x + 5y + 35 = 0$.

Với $c = -17$ thì phương trình tiếp tuyến $\Delta$ là: $12x + 5y - 17 = 0$.

c) Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ có hai khả năng là: $x = 0$ và $3x + 4y - 16 = 0$.

**56.** a) $(C)$ có tâm $I(-2\ ;\ 4)$ bán kính $R = 5$.

Vì $IA = \sqrt{[-1-(-2)]^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2} < 5$ nên $A$ nằm trong đường tròn $(C)$.

b) Ta có dây cung $MN$ ngắn nhất khi khoảng cách giữa $I$ đến $MN$ lớn nhất. Vì $d$ đi qua $A$ cố định nên khoảng cách từ $I$ đến $d$ lớn nhất bằng $IA$, hay $IA$ vuông góc với $d$. Suy ra phương trình đường thẳng $d$ là: $x - y + 4 = 0$.

**57.** $(C)$ có tâm $I(-3\ ;\ 1)$ bán kính $R = 3$.

Ta có: $d(I, \Delta_1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 3$, $d(I, \Delta_2) = 3$, $d(I, \Delta_3) = \dfrac{43\sqrt{5}}{5} > 3$ nên các đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ lần lượt cắt $(C)$, tiếp xúc $(C)$, không có điểm chung với $(C)$.

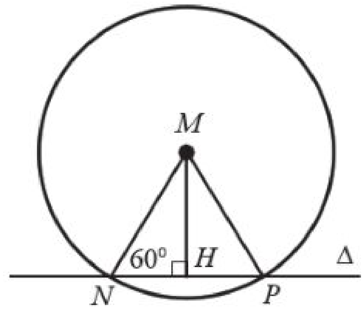
**58.** Gọi $H$ là hình chiếu của $M$ trên $\Delta$ (*Hình 16*).

Ta có: $MH = d(M, \Delta) = \dfrac{|3 \,.\, 1 + 4 \,.\, 1 + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$.

Xét tam giác $MHN$ có $MN = \dfrac{MH}{\sin 60^\circ} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Vậy phương trình đường tròn $(C)$ là:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{16}{3}.$$



*Hình 16*

## §6 BA ĐƯỜNG CONIC

**59.** C. **60.** C. **61.** B. **62.** D. **63.** A. **64.** C.

**65.** $(E)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$.

Vì $P$ thuộc $(E)$ nên ta có:

$$\frac{2^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow 4\,.\,\frac{1}{a^2}+\frac{27}{4}\,.\,\frac{1}{b^2}=1 \qquad (1)$$

Vì $Q$ thuộc $(E)$ nên ta có:

$$\frac{(2\sqrt{2})^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow 8\,.\,\frac{1}{a^2}+\frac{9}{2}\,.\,\frac{1}{b^2}=1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{16}, \frac{1}{b^2}=\frac{1}{9} \Rightarrow a^2=16$ và $b^2=9$.

Vậy phương trình chính tắc của elip $(E)$ là: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

**66.** Giả sử $P(p\,;q)$. Ta có: $OP=2{,}5$ nên $p^2+q^2=\frac{25}{4}$ (1)

Vì $P$ thuộc $(E)$ nên ta có: $\frac{1}{9}p^2+\frac{1}{4}q^2=1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $p^2=\frac{81}{20}, q^2=\frac{11}{5}$. Suy ra có 4 trường hợp của điểm $P$ có toạ độ là:

$$\left(\frac{9\sqrt{5}}{10}\,;\frac{\sqrt{55}}{5}\right),\left(-\frac{9\sqrt{5}}{10}\,;\frac{\sqrt{55}}{5}\right),\left(\frac{9\sqrt{5}}{10}\,;-\frac{\sqrt{55}}{5}\right),\left(-\frac{9\sqrt{5}}{10}\,;-\frac{\sqrt{55}}{5}\right).$$

**67.** $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$.

Vì $M$ thuộc $(H)$ nên ta có: $\frac{(-1)^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1 \Rightarrow a^2=1$.

Vì $N$ thuộc $(H)$ nên ta có: $\frac{2^2}{1}-\frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=4$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol $(H)$ là: $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$.

**68.** Thay $y = n$ vào phương trình chính tắc của hypebol ta có: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{n^2}{b^2} = 1$.

Suy ra $x^2 = a^2\left(1+\dfrac{n^2}{b^2}\right) \Rightarrow x = a\sqrt{\left(1+\dfrac{n^2}{b^2}\right)}$ hoặc $x = -a\sqrt{\left(1+\dfrac{n^2}{b^2}\right)}$.

Không mất tính tổng quát, ta lấy $P\left(a\sqrt{\left(1+\dfrac{n^2}{b^2}\right)}\,;\,n\right)$, $Q\left(-a\sqrt{\left(1+\dfrac{n^2}{b^2}\right)}\,;\,n\right)$.

Vì $P$, $Q$ có cùng tung độ và hoành độ đối nhau nên $P$, $Q$ đối xứng qua trục $Oy$.

**69.** a) Gọi phương trình chính tắc của parabol $(P)$ là $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

Vì phương trình đường chuẩn của $(P)$ là:

$$x + \frac{1}{8} = 0 \text{ nên } \frac{p}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow p = \frac{1}{4}.$$

Vậy phương trình chính tắc của parabol $(P)$ là: $y^2 = \dfrac{1}{2}x$.

b) Gọi phương trình chính tắc của parabol $(P)$ là $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

Vì $(P)$ đi qua điểm $M(1\,;-8)$ nên $(-8)^2 = 2p\,.\,1 \Rightarrow p = 32$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol $(P)$ là: $y^2 = 64x$.

**70.** Thay $x = m$ vào phương trình chính tắc của parabol ta có: $y^2 = 2pm$.

Suy ra $y = \sqrt{2pm}$ hoặc $y = -\sqrt{2pm}$.

Không mất tính tổng quát, ta lấy $I(m\,;\sqrt{2pm})$, $K(m\,;-\sqrt{2pm})$.

Vì $I$, $K$ có cùng hoành độ và tung độ đối nhau nên $I$, $K$ đối xứng qua trục $Ox$.

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

**71. C**. **72. C**. **73. D**. **74. B**. **75. A**. **76. B**. **77. B**. **78. D**. **79. A**. **80. A**.

**81.** a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (6\,;6)$ nên có thể chọn $\vec{n}_1 = (1\,;-1)$ là vectơ pháp tuyến của $AB$. Mà $A$ thuộc $AB$ nên phương trình đường thẳng $AB$ là:

$$1(x+3) - 1(y+1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0\,;-9)$ nên có thể chọn $\vec{n}_2 = (1\,;0)$ là vectơ pháp tuyến của $BC$. Mà $B$ thuộc $BC$ nên phương trình đường thẳng $BC$ là:

$$1(x-3) + 0(y-5) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0.$$

Ta có: $\overrightarrow{CA} = (-6; 3)$ nên có thể chọn $\vec{n}_3 = (1 ; 2)$ là vectơ pháp tuyến của $CA$. Mà $C$ thuộc $CA$ nên phương trình đường thẳng $CA$ là:

$$1(x-3) + 2(y+4) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5 = 0.$$

b) $G(1 ; 0)$.

Phương trình đường cao $AH$ là: $y + 1 = 0$.

Phương trình đường cao $CH$ là: $x + y + 1 = 0$.

$H$ là giao điểm của $AH$ và $CH$ nên toạ độ của $H$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y+1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1. \end{cases} \text{ Vậy } H(0 ; -1).$$

$I(a ; b)$ là tâm đường tròn đi qua ba điểm $A$, $B$, $C$ nên $IA^2 = IB^2 = IC^2$.

Ta có:

$$\begin{cases} (-3-a)^2 + (-1-b)^2 = (3-a)^2 + (5-b)^2 \\ (-3-a)^2 + (-1-b)^2 = (3-a)^2 + (-4-b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-2=0 \\ 4a-2b-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy $I\left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.

c) Diện tích tam giác $ABC$ là:

$$S = \frac{1}{2}d(A, BC) \,.\, BC = \frac{1}{2} \,.\, 6 \,.\, 9 = 27.$$

**82.** a) $x^2 + y^2 = 16$.

b) Theo định nghĩa, đường conic $(E)$ là elip nhận hai tiêu điểm $F_1(-4 ; 0)$ và $F_2(4 ; 0)$. Khi đó, $c = 4$.

Ta có: $MF_1 + MF_2 = 2a = 12 \Rightarrow a = 6$. Suy ra $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$.

Vậy phương trình chính tắc của elip $(E)$ là:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

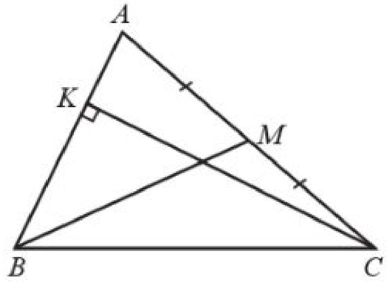
b) Theo định nghĩa, đường conic $(H)$ là hypebol nhận hai tiêu điểm $F_1(-4 ; 0)$ và $F_2(4 ; 0)$. Khi đó, $c = 4$.

Ta có: $|MF_1 - MF_2| = 2a = 4 \Rightarrow a = 2$. Suy ra $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol $(H)$ là:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

**83*.** Gọi $M$ là trung điểm của $AC$, $K$ là hình chiếu của $C$ lên $AB$ (*Hình 17*).



*Hình 17*

Vì $CK$ vuông góc với $AB$ nên vectơ chỉ phương $\vec{n} = (-3 ; 1)$ của $CK$ là vectơ pháp tuyến của $AB$. Suy ra phương trình đường thẳng $AB$ là:

$$-3x + y - 1 = 0.$$

$B$ là giao điểm của $AB$ và $BM$ nên toạ độ của $B$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} -3x + y - 1 = 0 \\ 5x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4. \end{cases} \text{ Vậy } B(1 ; 4).$$

$C$ thuộc $CK$ nên ta có $C(5 - 3c ; c)$ ($c$ là số thực).

Vì $M$ là trung điểm $AC$ nên ta có $M\left(\dfrac{4 - 3c}{2} ; \dfrac{c - 2}{2}\right)$.

Lại có $M$ thuộc $BM$ nên ta có:

$$5 . \frac{4 - 3c}{2} + \frac{c - 2}{2} - 9 = 0 \Rightarrow c = 0. \text{ Vậy } C(5 ; 0).$$

**84*.** Giả sử $M(x ; y)$. Ta có:

$$MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4[x^2 + (y-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2x - 24y + 35 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - 8y + \frac{35}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{40}{9}.$$

Phương trình trên là phương trình đường tròn. Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $I\left(-\dfrac{1}{3} ; 4\right)$ bán kính $R = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

# MỤC LỤC

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

Địa chỉ: Tầng 6, toà nhà số 128 đường Xuân Thủy, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội

Điện thoại: 024.37547735

Email: nxb@hnue.edu.vn | Website: www.nxbdhsp.edu.vn

***Chịu trách nhiệm xuất bản:***

Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

**Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:**

**CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM**

Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

*Biên tập:*

ĐÀO ANH TIẾN

*Thiết kế sách:*

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN

*Trình bày bìa:*

PHAN THỊ LƯƠNG

Sửa bản in:

LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY – PHẠM THỊ DIỆU THUÝ

Trong sách có sử dụng tư liệu, hình ảnh của một số tác giả. Trân trọng cảm ơn.

# Bài tập TOÁN 10 – TẬP HAI

Mã số:.....................

Mã ISBN:.......................

In ........... cuốn, khổ 17 x 24 cm, tại .......................................

Địa chỉ: ............................................................

Số xác nhận đăng kí xuất bản: ......................................................

Quyết định xuất bản số: ...........................................

In xong và nộp lưu chiểu năm 2022.