ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

BÀI TẬP
Toán 10
TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

BÀI TẬP Toán 10

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, toà nhà số 128 đường Xuân Thủy, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | Website: www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
ĐÀO ANH TIẾN

Thiết kế sách và trình bày bìa:
PHAN THỊ LƯƠNG

Minh hoạ:
VŨ THỊ OANH

Sửa bản in:
LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY – PHẠM THỊ DIỆU THUÝ

Trong sách có sử dụng tư liệu, hình ảnh của một số tác giả. Trân trọng cảm ơn.

Bài tập TOÁN 10 – TẬP MỘT

Mã số:

Mã ISBN:

In .... cuốn, khổ 17 x 24 cm, tại ....

Địa chỉ: ....

Số xác nhận đăng kí xuất bản: ....

Quyết định xuất bản số: ....

In xong và nộp lưu chiểu ....

Lời nói đầu

Sách **Bài tập Toán 10** (gồm 2 tập) được biên soạn tương thích với sách giáo khoa Toán 10 (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên – GS.TSKH Đỗ Đức Thái). Nội dung hai cuốn sách hướng đến tạo cơ hội hình thành và phát triển năng lực toán học, phát huy hứng thú học tập, tính chủ động và tiềm năng của mỗi học sinh; bảo đảm tính tích hợp, phân hoá trong dạy học bộ môn Toán.

Nội dung mỗi bài trong sách được thể hiện qua các phần: A. Kiến thức cần nhớ – B. Ví dụ – C. Bài tập.

Các bài tập cơ bản gồm những bài tập giúp học sinh củng cố, kết nối các kiến thức cốt lõi, trọng tâm được học trong mỗi chủ đề. Ngoài ra, có những bài tập nâng cao (được đánh dấu *) ở mức độ vận dụng phát triển và gắn với một số ứng dụng của toán học trong đời sống. Qua đó tạo cơ hội để học sinh nâng cao dần năng lực tư duy, vận dụng giải quyết vấn đề và hình thành niềm yêu thích môn Toán. Những bài tập đó cũng cung cấp tư liệu để các thầy cô giáo dạy học phân hoá, bồi dưỡng học sinh khá, giỏi.

Các tác giả hi vọng sách có thể giúp học sinh học tốt môn Toán theo định hướng phát triển năng lực, đồng thời hỗ trợ tài liệu cho các thầy cô giáo, cha mẹ học sinh nhằm tham gia vào việc nâng cao khả năng tự học, tự thực hành giải quyết vấn đề ở lớp, ở nhà cho học sinh.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong khi biên soạn, song cuốn sách khó tránh khỏi sơ suất, rất mong nhận được sự góp ý của đông đảo bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong các lần tái bản sau.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về: Công ty Cổ phần Đầu tư Xuất bản – Thiết bị Giáo dục Việt Nam, tầng 5, toà nhà hỗn hợp AZ Lâm Viên, 107 A đường Nguyễn Phong Sắc, phường Dịch Vọng Hậu, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội.

Xin chân thành cảm ơn.

Các tác giả

MỤC LỤC

Chương I — MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC. TẬP HỢP

§1 MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– Mỗi mệnh đề toán học phải hoặc đúng hoặc sai. Một mệnh đề toán học không thể vừa đúng, vừa sai.

– Cho mệnh đề P. Mệnh đề "Không phải P" được gọi là *mệnh đề phủ định* của mệnh đề P và kí hiệu là $\overline{P}$. Mệnh đề $\overline{P}$ đúng khi P sai. Mệnh đề $\overline{P}$ sai khi P đúng.

– Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ *sai* khi P đúng và Q sai; *đúng* trong các trường hợp còn lại.

– Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là *mệnh đề đảo* của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

– Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng, ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương, kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

– Cho mệnh đề chứa biến "$P(x)$, $x \in X$".

+ Mỗi phát biểu "$\forall x \in X, P(x)$" và "$\exists x \in X, P(x)$" là một mệnh đề.

+ Phủ định của mỗi mệnh đề trên lần lượt là mệnh đề "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$" và "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định mệnh đề phủ định và xét tính đúng sai của một mệnh đề

Ví dụ 1 Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

a) A: "$\dfrac{1,2}{5}$ là một phân số";

b) B: "Phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm";

c) C: "$2^2 + 2^3 = 2^{2+3}$";

d) D: "Số 2 025 chia hết cho 15".

Giải

a) Mệnh đề phủ định của mệnh đề A là $\overline{A}$: "$\dfrac{1,2}{5}$ không là phân số". Mệnh đề $\overline{A}$ đúng vì 1,2 không là số nguyên.

b) Mệnh đề phủ định của mệnh đề B là $\overline{B}$: “Phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ không có nghiệm”. Mệnh đề $\overline{B}$ sai vì phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có hai nghiệm là $x = -1$, $x = -2$.

c) Mệnh đề phủ định của mệnh đề C là $\overline{C}$: “$2^2 + 2^3 \neq 2^{2+3}$”. Mệnh đề $\overline{C}$ đúng vì $2^2 + 2^3 = 12$ và $2^{2+3} = 32$.

d) Mệnh đề phủ định của mệnh đề D là $\overline{D}$: “Số 2 025 không chia hết cho 15”. Mệnh đề $\overline{D}$ sai vì 2 025 chia hết cho 15.

Vấn đề 2. Xác định mệnh đề kéo theo

Ví dụ 2 Cho n là số tự nhiên. Xét các mệnh đề:

P: “n là một số tự nhiên chia hết cho 16”,

Q: “n là một số tự nhiên chia hết cho 8”.

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Giải

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$: “Nếu số tự nhiên n chia hết cho 16 thì n chia hết cho 8”. Đây là mệnh đề đúng vì 8 là ước của 16.

b) Mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề $Q \Rightarrow P$: “Nếu số tự nhiên n chia hết cho 8 thì n chia hết cho 16”. Đây là mệnh đề sai vì với $n = 8$, n chia hết cho 8 nhưng không chia hết cho 16.

Vấn đề 3. Xác định mệnh đề phủ định của mệnh đề chứa kí hiệu “∀”, “∃”

Ví dụ 3 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2x - 2$; b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$;

c) $\exists x \in \mathbb{R}, x + \dfrac{1}{x} \geq 2$; d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$.

Giải

a) Phủ định của mệnh đề “$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2$” là mệnh đề “$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2x - 2$”. Mệnh đề phủ định sai vì phương trình $x^2 = 2x - 2$ vô nghiệm nên không có giá trị nào của x thoả mãn $x^2 = 2x - 2$.

b) Phủ định của mệnh đề “$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$” là mệnh đề “$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 2x - 1$”. Mệnh đề phủ định đúng vì với $x = 2$, ta có: $2^2 > 2 \,.\, 2 - 1$.

c) Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$" là mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} < 2$ ".

Mệnh đề phủ định sai vì với $x = 2$, ta có: $2 + \frac{1}{2} > 2$.

d) Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$" là mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$".

Mệnh đề phủ định đúng vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chú ý: Cách làm ở *Ví dụ 3* lần lượt cho chúng ta phương pháp chứng minh tính đúng sai của một mệnh đề có kí hiệu "$\forall$", có kí hiệu "$\exists$".

C. BÀI TẬP

1. Cho mệnh đề *A*: "Nghiệm của phương trình $x^2 - 5 = 0$ là số hữu tỉ". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là:

A. "Nghiệm của phương trình $x^2 - 5 = 0$ không là số hữu tỉ".

B. "Nghiệm của phương trình $x^2 - 5 = 0$ không là số vô tỉ".

C. "Phương trình $x^2 - 5 = 0$ vô nghiệm".

D. "Nghiệm của phương trình $x^2 - 5 = 0$ không là số nguyên".

2. Cho số tự nhiên *n*. Xét mệnh đề "Nếu số tự nhiên *n* chia hết cho 4 thì *n* chia hết cho 2". Mệnh đề đảo của mệnh đề đó là:

A. "Nếu số tự nhiên *n* chia hết cho 2 thì *n* không chia hết cho 4".

B. "Nếu số tự nhiên *n* chia hết cho 4 thì *n* không chia hết cho 2".

C. "Nếu số tự nhiên *n* chia hết cho 2 thì *n* chia hết cho 4".

D. "Nếu số tự nhiên *n* không chia hết cho 2 thì *n* không chia hết cho 4".

3. Cho tứ giác *ABCD*. Xét mệnh đề "Nếu tứ giác *ABCD* là hình chữ nhật thì tứ giác *ABCD* có hai đường chéo bằng nhau". Mệnh đề đảo của mệnh đề đó là:

A. "Nếu tứ giác *ABCD* là hình chữ nhật thì tứ giác *ABCD* không có hai đường chéo bằng nhau".

B. "Nếu tứ giác *ABCD* không có hai đường chéo bằng nhau thì tứ giác *ABCD* không là hình chữ nhật".

C. "Nếu tứ giác *ABCD* có hai đường chéo bằng nhau thì tứ giác *ABCD* không là hình chữ nhật".

D. "Nếu tứ giác *ABCD* có hai đường chéo bằng nhau thì tứ giác *ABCD* là hình chữ nhật".

4. Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$" là mệnh đề:

A. "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$". **B.** "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$".

C. "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$". **D.** "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$".

5. Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{Q}, x = \frac{1}{x}$" là mệnh đề:

A. "$\exists x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{x}$". **B.** "$\forall x \in \mathbb{Q}, x = \frac{1}{x}$".

C. "$\forall x \notin \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{x}$". **D.** "$\forall x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{x}$".

6. Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$" là mệnh đề:

A. "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$". **B.** "$\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 > 0$".

C. "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$". **D.** "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$".

7. Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$" là mệnh đề:

A. "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < x$". **B.** "$\exists x \in \mathbb{R}, |x| \leq x$".

C. "$\exists x \in \mathbb{R}, |x| < x$". **D.** "$\exists x \in \mathbb{R}, |x| > x$".

8. Cho x, y là hai số thực cùng khác -1. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $x + y + xy \neq -1$. **B.** $x + y + xy = -1$.

C. $x + y \neq -2$. **D.** $xy \neq -1$.

9. Cho a, b là hai số thực thoả mãn $a + b < 2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. Cả hai số a, b đều nhỏ hơn 1.

B. Có ít nhất một trong hai số a, b nhỏ hơn 1.

C. Có ít nhất một trong hai số a, b lớn hơn 1.

D. Cả hai số a, b không vượt quá 1.

10. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học?

a) Số π là số vô tỉ;

b) Bình phương của mọi số thực đều là số dương;

c) Tồn tại số thực x mà x lớn hơn số nghịch đảo của nó;

d) Fansipan là ngọn núi cao nhất Việt Nam.

11. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

a) A: "Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = -x^2$ là trục tung";

b) B: "Phương trình $3x^2 + 1 = 0$ có nghiệm";

c) C: "Hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = -2x + 1$ không song song với nhau";

d) D: "Số 2 024 không chia hết cho 4".

12. Cho mệnh đề kéo theo có dạng $P \Rightarrow Q$: "Vì 120 chia hết cho 6 nên 120 chia hết cho 9".

a) Mệnh đề trên đúng hay sai?

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó.

13. Cho mệnh đề kéo theo có dạng $P \Rightarrow Q$: "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường".

a) Mệnh đề trên đúng hay sai?

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó.

14. Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM. Xét các mệnh đề:

P: "Tam giác ABC vuông tại A",

Q: "Độ dài đường trung tuyến AM bằng nửa độ dài cạnh BC".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó.

b) Nếu cả hai mệnh đề trong ý a) là đúng, hãy phát biểu mệnh đề tương đương.

15. Dùng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để viết các mệnh đề sau:

a) Có một số nguyên không chia hết cho chính nó;

b) Có một số thực mà bình phương của nó cộng với 1 bằng 0;

c) Mọi số nguyên dương đều lớn hơn nghịch đảo của nó;

d) Mọi số thực đều lớn hơn số đối của nó.

16. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ chia hết cho 2;

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$;

c) $\exists x \in \mathbb{R}, |x| > x$;

d) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 - x - 1 = 0$.

17. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

a) Xét mệnh đề "Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm bằng 1". Mệnh đề này đúng hay sai?

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên. Mệnh đề đảo đúng hay sai?

c) Nêu điều kiện cần và đủ để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm bằng 1.

§2 TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tập hợp

– Một tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử.

– Tập rỗng và những tập hợp chỉ chứa một số lượng phần tử nhất định gọi là *tập hợp hữu hạn*.

– Những tập hợp chứa vô số phần tử gọi là *tập hợp vô hạn*.

2. Tập con và tập hợp bằng nhau

– Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một *tập con* của tập hợp B và viết $A \subset B$. Ta còn đọc là A chứa trong B.

– Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói hai tập hợp A và B bằng nhau và viết là $A = B$.

– Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.

3. Một số phép toán trên tập hợp

– Tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc tập hợp A, vừa thuộc tập hợp B được gọi là *giao* của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cap B$.

– Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B được gọi là *hợp* của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cup B$.

– Cho tập hợp A là tập con của tập hợp B. Tập hợp những phần tử của B mà không phải là phần tử của A được gọi là *phần bù* của A trong B, kí hiệu $C_B A$.

– Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là *hiệu* của A và B, kí hiệu $A \setminus B$.

4. Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

Cho a và b là hai số thực với $a < b$.

Đoạn $[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$; Nửa khoảng $[a\,;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$;

Khoảng $(a\ ;b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$; Nửa khoảng $(a\ ;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$;

Khoảng $(a\ ;+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$; Nửa khoảng $[a\ ;+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge a\}$;

Khoảng $(-\infty\ ;b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$; Nửa khoảng $(-\infty\ ;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le b\}$;

Tập số thực $\mathbb{R}=(-\infty\ ;+\infty)$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định giao, hợp, hiệu của hai tập hợp

Phương pháp: Cho A, B là hai tập con của tập số thực.

Để tìm $A\cap B$, ta làm như sau:

+ Biểu diễn A, B trên trục số; gạch bỏ phần không thuộc A, B.

+ Phần không bị gạch là $A\cap B$.

Để tìm $A\cup B$, ta làm như sau:

+ Biểu diễn A, B trên trục số; tô đậm phần thuộc A, B.

+ Phần tô đậm là $A\cup B$.

Để tìm $A\setminus B$, ta làm như sau:

+ Biểu diễn A, B trên trục số; tô đậm phần thuộc A, gạch bỏ phần thuộc B.

+ Phần tô đậm mà không bị gạch là $A\setminus B$.

Ví dụ 1 Xác định các tập hợp sau:

a) $[-3\ ;5]\cap(2\ ;7)$;

b) $(-\infty\ ;0]\cup(-1\ ;2)$;

c) $\mathbb{R}\setminus(-\infty\ ;3)$;

d) $(-3\ ;2)\setminus[1\ ;3)$.

Giải

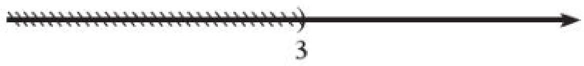
a) Biểu diễn $[-3\ ;5]$ và $(2\ ;7)$ trên cùng một trục số bằng cách gạch bỏ phần không thuộc mỗi tập hợp đó. Phần không bị gạch là $(2\ ;5]$ nên ta có:

$[-3\ ;5]\cap(2\ ;7)=(2\ ;5]$.

b) Biểu diễn $(-\infty\ ;0]$ và $(-1\ ;2)$ trên cùng một trục số bằng cách tô đậm mỗi tập hợp đó. Phần tô đậm là $(-\infty\ ;2)$ nên ta có:

$(-\infty\ ;0]\cup(-1\ ;2)=(-\infty\ ;2)$.

c) Biểu diễn $\mathbb{R}$ và $(-\infty ; 3)$ trên cùng một trục số bằng cách tô đậm $\mathbb{R}$ và gạch bỏ $(-\infty ; 3)$. Phần tô đậm mà không bị gạch là $[3 ; +\infty)$ nên ta có:



$$\mathbb{R} \setminus (-\infty ; 3) = [3 ; +\infty).$$

d) Biểu diễn $(-3 ; 2)$ và $[1 ; 3)$ trên cùng một trục số bằng cách tô đậm $(-3 ; 2)$ và gạch bỏ $[1 ; 3)$. Phần tô đậm mà không bị gạch là $(-3 ; 1)$ nên ta có:

$$(-3 ; 2) \setminus [1 ; 3) = (-3 ; 1).$$

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 2 Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$. Viết tập hợp các số thực x sao cho biểu thức $\dfrac{1}{P(x)}$ xác định.

Giải

Điều kiện để biểu thức $\dfrac{1}{P(x)}$ xác định là $P(x) \neq 0$.

Vậy tập hợp D các số thực x để biểu thức $\dfrac{1}{P(x)}$ xác định là tập các số thực x mà x không thuộc A nên $D = \mathbb{R} \setminus A$.

Ví dụ 3 Lớp 10B có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và 19 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên.

a) Có bao nhiêu học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc?

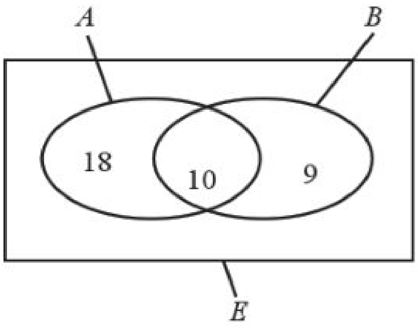
b) Có bao nhiêu học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?

c) Biết lớp 10B có 40 học sinh. Có bao nhiêu học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao? Có bao nhiêu học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?

Giải

Kí hiệu A là tập hợp học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao, B là tập hợp học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc, E là tập hợp học sinh của lớp 10B. Ta có thể biểu diễn ba tập hợp trên bằng biểu đồ Ven (*Hình 1*).

Khi đó, $A \cap B$ là tập hợp học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên. Số phần tử của A là 28, số phần tử của B là 19, số phần tử của tập hợp $A \cap B$ là 10.



Hình 1

a) Tập hợp các học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc là tập hợp $A \setminus B$. Số phần tử của $A \setminus B$ chính là số phần tử của A trừ đi số phần tử của $A \cap B$. Vậy số học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc là: $28 - 10 = 18$ (học sinh).

b) Tập hợp các học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên chính là tập hợp $A \cup B$. Do khi đếm số học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao là 28, số học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc là 19 thì số học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ là 10 được tính hai lần. Vậy số học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên là:

$$28 + 19 - 10 = 37 \text{ (học sinh)}.$$

c) Số phần tử của E là 40. Tập hợp các học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao là phần bù của A trong E. Vậy số học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao là:

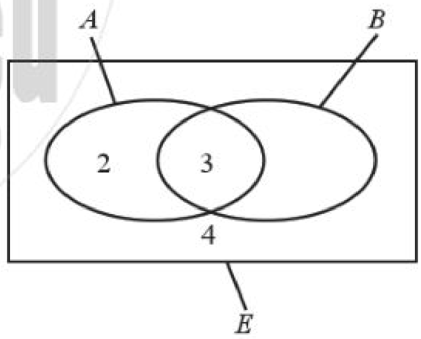
$$40 - 28 = 12 \text{ (học sinh)}.$$

Tập hợp các học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ là phần bù của $A \cup B$ trong E. Vậy số học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ là: $40 - 37 = 3$ (học sinh).

Ví dụ 4 Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết rằng có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

Giải

Kí hiệu A là tập hợp học sinh tham gia tiết mục múa, B là tập hợp học sinh tham gia tiết mục hát, E là tập hợp nhóm học sinh. Ta có thể biểu diễn ba tập hợp đó bằng biểu đồ Ven (*Hình 2*). Khi đó, $A \cap B$ là tập hợp học sinh tham gia cả hai tiết mục. Số phần tử của tập hợp A là 5, số phần tử của tập hợp $A \cap B$ là 3, số phần tử của tập hợp E là 12.



Hình 2

Số học sinh tham gia ít nhất một trong hai tiết mục là:

$$12 - 4 = 8 \text{ (học sinh)}.$$

Số học sinh tham gia tiết mục hát mà không tham gia tiết mục múa là :

$$8 - 5 = 3 \text{ (học sinh)}.$$

Số học sinh tham gia tiết mục hát là: $3 + 3 = 6$ (học sinh).

C. BÀI TẬP

18. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 4\}$. A là tập hợp nào sau đây?

A. $\{0; 1; 2; 3; 4\}$. **B.** $(0\ ; 4]$. **C.** $\{0; 4\}$. **D.** $\{1; 2; 3; 4\}$.

19. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$. Tập hợp $A \cup B$ bằng:

A. $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. **B.** $\{3; 4\}$. **C.** $\{0; 1; 2\}$. **D.** $\{5; 6\}$.

20. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng:

A. $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. **B.** $\{3; 4\}$. **C.** $\{0; 1; 2\}$. **D.** $\{5; 6\}$.

21. Cho hai tập hợp $A = (-3\ ; 3]$, $B = (-2\ ; +\infty)$. Tập hợp $A \cap B$ bằng:

A. $\{-1; 0; 1; 2; 3\}$. **B.** $[-2\ ; 3]$. **C.** $(-2\ ; 3]$. **D.** $(-3\ ; +\infty)$.

22. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 2, x \ne 5\}$. A là tập hợp nào sau đây?

A. $(2\ ; +\infty) \setminus \{5\}$. **B.** $[2\ ; 5)$. **C.** $(2\ ; 5)$. **D.** $[2\ ; +\infty) \setminus \{5\}$.

23. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$.

Tập hợp $A \setminus B$ bằng:

A. $(-2\ ; 3)$. **B.** $(-2\ ; 3) \cup (3\ ; 5]$. **C.** $(3\ ; 5]$. **D.** $[-2\ ; 5] \setminus \{3\}$.

24. Cho tập hợp $A = [-1\ ; +\infty)$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$ bằng:

A. $(-1\ ; +\infty)$. **B.** $(-\infty\ ; -1)$. **C.** $(-\infty\ ; -1]$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

25. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$, B là tập nghiệm của đa thức $Q(x)$, C là tập nghiệm của đa thức $P(x) \,.\, Q(x)$. C là tập hợp nào sau đây?

A. $A \cup B$. **B.** $A \cap B$. **C.** $A \setminus B$. **D.** $B \setminus A$.

26. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$, B là tập nghiệm của đa thức $Q(x)$, D là tập nghiệm của đa thức $P^2(x) + Q^2(x)$. D là tập hợp nào sau đây?

A. $A \cup B$. **B.** $A \cap B$. **C.** $A \setminus B$. **D.** $B \setminus A$.

27. Cho tập hợp $X = \{a; b; c; d\}$. Viết tất cả các tập con có ba phần tử của tập hợp X.

28. Cho ba tập hợp: A là tập hợp các tam giác; B là tập hợp các tam giác cân; C là tập hợp các tam giác đều. Dùng kí hiệu $\subset$ để mô tả quan hệ của hai trong các tập hợp trên.

29. Dùng kí hiệu $\subset$ để mô tả quan hệ của hai tập hợp khác nhau trong các tập hợp sau: $[-1\ ; 3]$; $(-1\ ; 3)$; $[-1\ ; 3)$, $(-1\ ; 3]$, $\{-1; 3\}$.

30. Cho ba tập hợp sau: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 3\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 6\}$.

a) Dùng kí hiệu $\subset$ để mô tả quan hệ của hai trong các tập hợp trên.

b) Xác định các tập hợp $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$.

31. Xác định các tập hợp sau:

a) $[-2 ; 3] \cap (0 ; 5)$; b) $(-3 ; 1] \cap (1 ; +\infty)$; c) $(-\infty ; 0) \cup (-2 ; 2]$;

d) $(-\infty ; 0) \cup [0 ; +\infty)$; e) $\mathbb{R} \setminus [1 ; +\infty)$; g) $[3 ; 5] \setminus (4 ; 6)$.

32. Cho A là một tập hợp. Xác định các tập hợp sau:

a) $A \cap A$; b) $A \cap \varnothing$; c) $A \cup A$; d) $A \cup \varnothing$; e) $A \setminus A$; g) $A \setminus \varnothing$.

33. Cho tập hợp A. Có nhận xét gì về tập hợp B nếu:

a) $A \cap B = A$; b) $A \cap B = B$; c) $A \cup B = A$;

d) $A \cup B = B$; e) $A \setminus B = \varnothing$; g) $A \setminus \varnothing = B$?

34. Trong đợt văn nghệ chào mừng ngày 20/11, lớp 10A đăng kí tham gia hai tiết mục, đó là hát tốp ca và múa. Gọi A là tập hợp các học sinh tham gia hát tốp ca, B là tập hợp các học sinh tham gia múa, E là tập hợp các học sinh của lớp. Mô tả các tập hợp sau đây:

a) $A \cap B$; b) $A \cup B$; c) $A \setminus B$; d) $E \setminus A$; g) $E \setminus (A \cup B)$.

35. Lớp 10A có 27 học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ bóng đá và cờ vua, trong đó có 19 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá, 15 học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua.

a) Có bao nhiêu học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá mà không tham gia câu lạc bộ cờ vua?

b) Có bao nhiêu học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ?

c) Biết trong lớp có 8 học sinh không tham gia câu lạc bộ nào trong hai câu lạc bộ trên. Lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

36. Tìm $D = E \cap G$, biết E và G lần lượt là tập nghiệm của hai bất phương trình trong mỗi trường hợp sau :

a) $5x - 2 > 0$ và $3x + 7 \geq 0$;

b) $2x + 3 > 0$ và $5x - 9 \leq 0$;

c) $9 - 3x \geq 0$ và $12 - 3x < 0$.

37. Cho các tập hợp: $A = [-1 ; 7]$, $B = (m - 1 ; m + 5)$ với m là một tham số thực. Tìm m để:

a) $B \subset A$; b) $A \cap B = \varnothing$.

38. Cho $A = [m\,; m+2]$ và $B = [n\,; n+1]$ với m, n là các tham số thực. Tìm điều kiện của các số m và n để tập hợp $A \cap B$ chứa đúng một phần tử.

39. Cho $A = (-\infty\,; m+1)$, $B = [3\,; +\infty)$ với m là một tham số thực. Tìm m để:

a) $A \cup B = \mathbb{R}$;　　　　　　b) $A \cap B$ chứa đúng 5 số nguyên.

40. Biểu diễn tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 9\}$ thành hợp các nửa khoảng.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

41. Phát biểu nào sau đây **không** là một mệnh đề toán học?

A. Số 2 025 chia hết cho 5.

B. Nếu hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn thì hình thang đó cân.

C. Nếu bạn Minh chăm chỉ thì bạn Minh sẽ thành công.

D. Các số nguyên tố đều là số lẻ.

42. Phủ định của mệnh đề: "$\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ là số chẵn" là:

A. "$\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ không là số chẵn".　　**B.** "$\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ không là số lẻ".

C. "$\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ là số lẻ".　　**D.** "$\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ là số chẵn".

43. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$. A là tập hợp nào sau đây?

A. $(-3\,; 2)$.　　**B.** $\{-3; -2; -1; 0; 1\}$.　　**C.** $\{-3; 2\}$.　　**D.** $[-3\,; 2)$.

44. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 < 4 + 2x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 3 < 4x - 1\}$.
Tất cả các số nguyên thuộc cả hai tập hợp A và B là:

A. 0 và 1.　　**B.** -1; 0; 1 và 2.　　**C.** 1 và 2.　　**D.** 1.

45. Cho hai tập hợp $E = (2\,; 4]$, $F = (4\,; 5)$. $E \cup F$ bằng:

A. $(2\,; 5)$.　　**B.** $\varnothing$.　　**C.** $[2\,; 5)$.　　**D.** $\{3; 4\}$.

46. Cho hai tập hợp $A = [-4\,; 3)$, $B = (-2\,; +\infty)$. $A \setminus B$ bằng:

A. $[-4\,; -2)$.　　**B.** $\{-4; -3; -2\}$.　　**A.** $[3\,; +\infty)$.　　**D.** $[-4\,; -2]$.

47. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó và mệnh đề phủ định của nó:

a) A: "Phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ có nghiệm thực";

b) B: "Hình bình hành có tâm đối xứng ".

48. Cho hình thang $ABCD$. Xét mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$ như sau:

"Nếu hình thang $ABCD$ cân thì hình thang $ABCD$ có hai cạnh bên bằng nhau".

Phát biểu và xét tính đúng sai mệnh đề đảo của mệnh đề trên.

49. Cho tứ giác $ABCD$. Xét các mệnh đề:

P: "Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành", Q: "Tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối bằng nhau".

Hãy phát biểu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$, sau đó xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó. Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng, hãy phát biểu mệnh đề tương đương.

50. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

a) A: "$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > \dfrac{1}{n}$";

b) B: "$\exists x \in \mathbb{Z},\ 2x + 3 = 0$";

c) C: "$\exists x \in \mathbb{Q},\ 4x^2 - 1 = 0$";

d) D: "$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 + 1$ không chia hết cho 3".

51. Dùng kí hiệu để viết mỗi tập hợp sau và biểu diễn mỗi tập hợp đó trên trục số:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < -4\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$.

52. Cho các tập hợp: $A = [-1\ ;\ 2)$, $B = (-\infty\ ;\ 1]$.

Xác định $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $\mathbb{R} \setminus B$; $C_{\mathbb{R}}A$.

53. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$, B là tập nghiệm của đa thức $Q(x)$, C là tập nghiệm của phân thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. So sánh tập hợp $A \setminus B$ và tập hợp C.

54. Cho hai tập hợp $A = [-1\ ;\ 4]$, $B = [m + 1\ ;\ m + 3]$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để $B \setminus A = \varnothing$.

55. Trong đợt thi giải chạy ngắn cấp trường, lớp 10B có 15 học sinh đăng kí thi nội dung chạy 100 m, 10 học sinh đăng kí thi nội dung chạy 200 m. Biết lớp 10B có 40 học sinh và có 19 học sinh không đăng kí thi nội dung nào. Hỏi lớp 10B có bao nhiêu bạn đăng kí thi cả hai nội dung?

56. Trong kì thi chọn học sinh giỏi các môn văn hoá, lớp 10A có 7 học sinh đăng kí thi môn Toán, 5 học sinh đăng kí thi môn Vật lí, 6 học sinh đăng kí thi môn Hoá học; trong đó có 3 học sinh đăng kí thi cả Toán và Vật lí, 4 học sinh đăng kí thi cả Toán và Hoá học, 2 học sinh đăng kí thi cả Vật lí và Hoá học, 1 học sinh đăng kí thi cả ba môn. Hỏi lớp 10A có tất cả bao nhiêu học sinh đăng kí thi học sinh giỏi các môn Toán, Vật lí, Hoá học?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

1. A. **2. C.** **3. D.** **4. A.** **5. D.** **6. D.** **7. C.** **8. A.** **9. B.**

10. a) Là một mệnh đề toán học. b) Là một mệnh đề toán học.

c) Là một mệnh đề toán học. d) Không là mệnh đề toán học.

11. a) $\overline{A}$: "Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = -x^2$ không là trục tung". Mệnh đề phủ định sai.

b) $\overline{B}$: "Phương trình $3x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm". Mệnh đề phủ định đúng.

c) $\overline{C}$: "Hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = -2x + 1$ song song với nhau". Mệnh đề phủ định sai.

d) $\overline{D}$: "Số 2 024 chia hết cho 4". Mệnh đề phủ định đúng.

12. a) Mệnh đề sai.

b) Mệnh đề đảo: "Vì 120 chia hết cho 9 nên 120 chia hết cho 6". Mệnh đề này đúng.

13. a) Mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề đảo: "Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành". Mệnh đề này đúng.

14. a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$: "Nếu tam giác ABC vuông tại A thì độ dài đường trung tuyến AM bằng nửa độ dài cạnh BC". Mệnh đề này đúng.

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$: "Nếu tam giác ABC có độ dài đường trung tuyến AM bằng nửa độ dài cạnh BC thì tam giác ABC vuông tại A". Mệnh đề này đúng.

b) Mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$: "Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi độ dài đường trung tuyến AM bằng nửa độ dài cạnh BC".

15. a) "$\exists n \in \mathbb{Z}$, n không chia hết cho chính nó". b) "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$".

c) "$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > \dfrac{1}{n}$". d) "$\forall x \in \mathbb{R}, x > -x$".

16. a) Mệnh đề phủ định: "$\exists n \in \mathbb{N},\ n(n+1)$ không chia hết cho 2". Mệnh đề này sai.

b) Mệnh đề phủ định: "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \le x$". Mệnh đề này đúng.

c) Mệnh đề phủ định: "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \le x$". Mệnh đề này sai.

d) Mệnh đề phủ định: "$\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 - x - 1 \ne 0$". Mệnh đề này đúng.

17. a) Mệnh đề này đúng.

b) Mệnh đề đảo: "Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm bằng 1 thì $a + b + c = 0$". Mệnh đề đảo này đúng.

c) Điều kiện cần và đủ để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm bằng 1 là $a + b + c = 0$.

§2 TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

18. A. 19. A. 20. C. 21. C. 22. D. 23. B. 24. B. 25. A. 26. B.

27. Các tập con có ba phần tử của X là: $\{a; b; c\}$, $\{a; b; d\}$, $\{b; c; d\}$, $\{c; d; a\}$.

28. $C \subset B \subset A$.

29. $(-1;3) \subset (-1;3]$; $(-1;3) \subset [-1;3)$; $(-1;3) \subset [-1;3]$;

$[-1;3) \subset [-1;3]$; $(-1;3] \subset [-1;3]$; $\{-1;3\} \subset [-1;3]$.

30. a) $C \subset B$; $C \subset A$. b) $A \cap B = C$; $A \cup C = A$; $B \cap C = C$.

31. a) $[-2;3] \cap (0;5) = (0;3]$. b) $(-3;1] \cap (1;+\infty) = \varnothing$.

c) $(-\infty;0) \cup (-2;2] = (-\infty;2]$. d) $(-\infty;0) \cup [0;+\infty) = \mathbb{R}$.

e) $\mathbb{R} \setminus [1;+\infty) = (-\infty;1)$. g) $[3;5] \setminus (4;6) = [3;4]$.

32. a) $A \cap A = A$. b) $A \cap \varnothing = \varnothing$. c) $A \cup A = A$.

d) $A \cup \varnothing = A$. e) $A \setminus A = \varnothing$. g) $A \setminus \varnothing = A$.

33. a) $B \supset A$. b) $B \subset A$. c) $B \subset A$. d) $B \supset A$. e) $B \supset A$. g) $B = A$.

34. a) $A \cap B$ là tập hợp các học sinh tham gia cả hai tiết mục là hát tốp ca và múa.

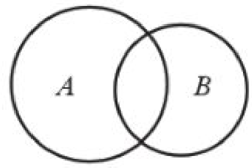
b) $A \cup B$ là tập hợp các học sinh tham gia ít nhất một trong hai tiết mục là hát tốp ca hoặc múa.

c) $A \setminus B$ là tập hợp các học sinh tham gia hát tốp ca nhưng không tham gia múa.

d) $E \setminus A$ là tập hợp các học sinh của lớp 10A không tham gia hát tốp ca.

g) $E \setminus (A \cup B)$ là tập hợp các học sinh của lớp 10A không tham gia tiết mục nào trong hai tiết mục hát tốp ca và múa.

35. Gọi A là tập hợp các học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá, B là tập hợp các học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua (*Hình 3*). Khi đó, $A \cup B$ là tập hợp các học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ bóng đá và cờ vua. Ta có số phần tử của A là 19, số phần tử của B là 15, số phần tử của $A \cup B$ là 27.



Hình 3

a) Tập hợp các học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá mà không tham gia câu lạc bộ cờ vua chính là $A \setminus B$ và cũng là tập hợp $(A \cup B) \setminus B$.

Số phần tử của tập hợp $(A \cup B) \setminus B$ chính là số phần tử của $A \cup B$ trừ đi số phần tử của B.

Vậy số học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá mà không tham gia câu lạc bộ cờ vua là: $27 - 15 = 12$ (học sinh).

b) Tập hợp các học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ chính là tập hợp $A \cap B$.

Số phần tử của $A \cap B$ bằng số phần tử của tập hợp A trừ đi số phần tử của tập hợp các học sinh chỉ tham gia câu lạc bộ bóng đá mà không tham gia câu lạc bộ cờ vua.

Số học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ là: $19 - 12 = 7$ (học sinh).

c) Số học sinh của lớp 10A là : $27 + 8 = 35$ (học sinh).

36. a) $D = \left(\dfrac{2}{5}\,;+\infty\right)$. b) $D = \left(\dfrac{-3}{2}\,;\dfrac{9}{5}\right]$. c) $D = \varnothing$.

37. a) $B \subset A$ nếu $-1 \le m - 1$ và $m + 5 \le 7$. Suy ra $0 \le m \le 2$.

b) $A \cap B = \varnothing$ nếu $m - 1 \ge 7$ hoặc $m + 5 \le -1$. Suy ra $m \ge 8$ hoặc $m \le -6$.

38. Tập hợp $A \cap B$ chứa đúng một phần tử nếu $n + 1 = m$ hoặc $n = m + 2$.

39. a) $A \cup B = \mathbb{R}$ nếu $m + 1 \ge 3$. Suy ra $m \ge 2$.

b) $A \cap B$ chứa đúng 5 số nguyên nếu $7 < m + 1 \le 8$. Suy ra $6 < m \le 7$.

40. $A = (-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty)$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

41. C. 42. C. 43. D. 44. A. 45. A. 46. D.

47. a) $\overline{A}$: "Phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ không có nghiệm thực". Mệnh đề A sai, $\overline{A}$ đúng.

b) $\overline{B}$: "Hình bình hành không có tâm đối xứng ". Mệnh đề B đúng, $\overline{B}$ sai.

48. Mệnh đề đảo $Q \Rightarrow P$: "Nếu hình thang $ABCD$ có hai cạnh bên bằng nhau thì hình thang $ABCD$ cân". Mệnh đề đảo sai.

49. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$: "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối bằng nhau". Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là đúng.

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$: "Nếu tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối bằng nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành". Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là đúng.

Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$: "Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối bằng nhau".

50. a) $\overline{A}$: "$\exists n \in \mathbb{N}^*, n \le \frac{1}{n}$". Mệnh đề này đúng.

b) $\overline{B}$: "$\forall x \in \mathbb{Z}, 2x + 3 \neq 0$". Mệnh đề này đúng.

c) $\overline{C}$: "$\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 \neq 0$". Mệnh đề này sai.

d) $\overline{D}$: "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 3". Mệnh đề này sai.

51. a) $(-7 ; -4)$. b) $[-3 ; 1]$. c) $(-\infty ; 0]$. d) $(-1 ; +\infty)$.

52. $A \cap B = [-1 ; 1]$; $A \cup B = (-\infty ; 2)$; $A \setminus B = (1 ; 2)$; $B \setminus A = (-\infty ; -1)$;

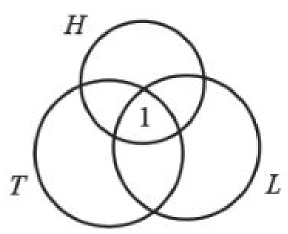
$\mathbb{R} \setminus B = (1 ; +\infty)$; $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty ; -1) \cup [2 ; +\infty)$.

53. $A \setminus B = C$.

54. $B \setminus A = \varnothing$ nếu $B \subset A$ nên ta có: $m + 1 \ge -1$ và $m + 3 \le 4$. Suy ra $-2 \le m \le 1$.

55. 4 học sinh.

56. Gọi T là tập hợp các học sinh đăng kí thi môn Toán, L là tập hợp các học sinh đăng kí thi môn Vật lí, H là tập hợp các học sinh đăng kí thi môn Hoá học. Biểu diễn cả ba tập hợp bằng biểu đồ Ven (*Hình 4*).



Hình 4

Dựa vào biểu đồ Ven, ta có số học sinh chỉ đăng kí thi môn Toán là: $7 - 3 - 4 + 1 = 1$.

Số học sinh chỉ đăng kí thi môn Vật lí là: $5 - 3 - 2 + 1 = 1$.

Số học sinh đăng kí thi môn Toán và Vật lí mà không đăng kí thi môn Hoá học là: $3 - 1 = 2$.

Vậy tổng số học sinh lớp 10A đăng kí thi ba môn trên là:

$$1 + 1 + 2 + 6 = 10 \text{ (học sinh)}.$$

Chương
II

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– *Bất phương trình bậc nhất hai ẩn* x, y là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax + by < c,\ ax + by > c,\ ax + by \le c,\ ax + by \ge c,$$

trong đó a, b, c là những số thực cho trước với a, b không đồng thời bằng 0; x, y là các ẩn.

– Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng d: $ax + by = c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể d) là *miền nghiệm* của bất phương trình $ax + by < c$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể d) là *miền nghiệm* của bất phương trình $ax + by > c$.

– Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy:

Bước 1: Vẽ đường thẳng d: $ax + by = c$. Đường thẳng d chia mặt phẳng toạ độ thành hai nửa mặt phẳng.

Bước 2: Lấy một điểm $M(x_0\,;\,y_0)$ không nằm trên d (ta thường lấy gốc toạ độ O nếu $c \ne 0$). Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c.

Bước 3: Kết luận

- Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.
- Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.

B. VÍ DỤ

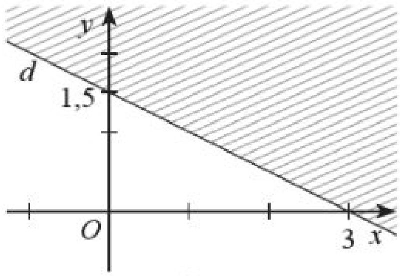
Vấn đề 1. Biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Ví dụ 1 Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình: $x + 2y < 3$.

Giải

- Vẽ đường thẳng d: $x + 2y = 3$.
- Lấy điểm $O(0\ ;\ 0)$. Ta có: $0 + 0 = 0 < 3$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình $x + 2y < 3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm $O(0\ ;\ 0)$ không kể đường thẳng d (nửa mặt phẳng không bị gạch) (*Hình 1*).



Hình 1

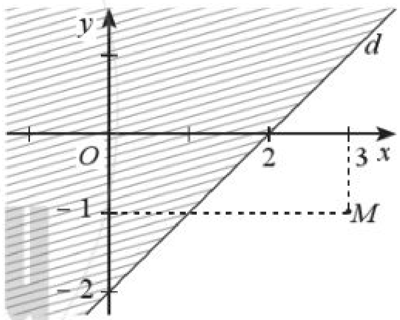
Vấn đề 2. Xác định bất phương trình bậc nhất hai ẩn tương ứng miền nghiệm cho trước

Phương pháp:

Bước 1: Xác định phương trình đường thẳng chia mặt phẳng thành hai phần có dạng $ax + by = c$.

Bước 2: Lấy một điểm $M(x_0\ ;\ y_0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình, thay toạ độ của điểm M vào $ax + by$ rồi so sánh với c để xác định bất phương trình cần tìm.

Ví dụ 2 Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể d) ở *Hình 2* là miền nghiệm của bất phương trình nào?



Hình 2

Giải

Nhận thấy, đường thẳng d có hệ số góc khác 0.

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng: $y = ax + b$.

Do đường thẳng d đi qua điểm $(2\ ;\ 0)$ và $(0\ ;\ -2)$ nên

ta có: $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases}$

Vậy đường thẳng d có phương trình $y = x - 2$ hay $x - y = 2$.

Lấy điểm $M(3\ ;\ -1)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình. Ta có:

$$3 - (-1) = 4 > 2.$$

Vậy nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể d) ở *Hình 2* là miền nghiệm của bất phương trình

$$x - y > 2.$$

Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 3 Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng $60\ m^2$. Diện tích để kê một chiếc ghế là $0{,}5\ m^2$, một chiếc bàn là $1{,}2\ m^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là $12\ m^2$.

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

Giải

a) Diện tích để kê x chiếc ghế, y chiếc bàn là: $0,5x + 1,2y$ (m^2).

Diện tích tối đa để kê bàn và ghế là: $60 - 12 = 48$ (m^2).

Ta có bất phương trình: $0,5x + 1,2y \leq 48$.

b) Ba nghiệm có thể chỉ ra được của bất phương trình trên là:

$$(20 ; 30), (30 ; 20), (50 ; 15).$$

C. BÀI TẬP

1. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $-3x + 5y \leq 6$?

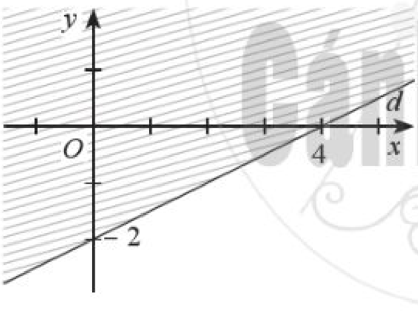
A. $(2 ; 8)$. **B.** $(-10 ; -3)$. **C.** $(3 ; 3)$. **D.** $(0 ; 2)$.

2. Miền nghiệm của bất phương trình $2x - 3y > 5$ là nửa mặt phẳng (không kể đường thẳng d: $2x - 3y = 5$) không chứa điểm có toạ độ nào sau đây?

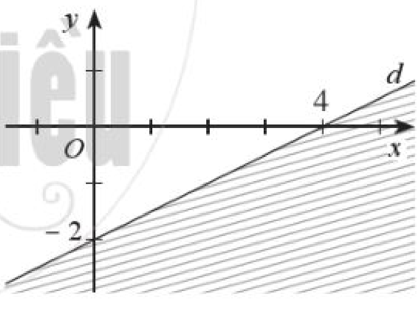
A. $(0 ; 0)$. **B.** $(3 ; 0)$. **C.** $(1 ; -2)$. **D.** $(-3; -4)$.

3. Miền nghiệm của bất phương trình $x - 2y < 4$ được xác định bởi miền nào (nửa mặt phẳng không bị gạch và không kể d) sau đây?

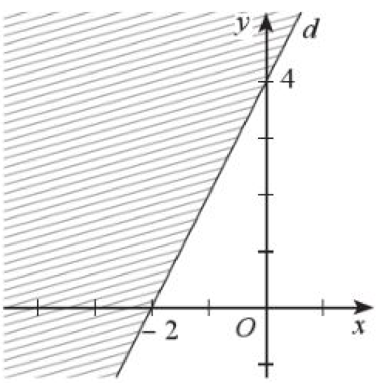
A.



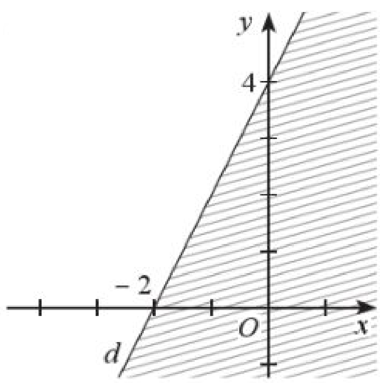
B.



C.

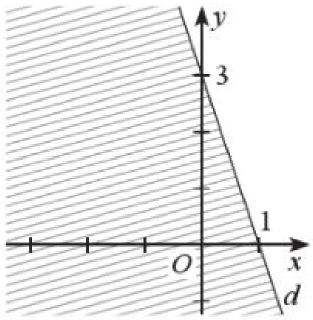


D.



4. Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể *d*) ở *Hình 3* là miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

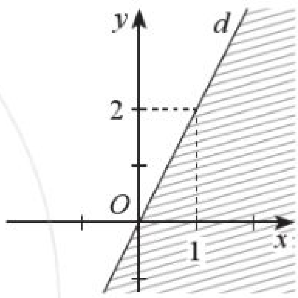
A. $3x + y < 3$.
B. $x + 3y > 3$.
C. $x + 3y < 3$.
D. $3x + y > 3$.



Hình 3

5. Nửa mặt phẳng không bị gạch (kể cả *d*) ở *Hình 4* là miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $2x - y \le 0$.
B. $2x - y \ge 0$.
C. $x - 2y \ge 0$.
D. $x - 2y \le 0$.



Hình 4

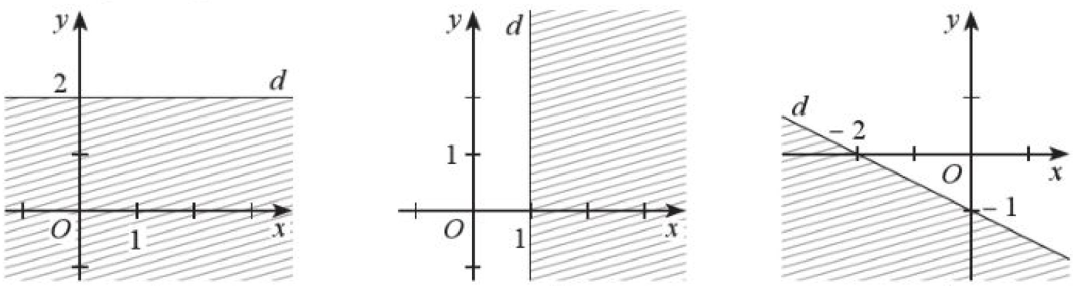
6. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $-5x + 2y > 10$?

a) $(-2\ ;\ 1)$;
b) $(1\ ;\ 5)$;
c) $(0\ ;\ 5)$.

7. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

a) $3x + 5y < 15$;
b) $x - 2y \ge 6$;
c) $y > -x + 3$;
d) $y \le 4 - 2x$.

8. Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể *d*) ở mỗi *Hình 5a*, *5b*, *5c* là miền nghiệm của bất phương trình nào?



a) *b)* *c)*

Hình 5

9. Hà, Châu, Liên và Ngân cùng đi mua trà sữa. Cả bốn bạn có tất cả 185 nghìn đồng. Bốn bạn mua 4 cốc trà sữa với giá tiền 35 nghìn đồng một cốc. Các bạn gọi thêm trân châu cho vào trà sữa. Một phần trân châu đen có giá 5 nghìn đồng, một phần trân châu trắng có giá 10 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số phần trân châu đen, trân châu trắng mà bốn bạn định mua thêm.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để thể hiện số tiền các bạn có đủ khả năng chi trả cho phần trân châu đen, trắng.

b) Chỉ ra một nghiệm nguyên của bất phương trình đó.

§2 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– *Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là* một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là một *nghiệm* của hệ bất phương trình đó.

– *Miền nghiệm* của hệ bất phương trình là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

– Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau:

+ Trong cùng mặt phẳng toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.

+ Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

– Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức dạng $F = ax + by$, trong đó x, y là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà miền nghiệm của hệ đó là một miền đa giác, ta làm như sau:

Bước 1: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (là một miền đa giác).

Bước 2: Xác định toạ độ các đỉnh của đa giác.

Bước 3: Tính giá trị của biểu thức $F = ax + by$ tại cặp số $(x\ ;\ y)$ là toạ độ các đỉnh của đa giác rồi so sánh các giá trị đó. Từ đó, kết luận được giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất cần tìm.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Biểu diễn miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Ví dụ 1 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + 2y < -4 \\ y \geq x + 5. \end{cases}$

Giải

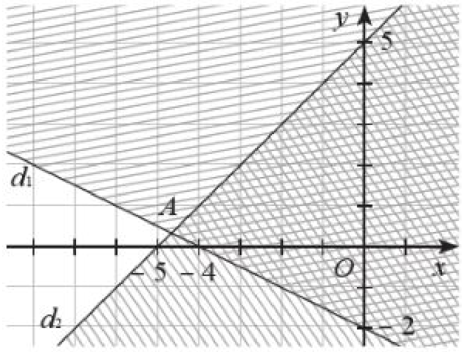
Vẽ các đường thẳng:

$$d_1: x + 2y = -4;$$

$$d_2: x - y = -5.$$

Gạch đi các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần không bị gạch kể cả tia Ad_2 với $A\left(-\frac{14}{3}; \frac{1}{3}\right)$ (*Hình 6*).



Hình 6

Vấn đề 2. Tìm giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của một biểu thức hai ẩn với các điều kiện của ẩn là một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Ví dụ 2

a) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y \le 10 \\ -2x + y \le 0 \\ -2x + y \ge -12 \\ y \ge -2. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

b) Tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $F = 2x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Giải

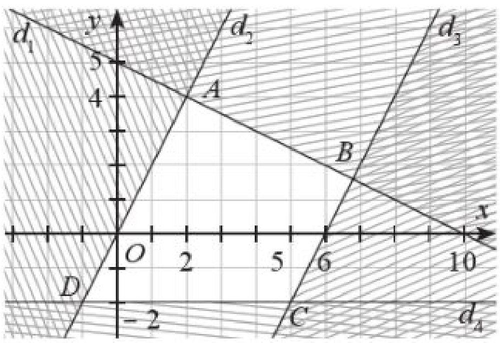
a) Vẽ các đường thẳng:

$d_1: x + 2y = 10;$ $\quad d_2: -2x + y = 0;$

$d_3: -2x + y = -12;$ $\quad d_4: y = -2.$

Gạch đi các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác $ABCD$ với $A(2; 4)$, $B\left(\frac{34}{5}; \frac{8}{5}\right)$, $C(5; -2)$, $D(-1; -2)$ (*Hình 7*).



Hình 7

b) Thay x, y lần lượt là toạ độ các điểm A, B, C, D vào biểu thức F:

	$A(2\,;4)$	$B\left(\frac{34}{5}\,;\frac{8}{5}\right)$	$C(5\,;-2)$	$D(-1;-2)$
$F=2x+3y$	16	$\frac{92}{5}$	4	-8

Vậy biểu thức F đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{92}{5}$ tại $x=\frac{34}{5}$, $y=\frac{8}{5}$; đạt giá trị nhỏ nhất bằng -8 tại $x=-1$, $y=-2$.

Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 3 Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

Giải

Gọi số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai mà phân xưởng cần sản xuất trong một ngày lần lượt là x, y ($x, y > 0$, $x, y \in \mathbb{Z}$).

Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai là: $\frac{1}{60}$ (giờ).

Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất là: $2\,.\,\frac{1}{60}=\frac{1}{30}$ (giờ).

Thời gian để làm ra x chiếc mũ kiểu thứ nhất và y chiếc mũ kiểu thứ hai là:

$$\frac{1}{30}\,.\,x+\frac{1}{60}\,.\,y=\frac{2x+y}{60} \text{ (giờ).}$$

Theo giả thiết, x và y phải thoả mãn các điều kiện: $0 \le x \le 200$, $0 \le y \le 240$;

$\frac{2x+y}{60} \le 8$ hay $2x+y \le 480$.

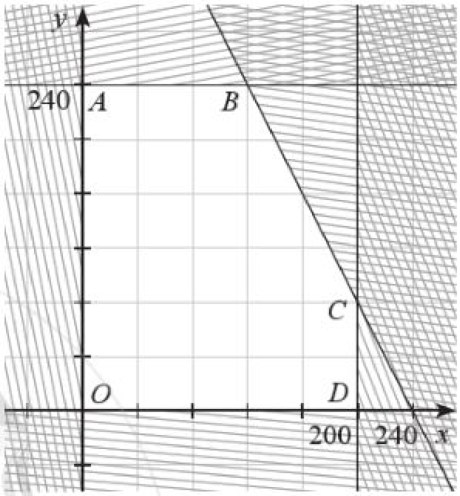
Tổng số tiền lãi thu được khi bán x chiếc mũ kiểu thứ nhất và y chiếc mũ kiểu thứ hai là: $T = 24x + 15y$ (nghìn đồng).

Bài toán đưa về: Tìm các số nguyên x, y là nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 200 \\ 0 \le y \le 240 \\ 2x + y \le 480 \end{cases} \quad \text{(II)}$$ sao cho $T = 24x + 15y$ đạt giá trị lớn nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền ngũ giác $OABCD$ với $O(0 ; 0)$, $A(0 ; 240)$, $B(120 ; 240)$, $C(200 ; 80)$, $D(200 ; 0)$ (*Hình 8*).



Hình 8

Ta có biểu thức $T = 24x + 15y$ có giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác $OABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = 24x + 15y$ tại cặp số $(x ; y)$ là toạ độ các đỉnh của ngũ giác $OABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị lớn nhất bằng 6 480 khi $x = 120$, $y = 240$ ứng với toạ độ đỉnh B.

Vậy để thu được tiền lãi là cao nhất thì trong một ngày, phân xưởng cần sản xuất 120 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Khi đó tiền lãi thu được là 6 480 nghìn đồng hay 6 480 000 đồng.

C. BÀI TẬP

10. Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ -x + y < 3? \end{cases}$

A. $(1 ; 0)$. **B.** $(-1 ; 0)$. **C.** $(-2 ; 3)$. **D.** $(0 ; -1)$.

11. Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \le 2 \\ 2x - 3y > -2? \end{cases}$

A. $(0 ; 0)$. **B.** $(1 ; 1)$. **C.** $(-1 ; 1)$. **D.** $(-1 ; -1)$.

12. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 5y > 1 \\ 2x + y > -5 \\ x + y < -1 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm có toạ độ:

A. $(0 ; 0)$. **B.** $(1 ; 0)$. **C.** $(0 ; 2)$. **D.** $(0 ; -2)$.

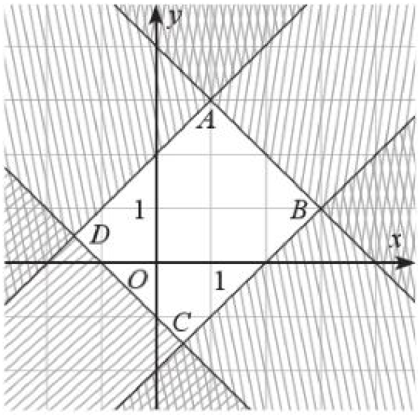
13. Miền đa giác *ABCD* ở *Hình 9* là miền nghiệm của hệ bất phương trình:

A. $\begin{cases} x+y\le 4 \\ x+y\ge -1 \\ x-y\le 2 \\ x-y\ge -2. \end{cases}$

B. $\begin{cases} x-y\le 4 \\ x-y\ge -1 \\ x+y\le 2 \\ x+y\ge -2. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x+y\le 1 \\ x+y\ge -4 \\ x-y\le 2 \\ x-y\ge -2. \end{cases}$

D. $\begin{cases} x-y\le 1 \\ x-y\ge -4 \\ x+y\le 2 \\ x+y\ge -2. \end{cases}$



Hình 9

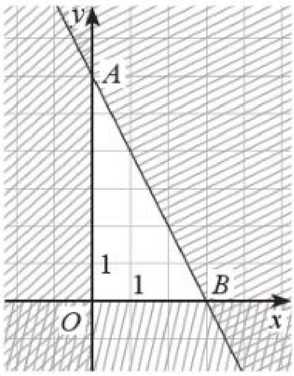
14. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = -x + y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -2x+y\le 2 \\ -x+2y\ge 4 \\ x+y\le 5 \end{cases}$ là:

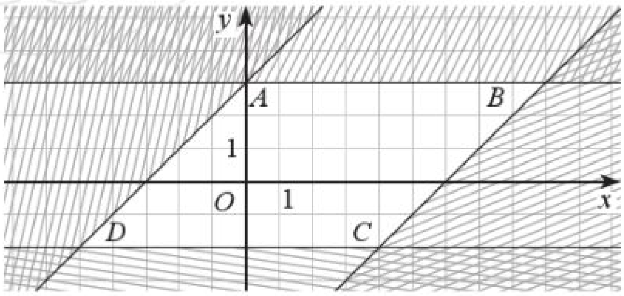
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

15. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} x-2y\le 3 \\ x+y\ge -3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\le 5 \\ x-2y\le 2 \\ x\ge -1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x+2y<6 \\ x-2y\ge -2 \\ 2x+y<4. \end{cases}$

16. Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn có miền nghiệm là miền đa giác không bị gạch ở mỗi *Hình 10a, 10b*.

a)


b)


Hình 10

17. a) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} x+y\le 5 \\ 3x+2y\le 12 \\ x\ge 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$ (III)

b) Tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình (III) sao cho $F = 3x + 7y$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

18. Anh Trung có kế hoạch đầu tư 400 triệu đồng vào hai khoản X và Y. Để đạt được lợi nhuận thì khoản X phải đầu tư ít nhất 100 triệu đồng và số tiền đầu tư cho khoản Y không nhỏ hơn số tiền cho khoản X. Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để mô tả hai khoản đầu tư đó và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình vừa tìm được.

19. Một phân xưởng may áo vest và quần âu để chuẩn bị cho dịp cuối năm. Biết may 1 áo vest hết 2 m vải và cần 20 giờ; 1 quần âu hết 1,5 m vải và cần 5 giờ. Xí nghiệp được giao sử dụng không quá 900 m vải và số giờ công không vượt quá 6 000 giờ. Theo khảo sát thị trường, số lượng quần bán ra không nhỏ hơn số lượng áo và không vượt quá 2 lần số lượng áo. Khi xuất ra thị trường, 1 chiếc áo lãi 350 nghìn đồng, 1 chiếc quần lãi 100 nghìn đồng. Phân xưởng cần may bao nhiêu áo vest và quần âu để thu được tiền lãi cao nhất (biết thị trường tiêu thụ luôn đón nhận sản phẩm của xí nghiệp)?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

20. Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của bất phương trình $x - 2y \geq 5$?

A. $(3 ; -1)$. **B.** $(-1 ; 4)$. **C.** $(2 ; -3)$. **D.** $(1 ; -2)$.

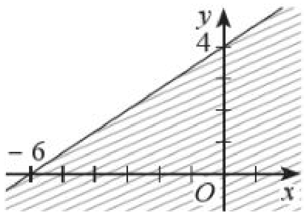
21. Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y > 4 \\ 2x + y > 6 \end{cases}$?

A. $(2 ; -1)$. **B.** $(7 ; 1)$. **C.** $(5 ; -1)$. **D.** $(6 ; -2)$.

22. Phần không bị gạch (kể cả *d*) ở *Hình 11* là miền nghiệm của bất phương trình:

A. $2x - 3y \leq -12$. **B.** $2x - 3y \geq -12$.

C. $3x - 2y \leq 12$. **D.** $3x - 2y \geq 12$.

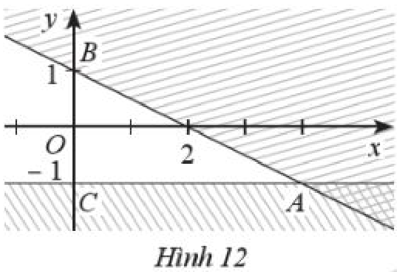


Hình 11

23. Phần không bị gạch (kể cả tia AB, AC) ở *Hình 12* là miền nghiệm của hệ bất phương trình:

A. $\begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ y \geq -1. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x + 2y \leq 2 \\ y \geq -1. \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x + y < 2 \\ y > -1. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} 2x + y > 2 \\ y > -1. \end{cases}$



Hình 12

24. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = -2x + y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y \geq -2 \\ x + y \leq 4 \\ x - 5y \leq -2 \end{cases}$ là:

A. -5. **B.** -7. **C.** 1. **D.** 4.

25. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $3x > 2$; b) $2y \leq -5$; c) $2x - y \geq 1$; d) $3x - 2y < 5$.

26. Biểu diễn miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x - 3y < 0 \\ x + 2y > -3 \\ x + y < 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y \leq 3 \\ 3x + 2y \geq 9 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y \leq 2 \\ x + 2y \geq -2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x - 2y \geq -2. \end{cases}$

27. a) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x - y \leq 9 \\ 3x + 6y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$ (I)

b) Tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $F = 3x + 4y$ đạt giá trị lớn nhất.

28. Một trận bóng đá được tổ chức tại một sân vận động có sức chứa 40 000 người, ban tổ chức phát hành hai loại vé là 400 000 đồng và 200 000 đồng. Do điều kiện sân đấu nên số lượng vé có giá 400 000 không lớn hơn số lượng vé có giá 200 000 đồng. Để an toàn phòng dịch, liên đoàn bóng đá yêu cầu số lượng vé phát hành không được quá 30% sức chứa của sân. Để tổ chức được trận đấu thì số tiền thu được qua bán vé không được ít hơn 3 tỉ đồng. Gọi x, y lần lượt là số vé giá 400 000 đồng và 200 000 đồng được bán ra.

a) Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn số vé mỗi loại được bán ra đảm bảo mục đích của ban tổ chức.

b) Chỉ ra hai nghiệm của hệ bất phương trình đó.

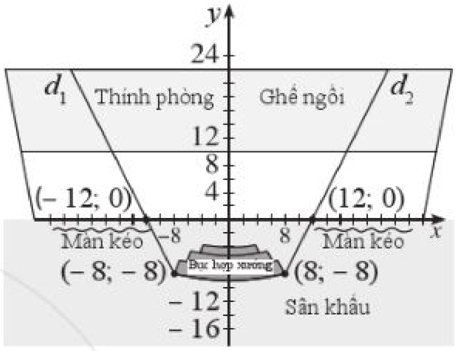
29. Một xưởng sản xuất bàn và ghế. Một chiếc bàn cần 1,5 giờ lắp ráp và 1 giờ hoàn thiện; một chiếc ghế cần 1 giờ lắp ráp và 2 giờ hoàn thiện. Bộ phận lắp ráp có 3 nhân công, bộ phận hoàn thiện có 4 nhân công. Biết thị trường luôn tiêu thụ hết sản phẩm của xưởng và lượng ghế tiêu thụ không vượt quá 3,5 lần số bàn.

a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng bàn và ghế mà trong một ngày phân xưởng có thể sản xuất, biết một nhân công làm việc không quá 8 tiếng mỗi ngày.

b) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

c) Biết một chiếc bàn lãi 600 nghìn đồng, một chiếc ghế lãi 450 nghìn đồng. Hỏi trong một ngày, xưởng cần sản xuất bao nhiêu chiếc bàn, bao nhiêu chiếc ghế để thu được tiền lãi cao nhất?

30. *Hình 13* mô tả sơ đồ một sân khấu gắn với hệ trục toạ độ Oxy (đơn vị trên các trục toạ độ là 1 mét). Phần thính phòng giới hạn bởi hai đường thẳng d_1, d_2 là vị trí ngồi của khán giả có thể nhìn thấy dàn hợp xướng. Gọi $(x ; y)$ là toạ độ ngồi của khán giả ở thính phòng. Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà khán giả có thể nhìn thấy dàn hợp xướng.



Hình 13

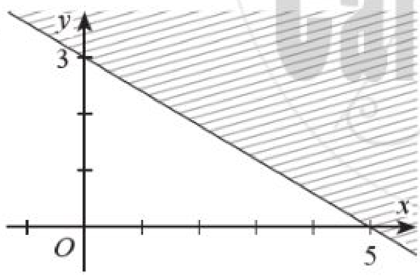
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

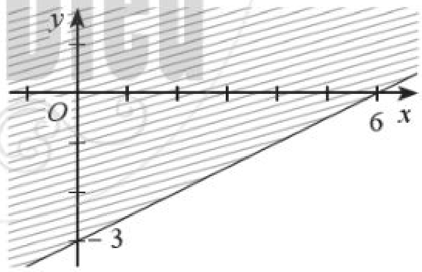
1. C. 2. A. 3. B. 4. D. 5. A.

6. $(-2 ; 1)$.

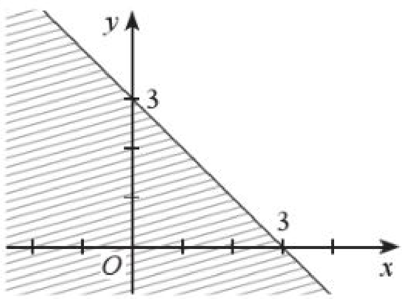
7. a)



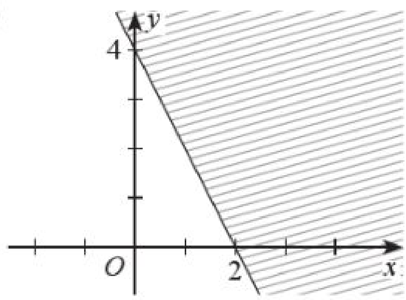
b)



c)



d)



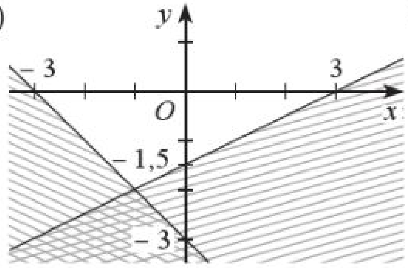
8. a) $y > 2$. b) $x < 1$. c) $x + 2y > -2$.

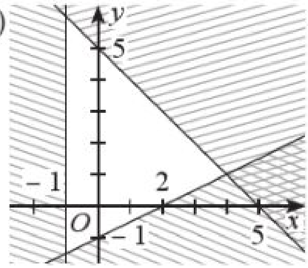
9. a) $5x + 10y \leq 45$ hay $x + 2y \leq 9$. b) $(4 ; 2)$.

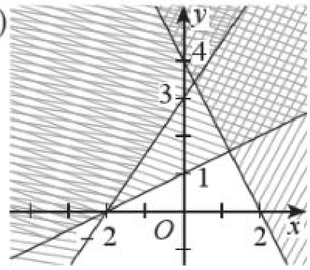
§2 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

10. B. 11. C. 12. D. 13. A. 14. B.

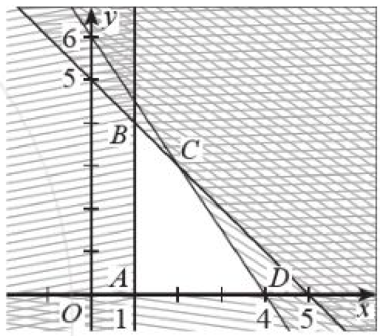
15. Ở mỗi ý, miền nghiệm là phần không bị gạch.

a) 

b) 

c) 

16. a) $\begin{cases} 2x + y \le 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y \ge -3 \\ x - y \le 6 \\ y \ge -2 \\ y \le 3. \end{cases}$



Hình 14

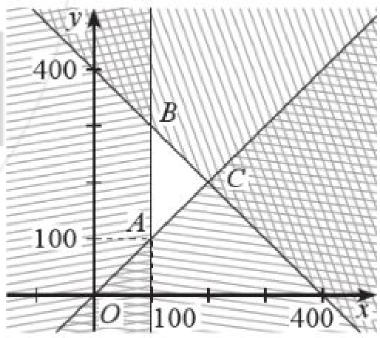
17. a) Miền nghiệm của hệ bất phương trình (III) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(1\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 4)$, $C(2\ ;\ 3)$, $D(4\ ;\ 0)$ (*Hình 14*).

b) F đạt giá trị lớn nhất bằng 31 tại $x = 1$, $y = 4$.
F đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3 tại $x = 1$, $y = 0$.

18. Gọi x, y lần lượt là số tiền anh Trung đầu tư cho hai khoản X và Y (đơn vị: triệu đồng).

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + y \le 400 \\ x \ge 100 \\ y \ge x. \end{cases}$

Miền nghiệm của hệ là miền tam giác ABC với $A(100\ ;\ 100)$, $B(100\ ;\ 300)$, $C(200\ ;\ 200)$ (*Hình 15*).



Hình 15

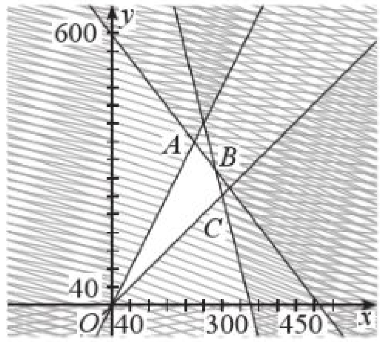
19. Gọi x, y lần lượt là số áo vest và quần âu phân xưởng cần may ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $x, y \in \mathbb{Z}$). Tiền lãi thu được $T = 350x + 100y$ (nghìn đồng).

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x + 1,5y \le 900 \\ 20x + 5y \le 6\ 000 \\ x \le y \le 2x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác $OABC$ với $O(0\ ;\ 0)$, $A(180\ ;\ 360)$, $B(225\ ;\ 300)$, $C(240\ ;\ 240)$ (*Hình 16*).

Ta được T đạt giá trị lớn nhất khi $x = 225$, $y = 300$ ứng với toạ độ đỉnh B.

Vậy để thu được tiền lãi cao nhất thì phân xưởng cần may 225 chiếc áo vest và 300 quần âu.



Hình 16

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

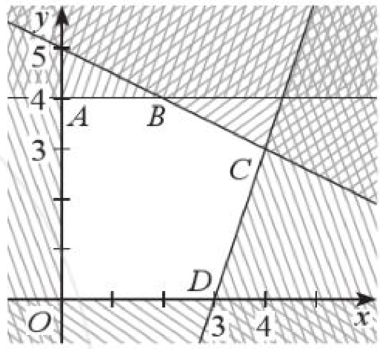
20. B. 21. A. 22. A. 23. B. 24. A.

25. Học sinh tự làm.

26. Học sinh tự làm.

27. a) Miền nghiệm là ngũ giác $OABCD$ (*Hình 17*).

b) F đạt giá trị lớn nhất bằng 24 tại $x = 4$, $y = 3$.

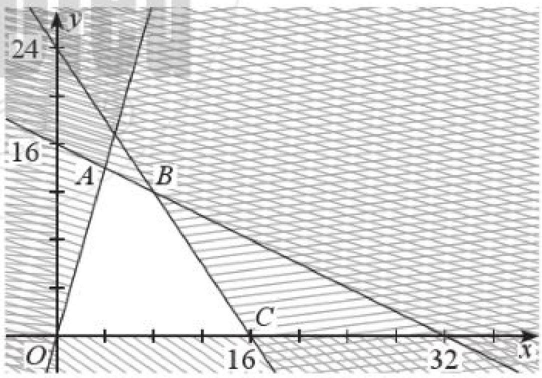


Hình 17

28. a) $\begin{cases} x + y \leq 12\,000 \\ 2x + y \geq 15\,000 \\ x - y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$ b) $(5\,000\ ;\ 6\,000)$, $(3\,000\ ;\ 9\,000)$.

29. a) Gọi x, y lần lượt là số bàn, số ghế mà xưởng sản xuất trong một ngày ($x \geq 0; y \geq 0; x, y \in \mathbb{Z}$). Ta có hệ:

$$\begin{cases} 1,5x + y \leq 24 \\ x + 2y \leq 32 \\ 3,5x - y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$



Hình 18

b) Miền nghiệm của hệ là tứ giác $OABC$ (*Hình 18*).

c) Để thu được tiền lãi cao nhất thì một ngày, xưởng sản xuất 8 chiếc bàn và 12 chiếc ghế. Khi đó tiền lãi mỗi ngày là 10 200 000 đồng.

30. $\begin{cases} 2x - y < 24 \\ 2x + y > -24 \\ 10 \leq y \leq 22. \end{cases}$

Chương III HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

§1 HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập hợp D ($D \subset \mathbb{R}$, D khác $\varnothing$) có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một *hàm số*.

2. Tập xác định

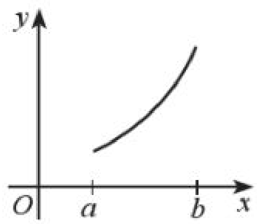
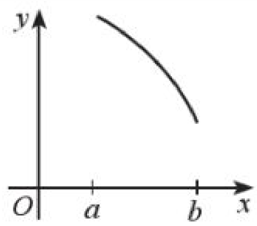
Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3. Tập giá trị

Tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các giá trị y tương ứng với biến số x thay đổi trong tập xác định D.

4. Đồ thị và sự biến thiên

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D là tập hợp tất cả các điểm $M(x ; f(x))$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy với mọi x thuộc D.

<table>
<tr><th></th><th>Định nghĩa</th><th>Bảng biến thiên</th><th>Đồ thị minh hoạ</th></tr>
<tr><td>Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a ; b)$</td><td>$\forall x_1, x_2 \in (a ; b)$,
$x_1 < x_2$
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.</td><td><table><tr><td>x</td><td>a b</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a ; b)$</td><td>$\forall x_1, x_2 \in (a ; b)$,
$x_1 < x_2$
$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.</td><td><table><tr><td>x</td><td>a b</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\searrow$</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định hàm số

Phương pháp: Vận dụng định nghĩa

Ví dụ 1 Theo Quyết định số 648/QĐ-BCT ngày 20/3/2019 của Bộ Công Thương, giá bán lẻ điện sinh hoạt từ ngày 20/3/2019 sẽ dao động trong khoảng từ 1 678 đồng đến 2 927 đồng mỗi kWh tuỳ bậc thang. Dưới đây là bảng giá bán lẻ điện sinh hoạt (chưa bao gồm thuế VAT):

Mức sử dụng điện trong tháng (kWh)	Đơn giá (đồng/kWh)
– Bậc 1: Cho kWh từ 0 – 50	1 678
– Bậc 2: Cho kWh từ 51 – 100	1 734
– Bậc 3: Cho kWh từ 101 – 200	2 014
– Bậc 4: Cho kWh từ 201 – 300	2 536
– Bậc 5: Cho kWh từ 301 – 400	2 834
– Bậc 6: Cho kWh từ 401 – 500	2 927

a) Số tiền phải trả y (đồng) (chưa bao gồm thuế VAT) có phải là hàm số của số điện tiêu thụ x (kWh) không? Giải thích. Nếu đúng, hãy xác định những công thức tính hàm số y theo biến x.

b) Mức sử dụng điện trong tháng có phải là hàm số của đơn giá tiền điện (chưa bao gồm thuế VAT) không? Giải thích.

c) Tính số tiền mà gia đình bạn Dương phải trả khi tiêu thụ hết 350 kWh trong một tháng. Biết thuế VAT là 10%.

Giải

a) Với mỗi số điện tiêu thụ x (kWh) chỉ có một giá trị tương ứng của số tiền phải trả y (đồng) nên số tiền phải trả y (đồng) (chưa bao gồm thuế VAT) là hàm số của số điện tiêu thụ x (kWh).

+ Nếu $0 \leq x \leq 50$ thì $y = 1\,678x$.

+ Nếu $51 \leq x \leq 100$ thì $y = 1\,678 \,.\, 50 + 1\,734(x - 50) = 1\,734x - 2\,800$.

+ Nếu $101 \leq x \leq 200$ thì

$y = 1\,678 \,.\, 50 + 1\,734 \,.\, 50 + 2\,014(x - 100) = 2\,014x - 30\,800$.

+ Nếu $201 \leq x \leq 300$ thì

$y = 1\,678 \,.\, 50 + 1\,734 \,.\, 50 + 2\,014 \,.\, 100 + 2\,536(x - 200) = 2\,536x - 135\,200$.

+ Nếu $301 \leq x \leq 400$ thì

$y = 1\,678 \,.\, 50 + 1\,734 \,.\, 50 + 2\,014 \,.\, 100 + 2\,536 \,.\, 100 + 2\,834(x - 300)$

$= 2\,834x - 224\,600$.

+ Nếu $401 \le x \le 500$ thì

$$y = 1\,678\,.\,50 + 1\,734\,.\,50 + 2\,014\,.\,100 + 2\,536\,.\,100 + 2\,834\,.\,100 + 2\,927(x-400)$$
$$= 2\,927x - 261\,800.$$

Suy ra ta có:

$$y = \begin{cases} 1\,678x & \text{nếu } 0 \le x \le 50 \\ 1\,734x - 2\,800 & \text{nếu } 51 \le x \le 100 \\ 2\,014x - 30\,800 & \text{nếu } 101 \le x \le 200 \\ 2\,536x - 135\,200 & \text{nếu } 201 \le x \le 300 \\ 2\,834x - 224\,600 & \text{nếu } 301 \le x \le 400 \\ 2\,927x - 261\,800 & \text{nếu } 401 \le x \le 500. \end{cases}$$

b) Mức sử dụng điện trong tháng không phải là hàm số của đơn giá tiền điện (chưa bao gồm thuế VAT) vì có hai giá trị của mức sử dụng điện trong tháng là 48 kWh, 49 kWh tương ứng với đơn giá tiền điện (chưa bao gồm thuế VAT) là 1 678 đồng.

c) Số tiền mà gia đình bạn Dương phải trả khi tiêu thụ hết 350 kWh (bao gồm cả thuế VAT) là: $(2\,834\,.\,350 - 224\,600)\,.\,110\% = 844\,030$ (đồng).

Vấn đề 2. Tìm tập xác định của hàm số

Phương pháp: Vận dụng một số điều kiện xác định của biểu thức:

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ xác định khi $g(x) \ne 0$; $\sqrt{f(x)}$ xác định khi $f(x) \ge 0$;

$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$, $\sqrt{f(x)}\,.\,\sqrt{g(x)}$ xác định khi $f(x) \ge 0$ và $g(x) \ge 0$;

$\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$ xác định khi $g(x) \ne 0$ và $\dfrac{f(x)}{g(x)} \ge 0$.

Ví dụ 2 Cho hàm số $H(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x < 0 \\ 1 \text{ nếu } x \ge 0. \end{cases}$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -1$; $x = 0$; $x = 2\,021$.

Giải

a) Biểu thức hàm số có nghĩa khi $x < 0$ và $x \ge 0$ nên tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) $H(-1) = 0$, $H(0) = 1$, $H(2\,021) = 1$.

Chú ý: Hàm số $H(x)$ (hàm Heaviside, còn gọi là hàm bước đơn vị, do Oliver Heaviside phát triển và sử dụng hàm số này như một công cụ trong việc phân tích các thông tin liên lạc điện báo, kí hiệu hàm này là **1**) là hàm số được ứng dụng trong tin học.

Ví dụ 3 Tìm tập xác định D của các hàm số sau đây:

a) $y=\dfrac{3x+1}{2x-5}$; b) $y=\sqrt{-1-2x}$; c) $y=\sqrt{6-2x}+\sqrt{3x-2}$.

Giải

a) Hàm số $y=\dfrac{3x+1}{2x-5}$ xác định khi $2x-5\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{5}{2}$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.

b) Hàm số $y=\sqrt{-1-2x}$ xác định khi $-1-2x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \dfrac{-1}{2}$. Vậy $D=\left(-\infty\,;\dfrac{-1}{2}\right]$.

c) Hàm số $y=\sqrt{6-2x}+\sqrt{3x-2}$ xác định khi $\begin{cases}6-2x\geq 0\\3x-2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 3\\x\geq \dfrac{2}{3}\end{cases}$.

Vậy $D=\left[\dfrac{2}{3}\,;3\right]$.

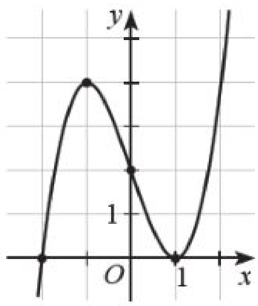
Vấn đề 3. Đồ thị của hàm số

Phương pháp: Vận dụng: Điểm $M(a\,;b)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$ khi và chỉ khi $b=f(a)$.

Ví dụ 4 Quan sát đồ thị hàm số $y=f(x)$ ở *Hình 1*.

a) Chỉ ra toạ độ giao điểm của đồ thị với trục hoành và trục tung.

b) Điểm có toạ độ $(-1\,;4)$ và $(2\,;3)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?



Hình 1

Giải

a) Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm có toạ độ $(-2\,;0)$ và $(1\,;0)$; giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm có toạ độ $(0\,;2)$.

b) Điểm có toạ độ $(-1\,;4)$ thuộc đồ thị hàm số và điểm có toạ độ $(2\,;3)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Ví dụ 5 Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{2x-1}$.

a) Điểm nào trong các điểm sau thuộc đồ thị hàm số trên:

$A(-1\,;0)$; $B(1\,;0)$; $C(5\,;3)$?

b) Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số trên có hoành độ bằng 2 022.

c) Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số trên có tung độ bằng 2.

d) Đồ thị hàm số trên có cắt trục tung, trục hoành không? Nếu có, hãy xác định toạ độ giao điểm.

Giải

a) $A(-1\ ;\ 0)$ không thuộc đồ thị hàm số vì với $x = -1$ thì giá trị của $y = \sqrt{2x-1}$ không tồn tại.

$B(1\ ;\ 0)$ không thuộc đồ thị hàm số vì với $x = 1$ thì $y = \sqrt{2\,.\,1-1} = 1 \neq 0$.

$C(5\ ;\ 3)$ thuộc đồ thị hàm số vì với $x = 5$ thì $y = \sqrt{2\,.\,5-1} = 3$.

b) Với $x = 2\ 022$ thì $y = \sqrt{2\,.\,2\ 022-1} = \sqrt{4\ 043}$.

Vậy điểm có toạ độ $(2\ 022\ ;\ \sqrt{4\ 043})$ thuộc đồ thị hàm số.

c) Với $y = 2$ thì ta có: $2x - 1 = 4$ hay $x = \dfrac{5}{2}$. Vậy điểm có toạ độ $\left(\dfrac{5}{2}\ ;\ 2\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

d) Với $x = 0$ thì hàm số không xác định nên đồ thị hàm số không cắt trục tung.

Với $y = 0$ thì ta có: $2x - 1 = 0$ hay $x = \dfrac{1}{2}$. Vậy giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành có toạ độ là $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

Ví dụ 6 Cho hàm số $H(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x < 0 \\ 1 \text{ nếu } x \geq 0. \end{cases}$

a) Điểm nào trong các điểm sau thuộc đồ thị hàm số trên:

$A(0\ ;\ 0)$; $B(-1\ ;\ 0)$; $C(2\ 021\ ;\ 0)$; $D(2\ 022\ ;\ 1)$.

b) Chỉ ra hai điểm thuộc đồ thị hàm số trên có tung độ bằng 1.

c) Chỉ ra điểm thuộc đồ thị có hoành độ bằng $-2\ 022$.

Giải

a) Các điểm $B(-1\ ;\ 0)$; $D(2\ 022\ ;\ 1)$ thuộc đồ thị hàm số.

b) Với $y = 1$ thì ta chọn $x = 2 > 0$ và $x = 3 > 0$.

Khi đó ta có hai điểm có toạ độ là $(2\ ;\ 1)$ và $(3\ ;\ 1)$ thuộc đồ thị hàm số.

c) Với $x = -2\ 022 < 0$ thì $y = 0$. Khi đó ta có điểm có toạ độ $(-2\ 022\ ;\ 0)$ thuộc đồ thị hàm số.

Vấn đề 4. Sự biến thiên hàm số

Phương pháp: Sử dụng khái niệm và bảng biến thiên mô tả sự đồng biến và nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 7 Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

a) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) So sánh $f(-2\ 021)$ và $f(-1)$; $f(1)$ và $f(\sqrt{3})$.

Giải

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0\ ;\ 2)$.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$ và $(2;+\infty)$.

b) Vì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$ nên với $-2\ 021 < -1$ ta có:

$$f(-2\ 021) > f(-1).$$

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0\ ;\ 2)$, nên với $1 < \sqrt{3}$ ta có: $f(1) < f(\sqrt{3})$.

Ví dụ 8 Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở *Hình 2*.

a) Chỉ ra khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số đã cho.

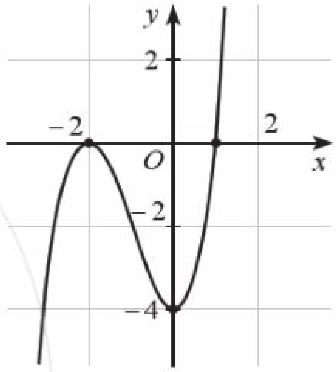
b) So sánh $f(-0{,}5)$ và $f(-0{,}25)$.

Giải

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -2)$ và $(0\ ;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2\ ;\ 0)$.

b) Vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2\ ;\ 0)$ nên với $-0{,}5 < -0{,}25$ ta có: $f(-0{,}5) > f(-0{,}25)$.



Hình 2

Vấn đề 5. Ứng dụng

Ví dụ 9 *Hình 3* cho biết bảng giá cước của một hãng taxi (đã bao gồm thuế VAT).

QUÃNG ĐƯỜNG x (km)	$0 < x \leq 0{,}7$	$0{,}7 < x \leq 30$	$x > 30$
GIÁ CƯỚC	10 500 đồng	14 800 đồng/1 km	12 200 đồng/1 km

Hình 3

a) Nếu gọi y (đồng) là số tiền phải trả thì y có phải là hàm số của quãng đường x (km) không? Nếu phải, hãy xác định công thức tính y.

b) Quãng đường x (km) có phải là hàm số của số tiền phải trả y (đồng) không? Giải thích.

c) Tính số tiền phải trả khi đi taxi hãng trên với quãng đường 15 km; 40 km.

Giải

a) Với mỗi x (km) quãng đường đi taxi chỉ có một giá trị tương ứng của số tiền phải trả y (đồng) nên y là hàm số của x.

$$y = \begin{cases} 10\ 500 & \text{nếu} \quad 0 < x \leq 0{,}7 \\ 10\ 500 + 14\ 800(x - 0{,}7) & \text{nếu} \quad 0{,}7 < x \leq 30 \\ 10\ 500 + 14\ 800(30 - 0{,}7) + 12\ 200(x - 30) & \text{nếu} \quad x > 30 \end{cases}$$

$$\text{hay } y = \begin{cases} 10\,500 & \text{nếu } 0 < x \le 0,7 \\ 14\,800x + 140 & \text{nếu } 0,7 < x \le 30 \\ 12\,200x + 78\,140 & \text{nếu } x > 30. \end{cases}$$

b) Số chỉ quãng đường x không phải là hàm số của số tiền phải trả y vì có 2 giá trị của số chỉ quãng đường là 0,3 km và 0,4 km đều tương ứng với số tiền 10 500 đồng.

c) Với $x = 15$ thì $y = 14\,800 \,.\, 15 + 140 = 222\,140$. Số tiền phải trả khi đi taxi với quãng đường 15 km là 222 140 đồng.

Với $x = 40$ thì $y = 12\,200 \,.\, 40 + 78\,140 = 566\,140$. Số tiền phải trả khi đi taxi với quãng đường 40 km là 566 140 đồng.

C. BÀI TẬP

1. Trong các công thức sau, công thức nào **không** biểu diễn y là hàm số của x?

A. $x + 2y = 3$. **B.** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. **C.** $y = \dfrac{1}{x}$. **D.** $x^2 + y^2 = 4$

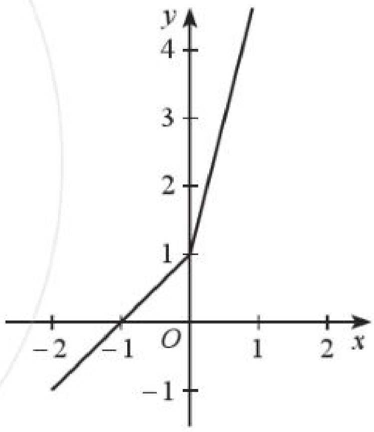
2. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở *Hình 4*. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

B. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng – 1.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1\,;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty\,;-1)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Hình 4

3. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 4x - 1$; b) $y = \sqrt{5 - 6x}$; c) $y = \dfrac{4}{3x+1}$;

d) $y = \dfrac{1}{2x-1} - \sqrt{3-x}$; e) $y = \dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}$; g) $y = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 5x + 1 & \text{nếu } x < -1. \end{cases}$

4. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

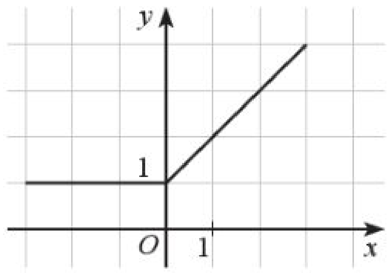
b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -2$; $x = 0$; $x = 2\,021$.

5. Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở *Hình 5*.

a) Trong các điểm có toạ độ (1 ; 2), (0 ; 0), (2 ; 3), điểm nào thuộc đồ thị hàm số, điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Xác định $f(0)$; $f(3)$.

c) Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng 1.



Hình 5

6. Cho bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

a) Tìm khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) So sánh $f(-2\,021)$ và $f(-1)$; $f(\sqrt{3})$ và $f(2)$.

7. Cho hàm số $y = \dfrac{-2}{x}$. Chứng tỏ hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$.

8. Một nhân viên bán hàng sẽ nhận được một mức lương cơ bản là 5 triệu đồng mỗi tháng và một khoản hoa hồng là 5% nếu tổng doanh số trên 10 triệu đồng trong tháng. Ngoài ra, nếu doanh số bán hàng hàng tháng là 20 triệu đồng hoặc nhiều hơn thì nhân viên bán hàng nhận được thêm tiền thưởng là 500 nghìn đồng.

a) Hãy biểu diễn thu nhập hàng tháng của nhân viên đó bằng một hàm số theo doanh số bán hàng.

b) Nếu doanh số trong 1 tháng của nhân viên đó là 30 triệu đồng thì nhân viên đó sẽ nhận được bao nhiêu tiền lương?

§2 HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và a khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

2. Đồ thị hàm số bậc hai

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm với toạ độ $\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Nhận xét: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta có: $-\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định công thức hàm số bậc hai

Phương pháp: Sử dụng kiến thức đã nêu và điểm $M(x_0\,;\,y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nếu $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

Ví dụ 1 Một công ty sản xuất một sản phẩm bán cho các đại lí bán lẻ trên toàn quốc. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán $p(x) = 948 - 40x$ (trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán lẻ mỗi sản phẩm mà tại giá bán này x sản phẩm được bán). Tìm hàm doanh thu.

Giải

Hàm doanh thu $R(x) = xp(x) = -40x^2 + 948x$.

Ví dụ 2 Xác định parabol có đỉnh $I(1\,;\,2)$ và đi qua điểm $M(0\,;\,3)$.

Giải

Gọi hàm số bậc hai có parabol thoả mãn đề bài là $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Parabol đi qua $M(0\,;\,3)$ nên ta có: $0^2a + 0b + c = 3$. Do đó, $c = 3$.

Parabol có đỉnh $I(1\,;\,2)$ nên ta có: $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ a + b + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases}$

Vậy parabol cần tìm là $y = x^2 - 2x + 3$.

Chú ý: Giả thiết parabol có đỉnh $I(1\,;\,2)$ trong bài tập có thể thay bằng một số cách phát biểu sau đây:

+ Parabol có trục đối xứng $x = 1$ và đi qua điểm $I(1\,;\,2)$.

+ Parabol có trục đối xứng $x = 1$ và tung độ của điểm thấp nhất bằng 2.

+ Parabol đi qua điểm $I(1\,;\,2)$ và tung độ của điểm thấp nhất bằng 2.

+ Parabol có trục đối xứng $x = 1$ và có tung độ đỉnh là 2.

Vấn đề 2. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

Phương pháp: Áp dụng bảng biến thiên của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$:

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

Ví dụ 3 Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 + 4x - 2$.

a) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

b) Xác định khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số trên.

Giải

a) Ta có: $a = 2 > 0$, $b = 4$, $-\dfrac{b}{2a} = -1$. Vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ở *Hình 6*.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

Hình 6

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1\ ;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;-1)$.

Vấn đề 3. Đồ thị hàm số bậc hai (parabol)

Phương pháp: Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, cần xác định toạ độ đỉnh: $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$; vẽ trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$; xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có toạ độ $(0\ ;c)$) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có toạ độ $(0\ ;c)$ qua trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Chú ý: Nếu $a > 0$ thì parabol có bề lõm quay lên trên, nếu $a < 0$ thì parabol có bề lõm quay xuống dưới.

Ví dụ 4 Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 5$.

Giải

Ta có: $a = 1 > 0$, $b = -4$, $-\dfrac{b}{2a} = 2$.

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ ở *Hình 7*.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Hình 7

– Toạ độ đỉnh $I(2\ ;\ 1)$.

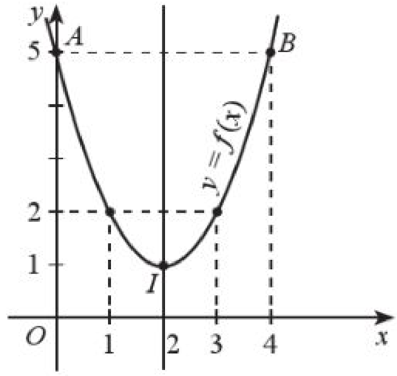
– Trục đối xứng $x = 2$.

– Giao điểm của parabol với trục tung là $A(0\ ;\ 5)$.

– Điểm đối xứng với điểm A qua trục đối xứng $x = 2$ là $B(4\ ;\ 5)$.

– Điểm có toạ độ $(1\ ;\ 2)$ và $(3\ ;\ 2)$ thuộc parabol.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ được vẽ ở *Hình 8*.



Hình 8

Ví dụ 5 Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị ở *Hình 9*. Xác định dấu của a, b và c.

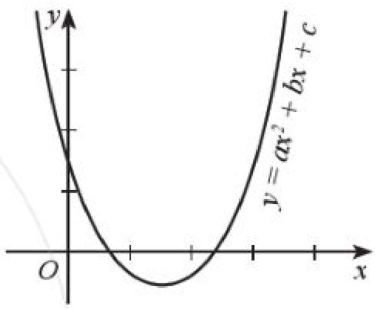
Giải

Parabol hướng bề lõm lên trên nên $a > 0$.

Parabol cắt trục tung tại điểm $(0\ ;\ c)$ nằm phía trên trục hoành nên $c > 0$.

Đỉnh nằm bên phải trục tung nên hoành độ đỉnh dương hay $\dfrac{-b}{2a} > 0$. Do $a > 0$ nên $b < 0$.

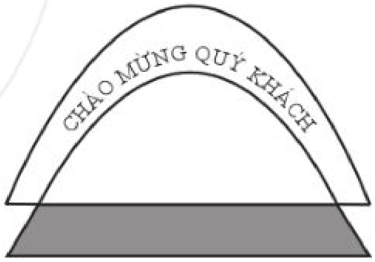
Vậy $a > 0$, $b < 0$ và $c > 0$.



Hình 9

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 6 Tại một buổi khai trương, người ta làm một cổng chào có đường viền trong của mặt cắt là đường parabol. Người ta đo khoảng cách giữa hai chân cổng là 4,5 m. Từ một điểm trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất (điểm H) là 1,8 m và khoảng cách từ điểm H tới chân cổng gần nhất là 1 m. Hãy tính chiều cao của cổng chào đó (tính theo đường viền trong) theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

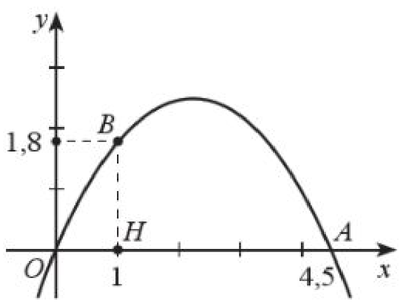


Giải

Chọn hệ trục toạ độ sao cho gốc toạ độ O trùng một chân của cổng, trục hoành nằm trên đường nối hai chân cổng (đơn vị trên các trục tính theo mét) (*Hình 10*).

Gọi hàm số bậc hai có đồ thị chứa đường viền trong của cổng chào trên là $y = ax^2 + bx + c$.

Từ giả thiết bài toán ta có đồ thị hàm số đi qua các điểm $O(0\ ;\ 0)$, $A(4{,}5\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 1{,}8)$.



Hình 10

Thay toạ độ các điểm trên vào hàm số, ta được $c = 0$ và hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4,5^2 a + 4,5b = 0 \\ 1^2 a + 1b = 1,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-18}{35} \\ b = \dfrac{81}{35}. \end{cases}$$ Suy ra ta có hàm số: $y = \dfrac{-18}{35}x^2 + \dfrac{81}{35}x.$

Từ đó, đỉnh của đồ thị hàm số trên có tung độ là $\dfrac{-18}{35} \cdot \left(\dfrac{9}{4}\right)^2 + \dfrac{81}{35} \cdot \dfrac{9}{4} \approx 2,6.$

Vậy chiều cao của cổng là khoảng 2,6 m.

C. BÀI TẬP

9. Trong các hàm số sau, hàm số nào **không** là hàm số bậc hai?

A. $y = -x^2 + 4x + 2.$ **B.** $y = x(2x^2 + 5x - 1).$

C. $y = -3x(6x - 8).$ **D.** $y = x^2 + 6x.$

10. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + 8x + 8$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -4)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; -2)$, nghịch biến trên khoảng $(-2 ; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; -4)$, nghịch biến trên khoảng $(-4 ; +\infty)$.

11. Xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2, hệ số của x và hệ số tự do của các hàm số bậc hai sau:

a) $f(x) = x^2 - x - 9$; b) $f(x) = x^2 - 7$; c) $f(x) = -2x^2 + 8x$.

12. Bố bạn Lan gửi 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất x%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập với vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Tính số tiền cả vốn và lãi mà bố bạn Lan có được sau khi gửi tiết kiệm 2 tháng?

13. Xác định parabol $y = ax^2 - bx + 1$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua hai điểm $M(1 ; -2)$ và $N(-2 ; 19)$.

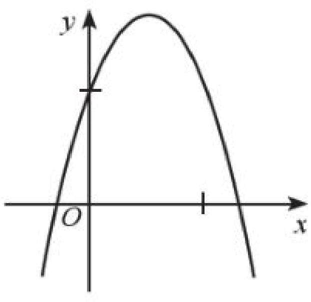
b) Có đỉnh là $I(-2 ; 37)$.

c) Có trục đối xứng là $x = -1$ và tung độ của đỉnh bằng 5.

14. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 - 4x + 2$; b) $y = -2x^2 - 2x - 1$.

15. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị ở *Hình 11*. Xác định dấu a, b, c.



Hình 11

16. Nêu khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 4x^2 + 6x - 5$; b) $y = -3x^2 + 10x - 4$.

17. Xác định hàm số bậc hai biết hệ số tự do $c = 2$ và bảng biến thiên tương ứng trong mỗi trường hợp sau:

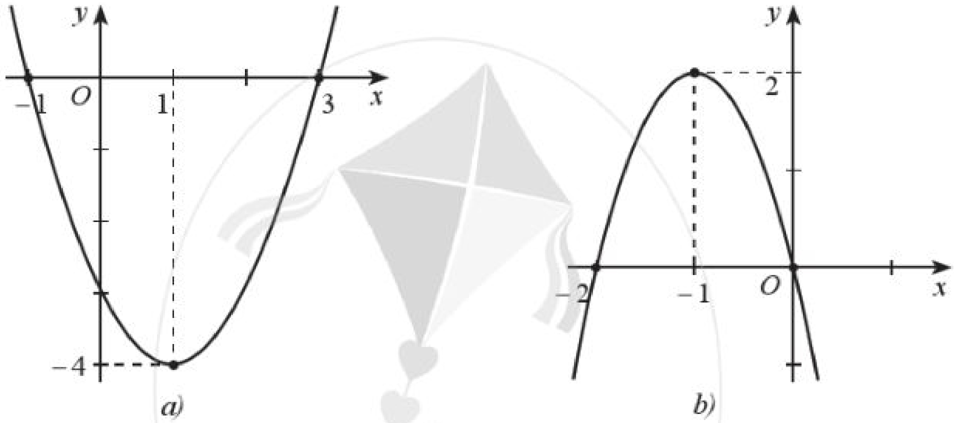
a)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

b)

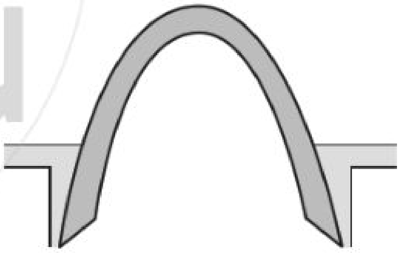
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

18. Xác định hàm số bậc hai biết đồ thị tương ứng trong mỗi *Hình 12a, 12b*:



Hình 12

19. Trong một công trình, người ta xây dựng một cổng ra vào hình parabol (minh hoạ ở *Hình 13*) sao cho khoảng cách giữa hai chân cổng BC là 9 m. Từ một điểm M trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $MK = 1,6$ m và khoảng cách từ K tới chân cổng gần nhất là $BK = 0,5$ m. Tính chiều cao của cổng theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 13

§3 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lí về dấu của tam thức bậc hai:

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Khi đó:

$f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty\,; x_1)$ và $(x_2\,; +\infty)$.

$f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1\,; x_2)$.

Nhận xét: Trong định lí, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$ với $b = 2b'$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xét dấu tam thức bậc hai

Phương pháp: Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai

Ví dụ 1 Lập bảng xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = x^2 - x - 2$; b) $f(x) = -3x^2 + x - 4$; c) $f(x) = 4x^2 + 12x + 9$.

Giải

a) $f(x) = x^2 - x - 2$ có hai nghiệm là $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = 1 > 0$.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $f(x) = -3x^2 + x - 4$ vô nghiệm và có hệ số $a = -3 < 0$.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

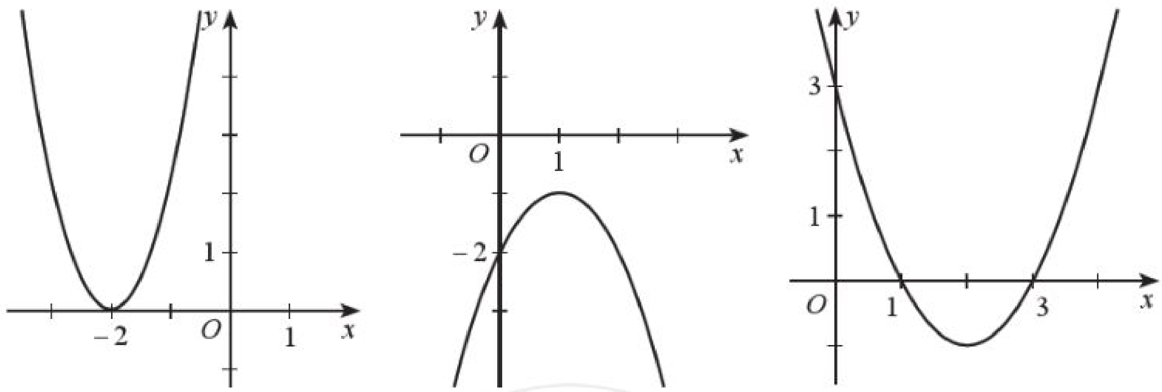
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

c) $f(x) = 4x^2 + 12x + 9$ có nghiệm kép $x_0 = \frac{-3}{2}$ và có hệ số $a = 4 > 0$.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Ví dụ 2 Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho ở mỗi *Hình 14a, 14b, 14c*.



a) *b)* *c)*

Hình 14

a) Từ đồ thị *Hình 14a* ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x = -2$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

b) Từ đồ thị *Hình 14b* ta có tam thức bậc hai $f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu của $f(x)$ là:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

c) Từ đồ thị *Hình 14c* ta có tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ví dụ 3 Tìm m để tam thức $f(x) = x^2 - 2x + m - 12$ nhận giá trị dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải

Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + m - 12$ có hệ số $a = 1 > 0$.

$f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - (m - 12) < 0 \Leftrightarrow m > 13$.

Vậy với $m > 13$ thì tam thức $f(x)$ nhận giá trị dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 4 Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=\sqrt{x^2-4x+3m-2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

Giải

Xét tam thức $f(x)=x^2-4x+3m-2$ có hệ số $a=1>0$.

Hàm số $y=\sqrt{x^2-4x+3m-2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi tam thức $f(x)$ nhận giá trị không âm với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi $\Delta'\leq 0 \Leftrightarrow 4-(3m-2)\leq 0 \Leftrightarrow m\geq 2$.

Vậy với $m\geq 2$ thì hàm số $y=\sqrt{x^2-4x+3m-2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 5 Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

20 khách đầu tiên có giá là 30 USD/người. Nếu có nhiều hơn 20 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 1 USD/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 21 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x.

b) Số người từ người thứ 21 trở lên của nhóm khách du lịch trong khoảng bao nhiêu thì công ty có lãi? Biết rằng chi phí của chuyến đi là 400 USD.

Giải

a) Nếu có thêm x người thì số khách là $20+x$. Vì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 1 USD/người cho toàn bộ hành khách, khi đó giá vé của mỗi người là $30-x$.

Theo đó, doanh thu là $(20+x)(30-x)=-x^2+10x+600$.

b) Lợi nhuận công ty là $(20+x)(30-x)-400=-x^2+10x+200$.

Xét tam thức $f(x)=-x^2+10x+200$, ta thấy $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1=-10$, $x_2=20$.

Áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-10		20		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Công ty lãi khi $f(x)>0$, tức là $-10<x<20$. Vì $x\geq 0$ nên ta có: $0\leq x<20$.

Vậy số khách từ người thứ 21 trở lên có ít hơn 20 người thì công ty có lãi.

C. BÀI TẬP

20. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $x^2 - x - 2 > 0$ khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

B. $x^2 - x - 2 \leq 0$ khi và chỉ khi $x \in [-1; 2]$.

C. $x^2 - x - 2 < 0$ khi và chỉ khi $x \in (-1; 2)$.

D. $x^2 - x - 2 \geq 0$ khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị ở *Hình 15*.

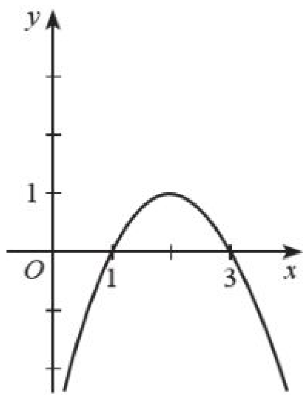
Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $f(x) < 0$ khi và chỉ khi $x \in (1; 3)$.

B. $f(x) \leq 0$ khi và chỉ khi $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

C. $f(x) > 0$ khi và chỉ khi $x \in (1; 3)$.

D. $f(x) \geq 0$ khi và chỉ khi $x \in [1; 3]$.



Hình 15

22. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A. $f(x) < 0$ với mọi x khi và chỉ khi $a < 0$ và $\Delta \leq 0$.

B. $f(x) < 0$ với mọi x khi và chỉ khi $a < 0$ và $\Delta < 0$.

C. $f(x) \leq 0$ với mọi x khi và chỉ khi $a > 0$ và $\Delta < 0$.

D. $f(x) \leq 0$ với mọi x khi và chỉ khi $a > 0$ và $\Delta \leq 0$.

23. Lập bảng xét dấu mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$; b) $f(x) = 25x^2 + 10x + 1$; c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 8$;

d) $f(x) = -2x^2 + x + 3$; e) $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$; g) $f(x) = -5x^2 + 2x - 4$.

24. Tìm m để tam thức $f(x) = -x^2 - 2x + m - 12$ không dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

25. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 3m - 2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

26. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 6m - 1}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

27. Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 200Q + 180\,000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1 300 nghìn đồng.

a) Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.

b) Xí nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để không bị lỗ? Biết rằng các sản phẩm được sản xuất ra đều bán hết.

§4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bất phương trình bậc hai một ẩn

Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax^2 + bx + c < 0;\ ax^2 + bx + c \leq 0;\ ax^2 + bx + c > 0;\ ax^2 + bx + c \geq 0,$$

trong đó a, b, c là các số thực đã cho, $a \neq 0$.

2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

Giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$):

Cách 1. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai

Bước 1: Xác định dấu của hệ số a và tìm nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

Bước 2: Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+".

Cách 2. Sử dụng đồ thị

Dựa vào parabol $y = ax^2 + bx + c$, ta tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành.

Chú ý: Các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$ được giải bằng cách tương tự.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

Phương pháp: Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai hoặc đồ thị.

Ví dụ 1 Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 7x + 5 > 0$;   b) $-x^2 - 3x + 10 > 0$;

c) $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$;   d) $-x^2 + 2x - 4 < 0$.

Giải

a) Tam thức $2x^2 - 7x + 5$ có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{5}{2}$ và có hệ số $a = 2 > 0$.

Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $2x^2 - 7x + 5$ mang dấu "+" là $(-\infty; 1) \cup \left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 7x + 5 > 0$ là $(-\infty; 1) \cup \left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$.

b) Tam thức $-x^2 - 3x + 10$ có hai nghiệm $x_1 = -5, x_2 = 2$ và có hệ số $a = -1 < 0$.

Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-x^2 - 3x + 10$ mang dấu "+" là $(-5; 2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 - 3x + 10 > 0$ là $(-5; 2)$.

c) Tam thức $9x^2 - 6x + 1$ có nghiệm kép $x = \dfrac{1}{3}$ và có hệ số $a = 9 > 0$.

Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $9x^2 - 6x + 1$ mang dấu "–" là $\varnothing$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$ là $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

d) Tam thức $-x^2 + 2x - 4$ vô nghiệm và có hệ số $a = -1 < 0$.

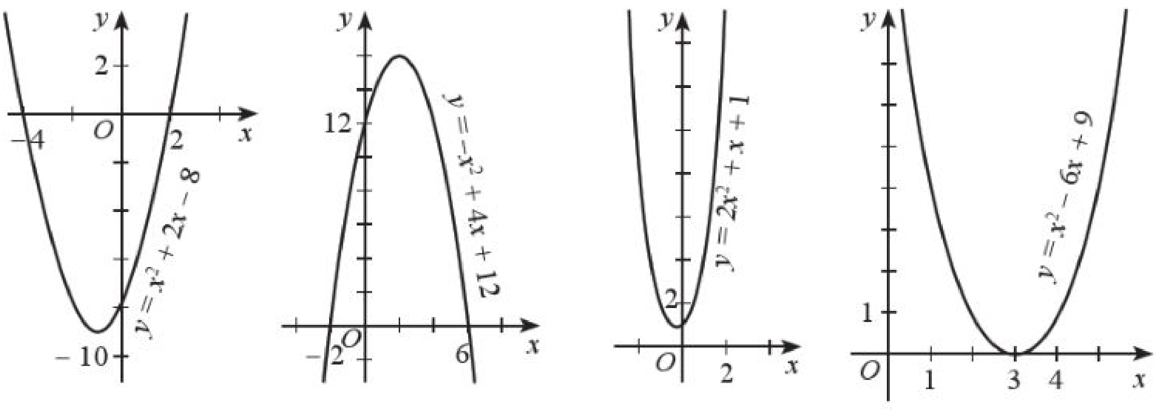
Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-x^2 + 2x - 4$ mang dấu "–" là $\mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 2x - 4 < 0$ là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2 Quan sát đồ thị ở mỗi *Hình 16a, 16b, 16c, 16d* và giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 + 2x - 8 < 0$; b) $-x^2 + 4x + 12 > 0$;

c) $2x^2 + x + 1 < 0$; d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$.



a) *b)* *c)* *d)*

Hình 16

Giải

a) Quan sát đồ thị ở *Hình 16a*, ta thấy: $x^2 + 2x - 8 < 0$ biểu diễn phần parabol $y = x^2 + 2x - 8$ nằm phía dưới trục hoành, tương ứng với $-4 < x < 2$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 2x - 8 < 0$ là khoảng $(-4\ ;\ 2)$.

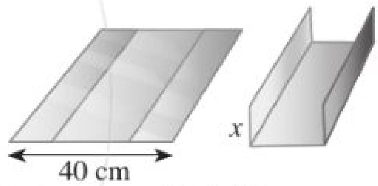
b) Quan sát đồ thị ở *Hình 16b*, ta thấy: $-x^2 + 4x + 12 > 0$ biểu diễn phần parabol $y = -x^2 + 4x + 12$ nằm phía trên trục hoành, tương ứng với $-2 < x < 6$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 4x + 12 > 0$ là khoảng $(-2\ ;\ 6)$.

c) Quan sát đồ thị ở *Hình 16c*, ta thấy không có phần đồ thị nào của parabol $y = 2x^2 + x + 1$ nằm phía dưới trục hoành. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 + x + 1 < 0$ là $\varnothing$.

d) Quan sát đồ thị ở *Hình 16d*, ta thấy parabol $y = x^2 - 6x + 9$ luôn nằm phía trên trục hoành với mọi x khác 3, tại $x = 3$ thì $y = 0$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ là $\{3\}$.

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 3 Bác Nam muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 40 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông sao cho độ cao hai thành rãnh bằng nhau (*Hình 17*). Để đảm bảo kĩ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 150 cm^2. Bác Nam cần làm rãnh dẫn nước có độ cao ít nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét để đảm bảo kĩ thuật?



Hình 17

Giải

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như *Hình 17* thì mặt cắt ngang là hình chữ nhật có hai kích thước x (cm) và $40 - 2x$ (cm). Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(40 - 2x)x$ (cm^2).

Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn hoặc bằng 150 cm^2 khi và chỉ khi $(40 - 2x)x \geq 150 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x - 150 \geq 0$.

Tam thức $f(x) = -2x^2 + 40x - 150$ có hai nghiệm $x_1 = 5$, $x_2 = 15$ và hệ số $a = -2 < 0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $f(x)$ mang dấu "+" là khoảng $(5\ ;\ 15)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2 + 40x - 150 \geq 0$ là đoạn $[5\ ;\ 15]$.

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 5 cm.

Ví dụ 4 Tổng chi phí T (đơn vị tính: nghìn đồng) để sản xuất Q sản phẩm được cho bởi biểu thức $T = Q^2 + 20Q + 4\,000$; giá bán của 1 sản phẩm là 150 nghìn đồng. Số sản phẩm cần được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo không bị lỗ (giả thiết các sản phẩm được bán hết)?

Giải

Doanh thu khi bán Q sản phẩm là $150Q$.

Lợi nhuận khi bán Q sản phẩm $150Q - (Q^2 + 20Q + 4\,000) = -Q^2 + 130Q - 4\,000$.

Để không bị lỗ thì $-Q^2 + 130Q - 4\,000 \geq 0$.

Tam thức $f(Q) = -Q^2 + 130Q - 4\,000$ có hai nghiệm $Q_1 = 50$, $Q_2 = 80$ và hệ số $a = -1 < 0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của Q sao cho tam thức $f(Q)$ mang dấu "+" là khoảng $(50 ; 80)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-Q^2 + 130Q - 4\,000 \geq 0$ là đoạn $[50 ; 80]$.

Vậy số sản phẩm cần được sản xuất trong đoạn $[50 ; 80]$ để đảm bảo không bị lỗ.

C. BÀI TẬP

28. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào **không** là bất phương trình bậc hai một ẩn?

A. $-2x^2 + 3x < 0$. **B.** $0,5y^2 - \sqrt{3}(y-2) \leq 0$.

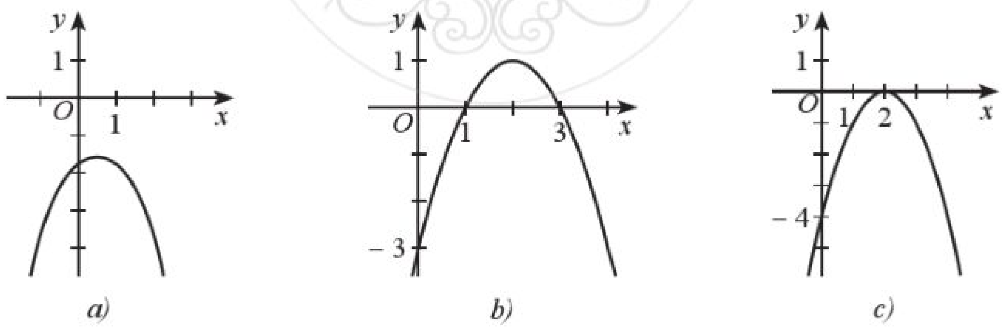
C. $x^2 - 2xy - 3 \geq 0$. **D.** $\sqrt{2}x^2 - 3 \geq 0$.

29. Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 3x + 18 \geq 0$ là:

A. $[-3 ; 6]$. **B.** $(-3 ; 6)$.

C. $(-\infty ; -3) \cup (6 ; +\infty)$. **D.** $(-\infty ; -3] \cup [6 ; +\infty)$.

30. Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x)$ trong mỗi *Hình 18a, 18b, 18c*, hãy viết tập nghiệm các bất phương trình sau: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$.



Hình 18

31. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $3x^2 - 8x + 5 > 0$; b) $-2x^2 - x + 3 \leq 0$;

c) $25x^2 - 10x + 1 < 0$; d) $-4x^2 + 5x + 9 \geq 0$.

32. Tìm giao các tập nghiệm của hai bất phương trình $-3x^2 + 7x + 10 \geq 0$ và $-2x^2 - 9x + 11 > 0$.

33. Tìm m để phương trình $-x^2 + (m + 2)x + 2m - 10 = 0$ có nghiệm.

34. Xét hệ toạ độ Oth trong mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0 ; 0{,}3)$ và chuyển động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đạt độ cao 8 m sau 1 giây và đạt độ cao 6 m sau 2 giây. Trong khoảng thời gian nào (tính bằng giây) thì quả bóng ở độ cao lớn hơn 5 m và nhỏ hơn 7 m (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)?

35. Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên hai trục tính theo mét), một viên đạn được bắn từ vị trí $O(0 ; 0)$ theo quỹ đạo là đường parabol $y = -\dfrac{9}{1\,000\,000}x^2 + \dfrac{3}{100}x$. Tìm khoảng cách theo trục hoành của viên đạn so với vị trí bắn khi viên đạn đang ở độ cao lớn hơn 15 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).

§5 HAI DẠNG PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giải phương trình có dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ (I)

($f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = mx^2 + nx + p$ với $a \neq m$, a hoặc m có thể bằng 0)

Các bước giải:

Bước 1: Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình $f(x) = g(x)$ rồi tìm nghiệm của phương trình này

Bước 2: Thay từng nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ vào bất phương trình $f(x) \geq 0$ (hoặc $g(x) \geq 0$). Nghiệm nào thoả mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thoả mãn thì loại đi.

Bước 3: Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở *Bước 2*, ta kết luận nghiệm của phương trình (I).

Chú ý: Trong hai bất phương trình $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, ta thường chọn bất phương trình có dạng đơn giản hơn để thực hiện *Bước 2*.

2. Giải phương trình có dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (II)

($f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = dx + e$ với $a \neq d^2$, a hoặc d có thể bằng 0)

Các bước giải:

Bước 1: Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

Bước 2: Bình phương hai vế của (II) dẫn đến phương trình $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm nghiệm của phương trình đó.

Bước 3: Trong những nghiệm của phương trình $f(x) = [g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x) \geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Giải phương trình có dạng (I)

Ví dụ 1 Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{3x^2 - 2x}$ (1)

Giải

Bình phương hai vế của (1) ta được $x^2 + x - 1 = 3x^2 - 2x$ (2)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{1}{2}$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $3x^2 - 2x \geq 0$, ta thấy chỉ có $x = 1$ thoả mãn bất phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 1$.

Vấn đề 2. Giải phương trình có dạng (II)

Ví dụ 2 Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 2x + 16} = 2x - 1$ (3)

Giải

Trước hết ta giải bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ (4). Ta có: (4) $\Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của (3) ta được $3x^2 - 2x + 16 = (2x - 1)^2$ (5).

Ta có: (5) $\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 16 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$.

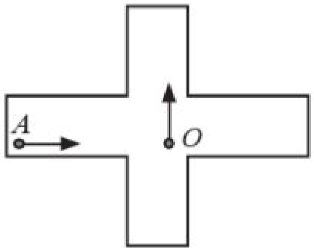
Do đó, phương trình (5) có hai nghiệm là $x = -3$ và $x = 5$.

Trong hai giá trị trên, chỉ có giá trị $x = 5$ là thoả mãn $x \geq \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình (3) có nghiệm là $x = 5$.

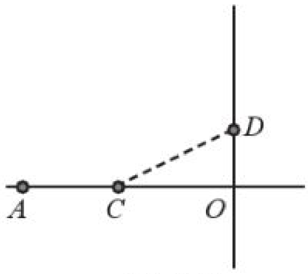
Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 3 Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm từ hai vị trí A và O với vận tốc trung bình lần lượt là 50 km/h và 40 km/h trên hai con đường vuông góc với nhau và giao tại O. Hướng đi của hai xe thể hiện ở *Hình 19*. Biết $AO = 8$ km. Gọi x (giờ) là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km (tính theo đường chim bay) trước khi ô tô đi từ A đến vị trí O. Tìm x.



Hình 19

Giải. (*Hình 20*)



Hình 20

Quãng đường ô tô xuất phát từ A, O đi được sau x giờ lần lượt là $50x$ (km) và $40x$ (km).

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí A đến C cách O một khoảng $OC = 8 - 50x$ (km).

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí O đến D cách O một khoảng $OD = 40x$ (km).

Để $8 - 50x > 0$ thì $0 \le x < 0,16$. Do tam giác OCD là tam giác vuông nên ta có:

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{(8-50x)^2 + (40x)^2}.$$

Ta có phương trình: $\sqrt{(8-50x)^2 + (40x)^2} = 5$. Bình phương hai vế ta có:

$$(8-50x)^2 + (40x)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 2\,500x^2 - 800x + 64 + 1\,600x^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 4\,100x^2 - 800x + 39 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm là $x = 0,1$ và $x = \dfrac{39}{410}$. Đối chiếu với điều kiện $0 \le x < 0,16$, ta nhận cả hai giá trị trên của x.

Vậy thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km (tính theo đường chim bay) trước khi ô tô đi từ A đến vị trí O là $\dfrac{39}{410}$ giờ và 0,1 giờ.

C. BÀI TẬP

36. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ là tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

B. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ là tập nghiệm của phương trình $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$.

C. Mọi nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$.

D. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ là tập hợp các nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ thoả mãn bất phương trình $f(x)\geq 0$ (hoặc $g(x)\geq 0$).

37. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)}=g(x)$ là tập nghiệm của phương trình $f(x)=[g(x)]^2$.

B. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)}=g(x)$ là tập hợp các nghiệm của phương trình $f(x)=\left[g(x)\right]^2$ thoả mãn bất phương trình $g(x)\geq 0$.

C. Mọi nghiệm của phương trình $f(x)=[g(x)]^2$ đều là nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)}=g(x)$.

D. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)}=g(x)$ là tập hợp các nghiệm của phương trình $f(x)=[g(x)]^2$ thoả mãn bất phương trình $f(x)\geq 0$.

38. Giải thích vì sao chỉ cần kiểm tra nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ thoả mãn một trong hai bất phương trình $f(x)\geq 0$ hoặc $g(x)\geq 0$ mà không cần kiểm tra thoả mãn đồng thời hai bất phương trình đó để kết luận nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$.

39. Giải thích vì sao chỉ cần kiểm tra nghiệm của phương trình $f(x)=\left[g(x)\right]^2$ thoả mãn bất phương trình $g(x)\geq 0$ mà không cần kiểm tra thoả mãn bất phương trình $f(x)\geq 0$ để kết luận nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)}=g(x)$.

40. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{-4x+4}=\sqrt{-x^2+1}$; b) $\sqrt{3x^2-6x+1}=\sqrt{x^2-3}$;

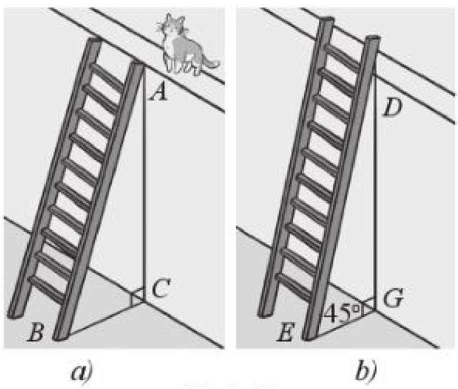
c) $\sqrt{2x-1}=3x-4$; d) $\sqrt{-2x^2+x+7}=x-3$.

41. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{7-2x}+x=2$;

b) $\sqrt{-2x^2+7x+1}+3x=7$.

42. Để leo lên một bức tường, bác Dũng dùng một chiếc thang cao hơn bức tường đó 2 m. Ban đầu, bác Dũng đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng vào



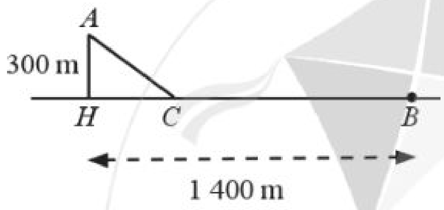
Hình 21

mép trên của bức tường (*Hình 21a*). Sau đó, bác Dũng dịch chuyển chân thang vào gần chân bức tường thêm 1 m thì bác Dũng nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 45° (*Hình 21b*). Bức tường cao bao nhiêu mét?

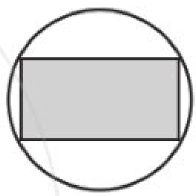
43. Một người đi bộ xuất phát từ B trên một bờ sông (coi là đường thẳng) với vận tốc 6 km/h để gặp một người chèo thuyền xuất phát cùng lúc từ vị trí A với vận tốc 3km/h. Nếu người chèo thuyền di chuyển theo đường vuông góc với bờ thì phải đi một khoảng cách $AH = 300$ m và gặp người đi bộ tại địa điểm cách B một khoảng $BH = 1\ 400$ m. Tuy nhiên, nếu di chuyển theo cách đó thì hai người không tới cùng lúc. Để hai người đến cùng lúc thì mỗi người cùng di chuyển về vị trí C (*Hình 22*).

a) Tính khoảng cách CB.

b) Tính thời gian từ khi hai người xuất phát cho đến khi gặp nhau cùng lúc.



Hình 22


Hình 23

44. Người ta muốn thiết kế một vườn hoa hình chữ nhật nội tiếp trong một miếng đất hình tròn có đường kính bằng 50 m (*Hình 23*). Xác định kích thước vườn hoa hình chữ nhật để tổng quãng đường đi xung quanh vườn hoa đó là 140 m.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

45. Trong các hàm số sau, hàm số nào **không** là hàm số bậc hai?

A. $y = -5x^2 + 6x$. **B.** $y = 3 - 2x^2$. **C.** $y = -x(5x - 7)$. **D.** $y = 0x^2 + 6x - 5$.

46. Tập nghiệm của bất phương trình $-5x^2 + 6x + 11 \leq 0$ là:

A. $\left[-1\ ;\ \frac{11}{5}\right]$. **B.** $\left(-1\ ;\ \frac{11}{5}\right)$.

C. $(-\infty\ ;\ -1) \cup \left(\frac{11}{5}\ ;\ +\infty\right)$. **D.** $(-\infty\ ;\ -1] \cup \left[\frac{11}{5}\ ;\ +\infty\right)$.

47. Cho hàm số $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 0 \\ 2 & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$

a) Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số trên:

$A(0\ ;\ 0)$, $B(-1\ ;\ 1)$; $C(2\ 021\ ;\ 1)$; $D(2\ 022\ ;\ 2)$?

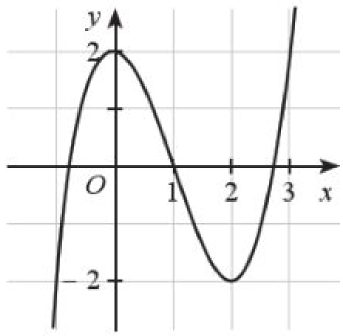
b) Chỉ ra hai điểm thuộc đồ thị của hàm số trên có tung độ bằng 2.

c) Chỉ ra điểm thuộc đồ thị của hàm số trên có hoành độ bằng – 2 022.

48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị ở *Hình 24*.

a) Chỉ ra khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Nêu tung độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Oy.



Hình 24

49. Một người vay 100 triệu đồng tại một ngân hàng để mua nhà với lãi suất r%/năm trong thời hạn 2 năm. Hỏi số tiền người này phải trả cho ngân hàng là bao nhiêu triệu đồng sau 2 năm?

50. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x^2 - 8x + 1$; b) $y = -x^2 + 4x - 3$.

51. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $4x^2 - 9x + 5 \leq 0$; b) $-3x^2 - x + 4 > 0$;

c) $36x^2 - 12x + 1 > 0$; d) $-7x^2 + 5x + 2 < 0$.

52. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{8 - x} + x = -4$; b) $\sqrt{3x^2 - 5x + 2} + 3x = 4$.

53. *Hình 25* cho biết bảng giá cước của một hãng taxi (đã bao gồm thuế VAT):

BẢNG GIÁ CƯỚC					
QUÃNG ĐƯỜNG x (km)	$0 < x \leq 0{,}3$	$0{,}3 < x \leq 2$	$2 < x \leq 10$	$10 < x \leq 25$	$x > 25$
GIÁ CƯỚC	5 000 đồng	20 600 đồng/km	16 000 đồng/km	17 600 đồng/km	15 100 đồng/km

Hình 25

a) Số tiền phải trả y (đồng) có phải là hàm số của quãng đường x (km) khi đi taxi hay không? Giải thích. Nếu đúng, hãy xác định những công thức tính y theo x biểu thị cho bảng trên.

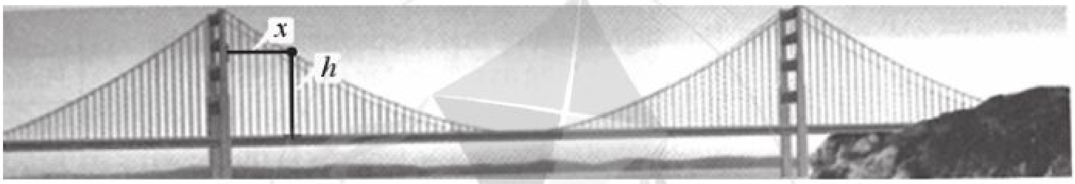
b) Quãng đường x (km) có phải là hàm số của số tiền phải trả y (đồng) không? Giải thích.

c) Tính số tiền bạn Quân phải trả khi đi taxi hãng trên với quãng đường 20 km.

54. Quan sát chiếc cầu Cổng Vàng (Golden Gate bridge) ở *Hình 26*. Độ cao h (feet) tính từ mặt cầu đến các điểm trên dây treo ở phần giữa hai trụ cầu được xác định bởi công thức $h(x)=\frac{1}{9\,000}x^2-\frac{7}{15}x+500$, trong đó x (feet) là khoảng cách từ trụ cầu bên trái đến điểm tương ứng trên dây treo.

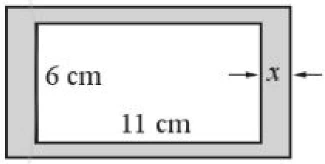
a) Xác định độ cao của trụ cầu so với mặt cầu theo đơn vị feet.

b) Xác định khoảng cách giữa hai trụ cầu theo đơn vị feet, biết rằng hai trụ cầu này có độ cao bằng nhau.



Hình 26

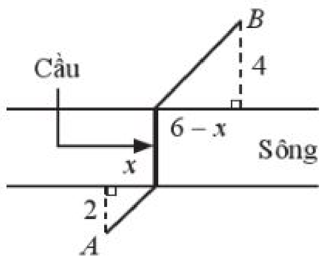
55. Bác Nam dự định làm một khung ảnh hình chữ nhật sao cho phần trong của khung là hình chữ nhật có kích thước 6 cm x 11 cm, độ rộng viền xung quanh là x cm (*Hình 27*). Diện tích của viền khung ảnh không vượt quá 38 cm^2.



Hình 27

Hỏi độ rộng viền khung ảnh lớn nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét?

56. Hai địa điểm A và B cách nhau bởi một con sông (coi hai bờ sông song song). Người ta muốn xây một chiếc cầu bắc vuông góc với bờ sông để có thể đi từ A đến B. Với các số liệu (tính theo đơn vị ki-lô-mét) cho trên *Hình 28*, tìm x (km) để xác định vị trí đặt chân cầu sao cho khoảng cách từ B đến chân cầu phía B gấp đôi khoảng cách từ A đến chân cầu phía A.



Hình 28

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1. D. **2. D.**

3. a) $\mathbb{R}$. b) $\left(-\infty ; \frac{5}{6}\right]$. c) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-1}{3}\right\}$. d) $(-\infty ; 3] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

e) $\mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$. g) $(-\infty ; -1) \cup (0 ; +\infty)$.

4. a) $\mathbb{R}$. b) $f(-2) = 3, f(0) = 0, f(2\,021) = 1$.

5. a) Học sinh tự làm. b) $f(0) = 1, f(3) = 4$.

c) Điểm có toạ độ $(a ; 1)$ với $a \in [-3 ; 0]$.

6. a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1 ; 3)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(3 ; +\infty)$.

b) $-2\,021$ và -1 thuộc $(-\infty ; 1)$ mà hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 1)$ nên $f(-2\,021) > f(-1)$.

$\sqrt{3}$ và 2 thuộc $(1 ; 3)$ mà hàm số đồng biến trên khoảng $(1 ; 3)$ nên $f(\sqrt{3}) < f(2)$.

7. Xét hàm số $f(x) = \frac{-2}{x}$. Lấy $x_1, x_2 \in (-\infty ; 0)$ với $x_1 < x_2$.

Ta có: $f(x_1) - f(x_2) = \frac{-2}{x_1} - \frac{-2}{x_2} = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Suy ra hàm số $f(x) = \frac{-2}{x}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$.

Tương tự hàm số trên đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

8. a) Gọi x (triệu đồng) là doanh số bán hàng và y (triệu đồng) là thu nhập tương ứng của nhân viên đó hàng tháng. Ta có hàm số biểu diễn thu nhập hàng tháng của nhân viên đó theo doanh số bán hàng như sau (đơn vị: triệu đồng):

$$y = \begin{cases} 5 & \text{nếu } 0 \le x \le 10 \\ 5 + 0{,}05x & \text{nếu } 10 < x < 20 \\ 5{,}5 + 0{,}05x & \text{nếu } x \ge 20. \end{cases}$$

b) Nếu $x = 30 > 20$ thì $y = 5{,}5 + 0{,}05 \,.\, 30 = 7$. Vậy nhân viên đó sẽ được nhận 7 triệu đồng.

§2 HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

9. B. **10. B.**

11. a) $a = 1, b = -1, c = -9$. b) $a = 1, b = 0, c = -7$. c) $a = -2, b = 8, c = 0$.

12. Số tiền cả vốn và lãi sau 2 tháng mà bố bạn Lan có được là:

$$(10 + 10x\%)x\% + 10 + 10x\% = 0{,}001x^2 + 0{,}2x + 10 \text{ (triệu đồng)}.$$

13. a) $y = 2x^2 - 5x + 1$. b) $y = -9x^2 - 36x + 1$. c) $y = -4x^2 - 8x + 1$.

14. Học sinh tự làm.

15. $a < 0, b > 0, c > 0$.

16. a) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-3}{4}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-3}{4}\right)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

17. a) $y = 4x^2 + 8x + 2$. b) $y = \frac{-3}{2}x^2 + 6x + 2$.

18. a) $y = x^2 - 2x - 3$. b) $y = -2x^2 - 4x$.

19. Lấy hệ trục toạ độ Oxy sao cho vị trí B trùng với gốc O, trục Ox nằm trên đường nối chân hai cổng, C nằm trên tia Ox (đơn vị trên các trục tính theo mét).

Khi đó cổng ra vào là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{-32}{85}x^2 + \frac{288}{85}x$.

Đỉnh của đồ thị hàm số trên có tung độ là khoảng 7,6.

Vậy chiều cao của cổng là khoảng 7,6 m.

§3 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

20. D. 21. A. 22. B.

23. a)

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

b)

x	$-\infty$		$\frac{-1}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	

d)

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

g)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

24. $m \le 11$.

25. $m \ge \dfrac{41}{24}$.

26. $m > \dfrac{5}{6}$.

27. a) Lợi nhuận là:

$f(Q) = 1\,300Q - (Q^2 + 200Q + 180\,000) = -Q^2 + 1\,100Q - 180\,000$ (nghìn đồng).

b) Xí nghiệp không bị lỗ khi và chỉ khi $f(Q) \ge 0$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		200		900		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Theo đó, $f(Q) \ge 0 \Leftrightarrow Q \in [200\,;\,900]$. Vậy xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm trong đoạn $[200\,;\,900]$ để không bị lỗ.

§4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

28. C. **29. A.**

30. Xét *Hình 18a*: dựa vào đồ thị $y = f(x)$ ta có:

– Bất phương trình $f(x) > 0$ có tập nghiệm là $\varnothing$.

– Bất phương trình $f(x) < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

– Bất phương trình $f(x) \ge 0$ có tập nghiệm là $\varnothing$.

– Bất phương trình $f(x) \le 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Xét *Hình 18b*, *18c* tương tự, học sinh tự làm.

31. Tập nghiệm của mỗi bất phương trình là:

a) $(-\infty\,;1)\cup\left(\dfrac{5}{3}\,;+\infty\right)$.

b) $\left(-\infty\,;\dfrac{-3}{2}\right]\cup[1\,;+\infty)$.

c) $\varnothing$.

d) $\left[-1\,;\dfrac{9}{4}\right]$.

32. Tập nghiệm của hai bất phương trình $-3x^2+7x+10\geq 0$ và $-2x^2-9x+11>0$ lần lượt là $\left[-1\,;\dfrac{10}{3}\right]$ và $\left(\dfrac{-11}{2}\,;1\right)$. Vậy giao các tập nghiệm của hai bất phương trình trên là $[-1\,;1)$.

33. Phương trình $-x^2+(m+2)x+2m-10=0$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta\geq 0$.

Ta có: $\Delta\geq 0\Leftrightarrow(m+2)^2-4\,.\,(-1)\,.\,(2m-10)\geq 0\Leftrightarrow m^2+12m-36\geq 0$.

Giải bất phương trình $m^2+12m-36\geq 0$ ta có tập nghiệm là:

$$(-\infty\,;-6-6\sqrt{2}]\cup[-6+6\sqrt{2}\,;+\infty).$$

Vậy $m\in(-\infty\,;-6-6\sqrt{2}]\cup[-6+6\sqrt{2}\,;+\infty)$ thì phương trình trên có nghiệm.

34. Độ cao h phụ thuộc vào thời gian t theo công thức hàm số sau:

$h(t)=-4{,}85t^2+12{,}55t+0{,}3$ (m).

Quả bóng ở độ cao lớn hơn 5 m và nhỏ hơn 7 m nên $5<h(t)<7$.

Giải bất phương trình $-4{,}85t^2+12{,}55t+0{,}3>5$ ta có tập nghiệm với đầu mút xấp xỉ là $(0{,}454\,;2{,}133)$.

Giải bất phương trình $-4{,}85t^2+12{,}55t+0{,}3<7$ ta có tập nghiệm với đầu mút xấp xỉ là $(-\infty\,;0{,}753)\cup(1{,}835\,;+\infty)$.

Lấy giao của hai tập nghiệm trên, ta có $t\in(0{,}454\,;0{,}753)\cup(1{,}835\,;2{,}133)$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0,454 s đến 0,753 s và từ 1,835 s đến 2,133 s thì quả bóng ở độ cao lớn hơn 5 m và nhỏ hơn 7 m.

35. Độ cao viên đạn lớn hơn 15 m nên

$$-\frac{9}{1\,000\,000}x^2+\frac{3}{100}x>15\Leftrightarrow -3x^2+10\,000x-5\,000\,000>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{5\,000-1\,000\sqrt{10}}{3}<x<\frac{5\,000+1\,000\sqrt{10}}{3}.$$

Vậy khoảng cách theo trục hoành của viên đạn so với vị trí bắn khi viên đạn đang ở độ cao lớn hơn 15 m là nằm trong khoảng

$$\left(\frac{5\,000-1\,000\sqrt{10}}{3}\,;\frac{5\,000+1\,000\sqrt{10}}{3}\right).$$

§5 HAI DẠNG PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

36. D. **37.** B.

38. Học sinh tự làm.

39. Học sinh tự làm.

40. a) $x = 1$. b) $x = 2$. c) $x = \frac{17}{9}$. d) $x \in \varnothing$.

41. a) $x = -1$. b) $x = \frac{16}{11}$.

42. Gọi chiều cao bức tường là x (m) ($x > 0$). Khi đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó chạm đúng vào mép trên của bức tường thì khoảng cách chân thang đến chân tường là $\sqrt{(x+2)^2 - x^2}$ (m).

Khi thang tạo với mặt đất một góc 45° thì khoảng cách từ chân thang đến chân tường là x (m).

Theo đề bài ta có phương trình: $\sqrt{(x+2)^2 - x^2} = x + 1$.

Giải phương trình trên ta có: $x = 3$ (m) với $x > 0$. Vậy chiều cao bức tường là 3 m.

43. a) Đặt $CH = x$ (m) ($x > 0$). Ta có: $AC = \sqrt{300^2 + x^2}$, $CB = 1\ 400 - x$.

Vì hai người gặp nhau cùng lúc tại C nên

$$\frac{\sqrt{300^2 + x^2}}{3\ 000} = \frac{1\ 400 - x}{6\ 000} \Leftrightarrow 2\sqrt{300^2 + x^2} = 1\ 400 - x.$$

Giải phương trình trên ta có: $x = 400$ (m) với $x > 0$.

Vậy khoảng cách $CB = 1\ 400 - 400 = 1\ 000$ (m).

b) Thời gian hai người bắt đầu di chuyển cho đến khi tới C là 10 phút.

44. Đặt độ dài một cạnh của hình chữ nhật là x (m) ($0 < x < 50$). Vì độ dài đường chéo hình chữ nhật bằng đường kính hình tròn nên độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật đó là $\sqrt{2\ 500 - x^2}$ (m).

Khi đó, tổng quãng đường đi xung quanh vườn hoa bằng chu vi hình chữ nhật là:

$2(\sqrt{2\ 500 - x^2} + x) = 140$ (m).

Giải phương trình trên ta có: $x = 40$ (m) hoặc $x = 30$ (m). Nếu $x = 40$ (m) thì độ dài cạnh còn lại là 30 m và ngược lại. Vậy kích thước vườn hoa là 30×40 m.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

45. **D.**

46. **D.**

47. a) B, D. b) $E(1\ ;\ 2), G(2\ ;\ 2)$. c) $K(-2\,022\ ;\ 1)$.

48. a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2\ ;+\infty)$; hàm số nghịch biến trên khoảng $(0\ ;\ 2)$.

b) 2.

49. $T = (100r\% + 100)r\% + 100r\% + 100 = 0{,}01r^2 + 2r + 100$ (triệu đồng).

50. Học sinh tự làm.

51. a) $\left[1\ ;\ \frac{5}{4}\right]$. b) $\left(\frac{-4}{3}\ ;1\right)$. c) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{6}\right\}$. d) $\left(-\infty\ ;\ \frac{-2}{7}\right) \cup (1\ ;+\infty)$.

52. a) $x = -8$. b) $x = \frac{7}{6}$.

53. Học sinh tự làm.

54. a) 500 feet. b) 4 200 feet.

55. Đặt độ rộng viền khung ảnh là x (cm) $(x > 0)$. Ta có diện tích viền khung ảnh là: $(11 + 2x)(6 + 2x) - 66 = 4x^2 + 34x$ (cm^2).

Theo đề bài ta có: $4x^2 + 34x \leq 38$.

Giải bất phương trình trên ta có: $x \in \left[\frac{-19}{2}\ ;\ 1\right]$. Suy ra độ rộng viền khung ảnh lớn nhất là 1 cm.

56. Gọi chân cầu phía A là M, chân cầu phía B là N. Dựa vào *Hình 28,* áp dụng định lí Pythagore ta có:

$$AM = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4},\ BN = \sqrt{(6-x)^2 + 4^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 52}.$$

Theo đề bài, ta có: $BN = 2AM \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 12x + 52} = 2\sqrt{x^2 + 4}$.

Giải phương trình trên ta có: $x = 2$ (km) với $x > 0$.

Vậy với $x = 2$ km thì khoảng cách từ B đến chân cầu phía B gấp đôi khoảng cách từ A đến chân cầu phía A.

Chương IV

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. VECTƠ

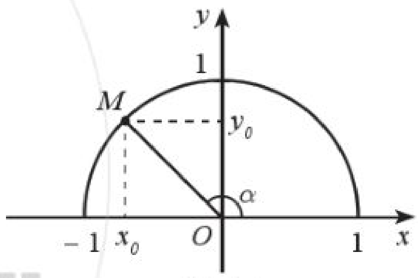
§1 ĐỊNH LÍ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÍ SIN TRONG TAM GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Giá trị lượng giác của một góc trong khoảng từ 0° đến 180°

1. Định nghĩa

Với mỗi góc α ($0° \le \alpha \le 180°$), ta xác định một điểm $M(x_0\ ;\ y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ (*Hình 1*). Khi đó:



Hình 1

– sin của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha$, được xác định bởi $\sin\alpha = y_0$.

– côsin của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha$, được xác định bởi $\cos\alpha = x_0$.

– tang của góc α, kí hiệu là $\tan\alpha$, được xác định bởi $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}\ (x_0 \ne 0)$.

– côtang của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha$, được xác định bởi $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}\ (y_0 \ne 0)$.

2. Giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau ($0° \le \alpha \le 90°$)

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$;

$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha\ (\alpha \ne 0°)$; $\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha\ (\alpha \ne 90°)$.

3. Giá trị lượng giác của hai góc bù nhau ($0° \le \alpha \le 180°$)

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha\ (\alpha \ne 90°)$; $\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha\ (\alpha \ne 0°, \alpha \ne 180°)$.

4. Một số đẳng thức lượng giác

Cho góc α ($0^o \leq \alpha \leq 180^o$). Khi đó:

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ($\alpha \neq 90^o$); $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ($\alpha \neq 0^o$, $\alpha \neq 180^o$);

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha \,.\, \cot\alpha = 1$ ($\alpha \neq 0^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$, $\alpha \neq 180^\circ$).

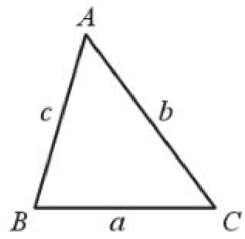
II. Định lí côsin

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ (*Hình 2*). Khi đó:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$,

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

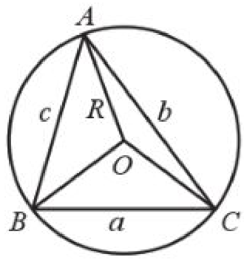


Hình 2

III. Định lí sin

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R (*Hình 3*). Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



Hình 3

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính các giá trị lượng giác

Ví dụ 1 Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin 13^\circ \,.\, \cos 131^\circ + \sin 167^\circ \,.\, \cos 49^\circ$;

b) $B = \cot 35^\circ \,.\, \cot 65^\circ \,.\, \cot 125^\circ \,.\, \cot 155^\circ$.

Giải

a) Ta có:

$\cos 131^\circ = \cos(180^\circ - 49^\circ) = -\cos 49^\circ$, $\sin 167^\circ = \sin(180^\circ - 13^\circ) = \sin 13^\circ$.

Do đó, $A = -\sin 13^\circ \,.\, \cos 49^\circ + \sin 13^\circ \,.\, \cos 49^\circ = 0$.

b) Ta có: $\cot 125^\circ = -\cot(180^\circ - 125^\circ) = -\cot 55^\circ = -\tan(90^\circ - 55^\circ) = -\tan 35^\circ$,

$\cot 155^\circ = -\cot(180^\circ - 155^\circ) = -\cot 25^\circ = -\tan(90^\circ - 25^\circ) = -\tan 65^\circ$.

Do đó, $B = \cot 35^\circ \,.\, \cot 65^\circ \,.\, (-\tan 35^\circ) \,.\, (-\tan 65^\circ)$

$= (-\tan 35^\circ \,.\, \cot 35^\circ) \,.\, (-\tan 35^\circ \,.\, \cot 35^\circ) = (-1) \,.\, (-1) = 1.$

Ví dụ 2 Cho $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$ và $\alpha - \beta = 90^\circ$. Chứng minh:

a) $\sin\alpha = \cos\beta$; b) $\cos\alpha = -\sin\beta$; c) $\tan\alpha = -\cot\beta$.

Giải

a) $\sin\alpha = \sin(90^\circ + \beta) = \sin[180^\circ - (90^\circ + \beta)] = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta$.

b) $\cos\alpha = \cos(90^\circ + \beta) = -\cos[180^\circ - (90^\circ + \beta)] = -\cos(90^\circ - \beta) = -\sin\beta$.

c) $\tan\alpha = \tan(90^\circ + \beta) = -\tan[180^\circ - (90^\circ + \beta)] = -\tan(90^\circ - \beta) = -\cot\beta$.

Ví dụ 3 Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC. Chứng minh:

a) $\sin A = \sin(B + C)$; b) $\cos A + \cos(B + C) = 0$;

c) $\tan A + \tan(B + C) = 0$ $(A \neq 90^\circ)$; d) $\cot A + \cot(B + C) = 0$.

Giải

Ta có: $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow B + C = 180^\circ - A$. Do đó:

a) $\sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$.

b) $\cos(B + C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A \Rightarrow \cos A + \cos(B + C) = 0$.

c) $\tan(B + C) = \tan(180^\circ - A) = -\tan A \Rightarrow \tan A + \tan(B + C) = 0$.

d) $\cot(B + C) = \cot(180^\circ - A) = -\cot A \Rightarrow \cot A + \cot(B + C) = 0$.

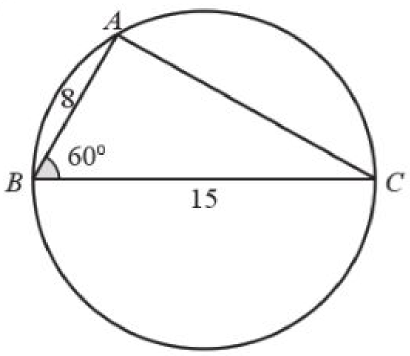
Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 4 Từ một tấm bìa hình tròn, bạn An cắt ra được một hình tam giác có các cạnh $AB = 8$ cm, $BC = 15$ cm và góc $B = 60^\circ$ (*Hình 4*). Tính độ dài cạnh AC và bán kính R của miếng bìa.

Giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \, . \, BC \, . \, \cos B$$
$$= 8^2 + 15^2 - 2 \, . \, 8 \, . \, 15 \, . \, \cos 60^\circ = 169.$$



Hình 4

Suy ra $AC = \sqrt{169} = 13$ (cm).

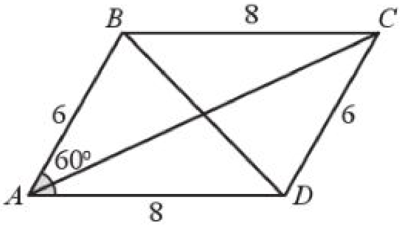
Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có:

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R.$$

Suy ra $R = \dfrac{AC}{2\sin B} = \dfrac{13}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{13\sqrt{3}}{3}$ (cm).

Ví dụ 5 Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 6$, $AD = 8$, $\widehat{BAD} = 60°$ (*Hình 5*). Tính độ dài các đường chéo AC, BD.

Giải



Hình 5

Ta có: $\widehat{ABC} = 180° - \widehat{BAD} = 180° - 60° = 120°$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\,.\,BC\,.\,\cos\widehat{ABC}$$
$$= 6^2 + 8^2 - 2\,.\,6\,.\,8\,.\,\cos 120° = 148.$$

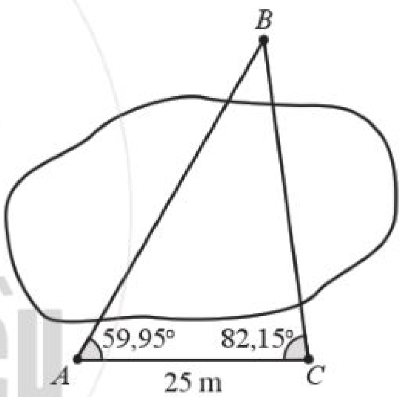
Suy ra $AC = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABD ta có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\,.\,AD\,.\,\cos\widehat{BAD} = 6^2 + 8^2 - 2\,.\,6\,.\,8\,.\,\cos 60° = 52.$$

Suy ra $BD = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Ví dụ 6 Để đo khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí A đến vị trí C và tiến hành đo các góc BAC, BCA. Biết $AC = 25$ m, $\widehat{BAC} = 59{,}95°$, $\widehat{BCA} = 82{,}15°$ (*Hình 6*). Hỏi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 6

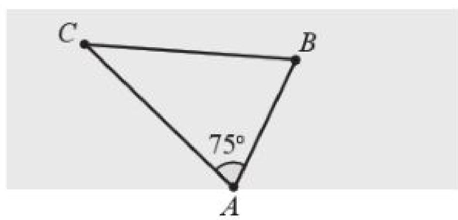
Giải

Xét tam giác ABC, ta có:

$\widehat{ABC} = 180° - 59{,}95° - 82{,}15° = 37{,}9°$.

Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B}$. Do đó $AB = \dfrac{25\sin 82{,}15°}{\sin 37{,}9°} \approx 40$ (m).

Ví dụ 7 Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến A và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc 75°. Tàu thứ nhất đi với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai đi với tốc độ 12 hải lí một giờ. Hỏi sau 2,5 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 7

Giải

Giả sử sau 2,5 giờ tàu thứ nhất ở vị trí B và tàu thứ hai ở vị trí C (*Hình 7*).

Ta có:

$AB = 2{,}5 \,.\, 8 = 20$ (hải lí);

$AC = 2{,}5 \,.\, 12 = 30$ (hải lí).

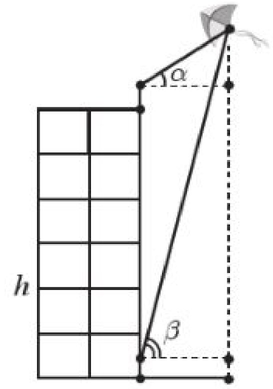
Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AC \,.\, \cos\widehat{BAC}$$

$$= 20^2 + 30^2 - 2 \,.\, 20 \,.\, 30 \,.\, \cos 75^\circ \approx 989{,}42.$$

Suy ra $BC \approx \sqrt{989,42} \approx 31,5$ (hải lí). Vậy khoảng cách giữa hai tàu sau 2,5 giờ là khoảng 31,5 hải lí.

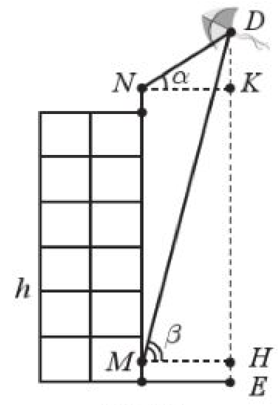
Ví dụ 8 Người A đứng ở đỉnh của toà nhà và quan sát chiếc diều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của người A tới chiếc diều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35^\circ$; khoảng cách từ đỉnh toà nhà tới mắt người A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân toà nhà, người B cũng quan sát chiếc diều và thấy góc nâng là $\beta = 75^\circ$; khoảng cách từ mặt đất đến mắt người B cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của toà nhà là $h = 20$ m (*Hình 8*). Chiếc diều bay cao bao nhiêu mét so với mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 8

Giải

Đặt tên các điểm như *Hình 9*.



Hình 9

Xét tam giác MND, ta có: $MN = h = 20$ m;

$\widehat{MND} = 90^\circ + \alpha = 90^\circ + 35^\circ = 125^\circ$,

$\widehat{NMD} = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$,

$\widehat{MDN} = 180^\circ - 125^\circ - 15^\circ = 40^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác MND ta có:

$$\frac{MD}{\sin N} = \frac{ND}{\sin M} = \frac{MN}{\sin D}.$$

Suy ra $MD = \dfrac{MN \sin N}{\sin D} = \dfrac{20 \sin 125^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 25,5$ (m). Xét tam giác vuông MHD ta có:

$HD = MD \sin 75^\circ \approx 25{,}5 \,.\, \sin 75^\circ \approx 24{,}6$ (m). Do đó, $DE \approx 1{,}5 + 24{,}6 \approx 26$ (m).

Vậy con diều bay cao khoảng 26 m so với mặt đất.

C. BÀI TẬP

1. Cho $0° < \alpha < 180°$. Chọn câu trả lời đúng.

A. $\cos\alpha < 0$. **B.** $\sin\alpha > 0$. **C.** $\tan\alpha < 0$. **D.** $\cot\alpha > 0$.

2. Cho $0° < \alpha, \beta < 180°$ và $\alpha + \beta = 180°$. Chọn câu trả lời **sai**.

A. $\sin\alpha + \sin\beta = 0$. **B.** $\cos\alpha + \cos\beta = 0$.

C. $\tan\alpha + \tan\beta = 0$. **D.** $\cot\alpha + \cot\beta = 0$.

3. Tính giá trị của biểu thức $T = \sin^2 25° + \sin^2 75° + \sin^2 115° + \sin^2 165°$.

4. Cho $\tan\alpha = -2$. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{\cos\alpha + 3\sin\alpha}{\sin\alpha + 3\cos\alpha}$.

5. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 8$, $\widehat{A} = 100°$. Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

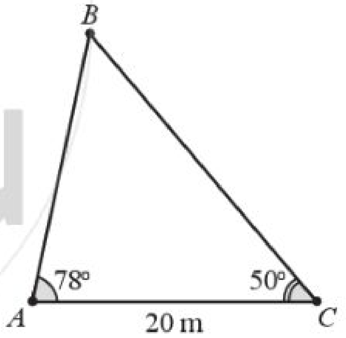
6. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60°$, $\widehat{C} = 105°$ và $BC = 15$. Tính độ dài cạnh AC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

7. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 9$. Tính số đo góc A và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

8. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$, $AC = m$, $BD = n$. Chứng minh: $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$.

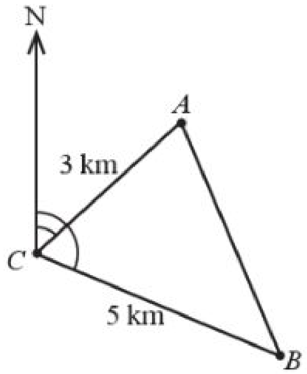
9. Từ một tấm tôn hình tròn có bán kính $R = 1$ m, bạn Trí muốn cắt ra một hình tam giác ABC có các góc $A = 45°$, $B = 75°$. Hỏi bạn Trí phải cắt miếng tôn theo hai dây cung AB, BC có độ dài lần lượt bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

10. Một cây cao bị nghiêng so với mặt đất góc 78°. Từ vị trí C cách gốc cây 20 m, người ta tiến hành đo đạc và thu được kết quả: $\widehat{ACB} = 50°$ với B là vị trí ngọn cây (*Hình 10*). Tính khoảng cách từ gốc cây (điểm A) đến ngọn cây (điểm B) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).



Hình 10

11. Tàu A cách cảng C một khoảng 3 km và lệch hướng bắc một góc 47,45°. Tàu B cách cảng C một khoảng 5 km và lệch hướng bắc một góc 112,90° (*Hình 11*). Hỏi khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 11

§2 GIẢI TAM GIÁC. TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giải tam giác khi biết:

– Độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó: Sử dụng định lí côsin.

– Độ dài ba cạnh: Sử dụng định lí côsin.

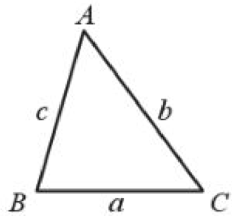
– Độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó: Sử dụng định lí sin.

2. Công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ (*Hình 12*). Khi đó diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

hoặc $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Hình 12

B. VÍ DỤ

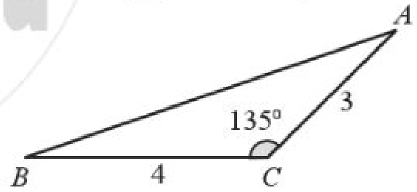
Vấn đề 1. Giải tam giác

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có $AC = 3$, $BC = 4$, $\widehat{C} = 135°$ (*Hình 13*). Tính độ dài cạnh AB và diện tích tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải. Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \,.\, BC \,.\, \cos C$$

$$= 3^2 + 4^2 - 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \cos 135° = 25 + 12\sqrt{2}.$$



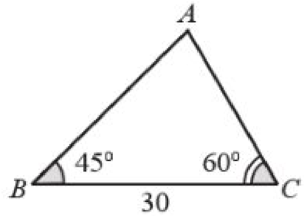
Hình 13

Suy ra $AB = \sqrt{25 + 12\sqrt{2}} \approx 6,5.$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}AC \,.\, BC \,.\, \sin C = \frac{1}{2} \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \sin 135° \approx 4,2.$$

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45°$, $\widehat{C} = 60°$ và cạnh $BC = 30$ (*Hình 14*). Tính độ dài các cạnh AB, AC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 14

Giải. Xét tam giác ABC, ta có: $\widehat{A} = 180° - 45° - 60° = 75°$. Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CA}{\sin B} = 2R$.

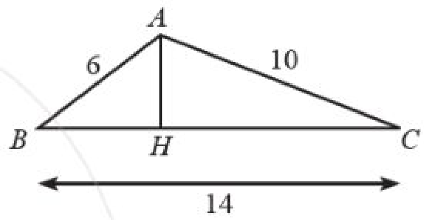
Suy ra: $AB = \dfrac{BC \sin C}{\sin A} = \dfrac{30 \,.\, \sin 60°}{\sin 75°} \approx 26,9$; $AC = \dfrac{BC \sin B}{\sin A} = \dfrac{30 \,.\, \sin 45°}{\sin 75°} \approx 22,0$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $R = \dfrac{BC}{2 \sin A} = \dfrac{30}{2 \sin 75°} \approx 15,5$.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 10$, $BC = 14$. Tính số đo góc A và độ dài đường cao AH của tam giác ABC (*Hình 15*).

Giải. Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \,.\, AC} = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \,.\, 6 \,.\, 10} = -\frac{1}{2}.$$



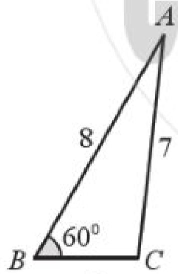
Hình 15

Do đó, $\widehat{A} = 120°$. Diện tích tam giác ABC là:

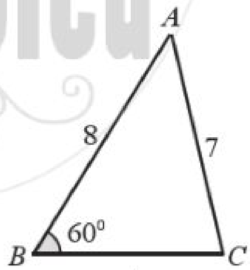
$$S = \frac{1}{2} AB \,.\, AC \,.\, \sin A = \frac{1}{2} \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, \sin 120° = 15\sqrt{3}.$$

Độ dài đường cao AH là: $AH = \dfrac{2S}{BC} = \dfrac{2 \,.\, 15\sqrt{3}}{14} = \dfrac{15\sqrt{3}}{7}$.

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC. Tính độ dài cạnh BC và số đo các góc A, C trong mỗi *Hình 16*, *17*:



Hình 16



Hình 17

Giải. Đặt $BC = x$ $(x > 0)$. Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \,.\, BC \,.\, \cos B \Rightarrow 7^2 = 8^2 + x^2 - 2 \,.\, 8 \,.\, x \,.\, \cos 60°$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = 3$ hoặc $x = 5$. Vậy $BC = 3$ hoặc $BC = 5$.

• Trường hợp 1: $BC = 3$ (*Hình 16*).

Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$. Suy ra $\sin A = \dfrac{BC \sin B}{AC} = \dfrac{3 \sin 60°}{7} = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

Do đó, $\widehat{A} \approx 21,8°$ và $\widehat{C} \approx 180° - 60° - 21,8° = 98,2°$.

• Trường hợp 2: $BC = 5$ (*Hình 17*).

Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$. Suy ra $\sin A = \dfrac{BC \sin B}{AC} = \dfrac{5 \sin 60°}{7} = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

Do đó, $\widehat{A} \approx 38,2°$ và $\widehat{C} \approx 180° - 60° - 38,2° = 81,8°$.

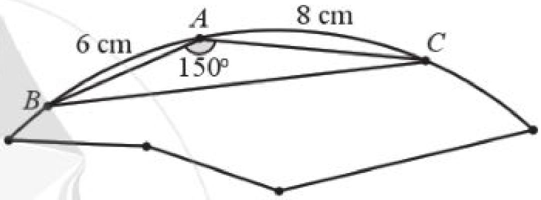
Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 5 Từ một phần của miếng tôn hình tròn người ta cắt ra được một hình tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $\widehat{A} = 150°$ (*Hình 18*). Tính bán kính của miếng tôn ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị xăng-ti-mét) và diện tích tam giác ABC.

Giải. Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AC \,.\, \cos A$
$= 6^2 + 8^2 - 2 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, \cos 150° \approx 183,14.$

Suy ra $BC \approx \sqrt{183,14} \approx 13,5$ (cm).



Hình 18

Áp dụng định lí sin ta có $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$. Suy ra, bán kính của miếng tôn ban đầu là:

$R = \dfrac{BC}{2 \sin A} \approx \dfrac{13,5}{2 \,.\, \sin 150°} = 13,5$ (cm).

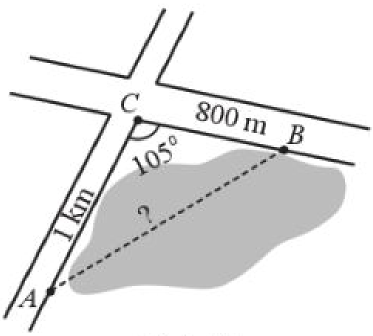
Diện tích tam giác ABC là: $S = \dfrac{1}{2} AB \,.\, AC \,.\, \sin A = \dfrac{1}{2} \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, \sin 150° = 12$ (cm^2).

Ví dụ 6 Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A và B mà ta không thể đi trực tiếp từ A đến B (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy, …) người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm C sao cho ta đo được các khoảng cách AC, CB và góc ACB. Sau khi đo ta nhận được: $AC = 1$ km, $CB = 800$ m và $\widehat{ACB} = 105°$ (*Hình 19*). Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).

Giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \,.\, CB \,.\, \cos C$
$= 1\,000^2 + 800^2 - 2 \,.\, 1\,000 \,.\, 800 \,.\, \cos 105°$
$\approx 2\,054\,110,472.$

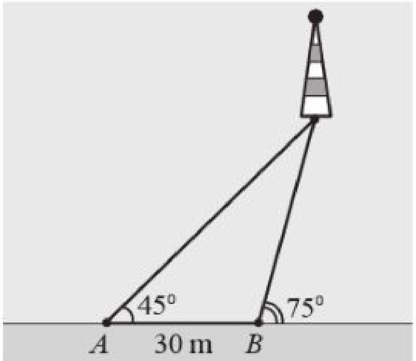


Hình 19

Suy ra $AB \approx \sqrt{2\,054\,110,472} \approx 1\,433,2$.

Vậy khoảng cách AB là xấp xỉ 1 433,2 m.

Ví dụ 7 Một người đi dọc bờ biển từ vị trí A đến vị trí B và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí A, B tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát lần lượt là $45°$ và $75°$. Biết khoảng cách giữa hai vị trí A, B là 30 m (*Hình 20*). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 20

Giải. Gọi vị trí ngọn hải đăng là điểm C, H là hình chiếu của C trên đường thẳng AB.

Ta có: $\widehat{ACB} = 75° - 45° = 30°$ (tính chất góc ngoài tam giác). Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có: $\dfrac{BC}{\sin 45°} = \dfrac{AB}{\sin 30°}$.

Do đó, $BC = \dfrac{30 \sin 45°}{\sin 30°} = 30\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông BCH, ta có: $CH = BC \sin 75° = 30\sqrt{2} \sin 75° \approx 41$ (m).

Vậy ngọn hải đăng cách bờ biển khoảng 41 m.

C. BÀI TẬP

12. Cho tam giác ABC có $AB = 6{,}5$ cm, $AC = 8{,}5$ cm, $\hat{A} = 125°$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị tương ứng):

a) Độ dài cạnh BC; b) Số đo các góc B, C; c) Diện tích tam giác ABC.

13. Cho tam giác ABC có $BC = 50$ cm, $\hat{B} = 65°$, $\hat{C} = 45°$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị xăng-ti-mét):

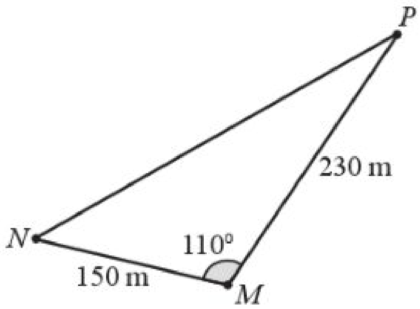
a) Độ dài các cạnh AB, AC; b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

14. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $BC = 9$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười):

a) Số đo các góc A, B, C; b) Diện tích tam giác ABC.

15. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60°$, $BC = 8$, $AB + AC = 12$. Tính độ dài các cạnh AB, AC.

16. Gia đình bạn An sở hữu một mảnh đất hình tam giác. Chiều dài của hàng rào MN là 150 m, chiều dài của hàng rào MP là 230 m. Góc giữa hai hàng rào MN và MP là $110°$ (*Hình 21*).

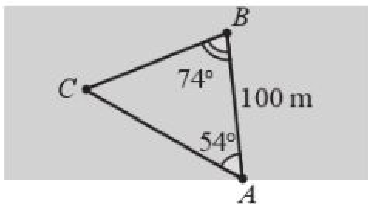


Hình 21

a) Diện tích mảnh đất mà gia đình bạn An sở hữu là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

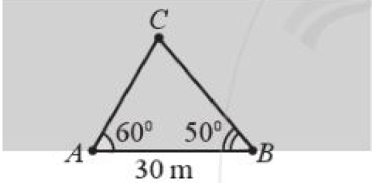
b) Chiều dài hàng rào NP là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

17. Hai người A và B cùng quan sát một con tàu đang neo đậu ngoài khơi tại vị trí C. Người A đứng trên bờ biển, người B đứng trên một hòn đảo cách bờ một khoảng $AB = 100$ m. Hai người tiến hành đo đạc và thu được kết quả: $\widehat{CAB} = 54°$, $\widehat{CBA} = 74°$ (*Hình 22*). Hỏi con tàu cách hòn đảo bao xa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét)?

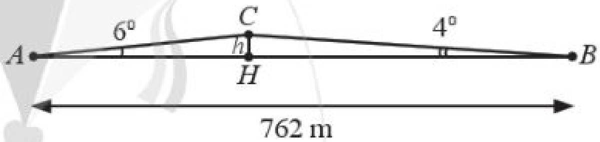


Hình 22

18. Một người đi dọc bờ biển từ vị trí A đến vị trí B và quan sát một con tàu C đang neo đậu ngoài khơi. Người đó tiến hành đo đạc và thu được kết quả: $AB = 30$ m, $\widehat{CAB} = 60°$, $\widehat{CBA} = 50°$ (*Hình 23*). Tính khoảng cách từ vị trí A đến con tàu C (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).



Hình 23



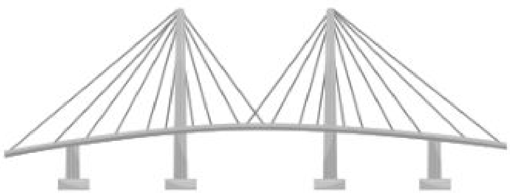
Hình 24

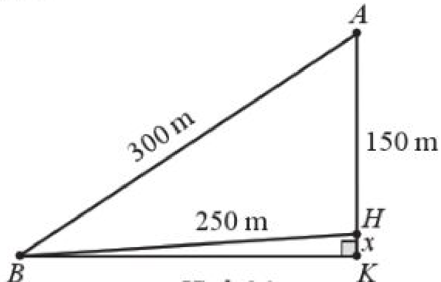
19. Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống một con dốc (*Hình 24*). Cho biết đoạn thẳng AB dài 762 m, $\widehat{A} = 6°$, $\widehat{B} = 4°$.

a) Tính chiều cao h của con dốc theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ trung bình lên dốc là 4 km/h và tốc độ trung bình khi xuống dốc là 19 km/h.

20. Quan sát cây cầu dây văng minh hoạ ở *Hình 25*.

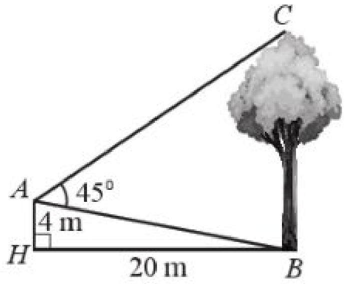

Hình 25



Hình 26

Tại trụ cao nhất, khoảng cách từ đỉnh trụ (vị trí A) tới chân trụ trên mặt cầu (vị trí H) là 150 m, độ dài dây văng dài nhất nối từ đỉnh trụ xuống mặt cầu (vị trí B) là 300 m, khoảng cách từ chân dây văng dài nhất tới chân trụ trên mặt cầu là 250 m (*Hình 26*). Tính độ dốc của cầu qua trụ nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).

21. Một người đứng ở vị trí A trên nóc một ngôi nhà cao 4 m đang quan sát một cây cao cách ngôi nhà 20 m và đo được $\widehat{BAC} = 45°$ (*Hình 27*). Tính chiều cao của cây đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).



Hình 27

§3 KHÁI NIỆM VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– *Vectơ* là một đoạn thẳng có hướng.

– Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

– Độ dài vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ kí hiệu là $|\vec{a}|$.

– Vectơ bằng nhau

+ Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

+ Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

+ Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

+ Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

– Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu $\vec{0}$.

Vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ và có độ dài bằng 0.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định vectơ; xác định phương, hướng của các vectơ

Ví dụ 1 Cho tứ giác $ABCD$. Viết các vectơ khác $\vec{0}$ thoả mãn:

a) Có điểm đầu là A, điểm cuối là một trong các đỉnh của tứ giác trên.

b) Có điểm cuối là B, điểm đầu là một trong các đỉnh của tứ giác trên.

Giải

a) Các vectơ thoả mãn là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

b) Các vectơ thoả mãn là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DB}$.

Ví dụ 2 Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Chỉ ra ba cặp vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm A, B, C thoả mãn:

a) Cặp vectơ đó cùng hướng.

b) Cặp vectơ đó ngược hướng.

Giải

a) Ba cặp vectơ cùng hướng là: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CA}$.

b) Ba cặp vectơ ngược hướng là: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Ví dụ 3 Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Xác định vectơ thoả mãn:

a) Có điểm đầu là A, điểm cuối là một trong các đỉnh của hình vuông trên và có độ dài là a.

b) Có điểm cuối là C, điểm đầu là một trong các đỉnh của hình vuông trên và có độ dài là a.

Giải

a) Các vectơ thoả mãn là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

b) Các vectơ thoả mãn là: $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}$.

Ví dụ 4 Trong mặt phẳng cho tam giác ABC. Tập hợp tất cả các điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ là hình gì?

A. Đường thẳng AB. **B**. Tia BA.

C. Tia AB. **D**. Đường thẳng đi qua A song song với BC.

Giải

Vì $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ nên giá của $\overrightarrow{AM}$ song song với giá của $\overrightarrow{BC}$. Như vậy, tập hợp tất cả các điểm M là đường thẳng đi qua A và song song với BC. Vậy chọn đáp án D.

Ví dụ 5 Trong mặt phẳng cho tam giác ABC. Tập hợp tất cả các điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là hình gì?

A. Đoạn thẳng AB. **B**. Tia BA.

C. Tia AB. **D**. Đường thẳng AB.

Giải

Vì $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ nên giá của $\overrightarrow{AM}$ trùng với giá của $\overrightarrow{AB}$ và B, M cùng phía so với A hoặc M trùng A. Như vậy, tập hợp tất cả các điểm M là tia AB. Vậy chọn đáp án C.

Vấn đề 2. Độ dài của vectơ

Ví dụ 6 Cho ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 3a$, $AC = 4a$. Tính $\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

Giải

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{25a^2} = 5a.$

Ví dụ 7 Cho ABC là tam giác đều cạnh a và M là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{AM}\right|$.

Giải

Vì tam giác ABC đều nên trung tuyến AM cũng là đường cao. Vậy ta có: $\left|\overrightarrow{AM}\right| = AM = AB \, . \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

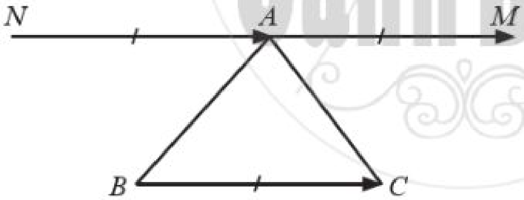
Vấn đề 3. Hai vectơ bằng nhau

Ví dụ 8 Cho tam giác ABC. Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Vẽ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

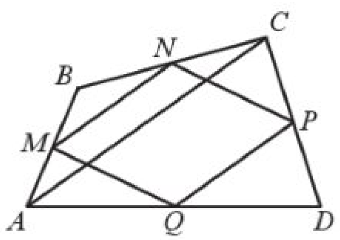
b) Vẽ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{BC}$.

Giải (*Hình 28*)



Hình 28

Ví dụ 9 Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của bốn cạnh AB, BC, CD, DA (*Hình 29*). Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.



Hình 29

Giải

Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \,//\, AC$, $MN = \dfrac{1}{2}AC$.

Vì QP là đường trung bình của tam giác ACD nên $QP \,//\, AC$, $QP = \dfrac{1}{2}AC$.

Suy ra $MN \,//\, QP$, $MN = QP$ nên $MNPQ$ là hình bình hành. Vậy $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Ví dụ 10 Trong mặt phẳng cho hai điểm phân biệt A, B. Tập hợp tất cả các điểm M thoả mãn $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}|$ là hình gì?

A. Đường tròn tâm A bán kính AB. **B**. Đường trung trực của đoạn thẳng AB.

C. Đường tròn tâm B bán kính AB. **D**. Đoạn thẳng AB.

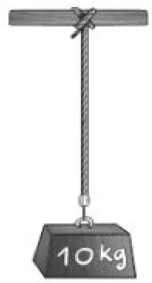
Giải

Ta có: $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}| \Leftrightarrow MA = MB$.

Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thoả mãn $MA = MB$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB. Chọn đáp án B.

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 11 Treo một vật có khối lượng 10 kg vào một sợi dây (*Hình 30*). Sử dụng vectơ $\overrightarrow{P}$ để biểu diễn trọng lực, vectơ $\overrightarrow{T}$ để biểu diễn lực căng của dây tác dụng lên vật đó. Chọn các khẳng định đúng trong các phát biểu sau:



Hình 30

a) $\overrightarrow{P}$ có phương thẳng đứng; b) $\overrightarrow{T}$ có phương thẳng đứng;

c) $\overrightarrow{P}$ có hướng từ trên xuống dưới; d) $\overrightarrow{P}$ có hướng từ dưới lên trên;

e) $\overrightarrow{T}$ có hướng từ trên xuống dưới; g) $\overrightarrow{T}$ có hướng từ dưới lên trên.

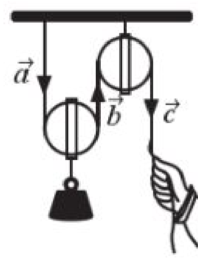
Giải

Các phát biểu đúng là a, b, c, g.

Ví dụ 12 Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (*Hình 31*).

a) Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng phương.

b) Trong các cặp vectơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng?



Hình 31

Giải

a) Các cặp vectơ cùng phương là $\vec{a}$ và $\vec{b}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$, $\vec{c}$ và $\vec{a}$.

b) Cặp vectơ cùng hướng là $\vec{c}$ và $\vec{a}$. Các cặp vectơ ngược hướng là $\vec{a}$ và $\vec{b}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

BÀI TẬP

22. Trong mặt phẳng cho hai điểm phân biệt A, B. Tập hợp tất cả các điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$ là hình gì?

A. Đường thẳng AB.
B. Tia AB.
C. Tia đối của tia AB trừ điểm A.
D. Đoạn thẳng AB.

23. Trong mặt phẳng cho hai điểm phân biệt A, B. Tập hợp tất cả các điểm M thoả mãn $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AB}|$ là hình gì?

A. Đường trung trực của đoạn thẳng AB.
B. Đường tròn tâm A bán kính AB.
C. Đường tròn tâm B bán kính AB.
D. Đoạn thẳng AB.

24. Cho hình thang $ABCD$ có AB và CD song song với nhau. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng.
C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ ngược hướng.
D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

25. Cho $\vec{a} = \vec{b}$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng độ dài.
C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.
D. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

26. Cho điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.
B. $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ cùng hướng.
C. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.
D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

27. Cho năm điểm phân biệt A, B, C, D, E.

a) Viết các vectơ khác $\vec{0}$ có cùng điểm đầu là A, điểm cuối là một trong các điểm đã cho.

b) Viết các vectơ khác $\vec{0}$ có cùng điểm cuối là B, điểm đầu là một trong các điểm đã cho.

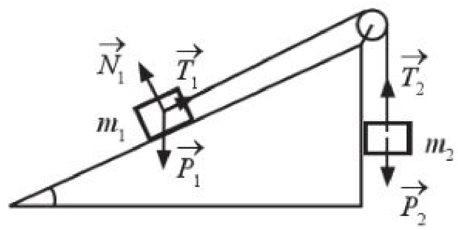
28. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$.

29. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$;
b) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{CN}$.

30. Trong mặt phẳng nghiêng không có ma sát, cho hệ vật m_1, m_2, hai vật nối với nhau bằng một sợi dây không dãn vắt qua ròng rọc (*Hình 32*). Giả sử bỏ qua khối lượng của dây và ma sát của ròng rọc.



Hình 32

a) Tìm các cặp vectơ cùng phương trong các vectơ ở *Hình 32*.

b) Những cặp vectơ cùng phương đó có cùng hướng không?

31*. Cho đường tròn tâm O và dây cung BC không đi qua O. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC của đường tròn sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH}$ có độ dài không đổi.

§4 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

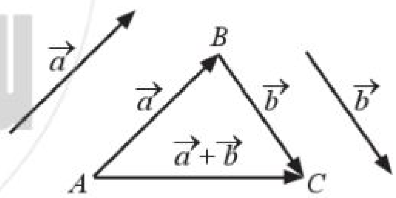
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Tổng của hai vectơ

1. Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (*Hình 33*).



Hình 33

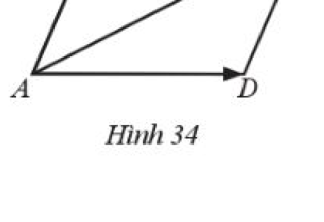
Nhận xét: Công thức trên cho ta cách rút gọn tổng nhiều vectơ liên tiếp mà điểm cuối của mỗi vectơ trong tổng là điểm đầu của vectơ liền sau nó (trừ vectơ cuối cùng). Đồng thời, ta cũng phân tích được một vectơ thành tổng của hai hoặc nhiều vectơ khác. Ta cũng gọi công thức trên là *quy tắc cộng*.

2. Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (*Hình 34*).

Nhận xét: Công thức trên cho ta một cách rút gọn tổng của hai vectơ có cùng điểm đầu.



Hình 34

3. Tính chất

Với ba vectơ tuỳ ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta có:

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (tính chất của vectơ-không).

Chú ý: Tổng ba vectơ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \text{ hoặc } \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

II. Hiệu của hai vectơ

1. Hai vectơ đối nhau

Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là *vectơ đối* của $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Với hai điểm A, B bất kì ta có $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$.

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$.

2. Định nghĩa

Phép trừ vectơ $\vec{a}$ cho vectơ $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$. Như vậy $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Với ba điểm O, A, B bất kì ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Nhận xét: Công thức trên cho ta cách biểu thị một vectơ thành hiệu hai vectơ có cùng điểm đầu. Ta cũng gọi công thức trên là quy tắc trừ.

III. Trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác

I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Chứng minh đẳng thức vectơ

Phương pháp:

– Biến đổi từ biểu thức vế này sang vế kia.
– Chứng minh hai biểu thức vectơ cùng bằng một vectơ trung gian
– Chứng minh hai biểu thức vectơ cùng bằng một biểu thức vectơ trung gian bằng cách sử dụng quy tắc trừ với điểm đầu là điểm O bất kì.

Ví dụ 1 Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$.

Giải

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

Từ các đẳng thức trên, ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$.

Ví dụ 2 Cho năm điểm A, B, C, D, E. Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.

Giải

Cách 1: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$.

Cách 2: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.

Cách 3: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}$

$=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AE}$.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác. M, N, P là ba điểm bất kì. Chứng minh $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$.

Giải

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}$

$=(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$.

Nhận xét: Ta đã sử dụng quy tắc cộng để tách mỗi vectơ ở vế trái bằng tổng một vectơ ở vế phải cộng với một vectơ khác.

Ví dụ 4 Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F.

Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FA}$.

Giải

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})-(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OF})$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OE}$.

$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD})-(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OF})$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OE}$.

Từ hai đẳng thức trên, ta có: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FA}$.

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NB}$.

Giải

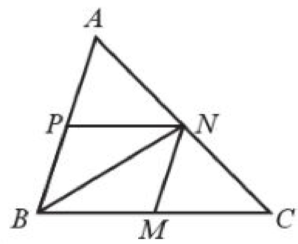
Ta biến đổi tổng của hai vectơ không cùng điểm đầu về tổng của hai vectơ cùng điểm đầu và dùng quy tắc hình bình hành.

Vì NP là đường trung bình của tam giác ABC (*Hình 35*) nên $NP \parallel BC$, $NP = \dfrac{1}{2}BC$.

Suy ra $NP \parallel BM$, $NP = BM$ và tứ giác $BMNP$ là hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$.

Suy ra $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB}$.



Hình 35

Vấn đề 2. Độ dài của vectơ

Phương pháp:

– Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính độ dài.

– Sử dụng tính chất của các tam giác đặc biệt: tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, tam giác vuông cân.

– Sử dụng tính chất của tứ giác đặc biệt: hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành,…

Ví dụ 6 Cho ABC là tam giác đều cạnh a. Tính: a) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$, b) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

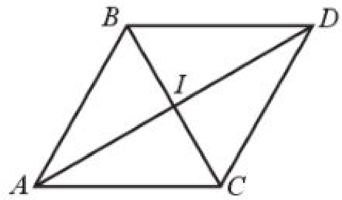
Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = BC = a$.

b) Dựng hình bình hành $ABDC$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Gọi I là giao điểm của AD và BC, ta có I là trung điểm của BC và AD (*Hình 36*). Vì tam giác ABC đều nên

$$AI \perp BC \Rightarrow AI = AB \,.\, \sin B = a \,.\, \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

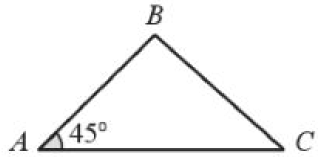
Do đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = 2AI = a\sqrt{3}$.



Hình 36

Ví dụ 7 Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $AC = 3a$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$ (*Hình 37*). Tính:

a) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$; b) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.



Hình 37

Giải

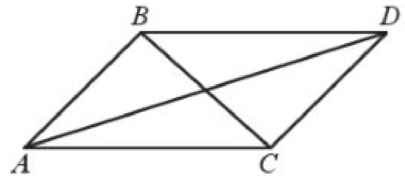
a) Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\ .\ AC\ .\ \cos A$$
$$= (2a)^2 + (3a)^2 - 2\ .\ 2a\ .\ 3a\ .\ \cos 45^\circ = (13 - 6\sqrt{2})a^2.$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$.

b) Dựng hình bình hành $ABDC$ (*Hình 38*), ta có:



Hình 38

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

$\widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 135^\circ$, $BD = AC = 3a$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABD ta có:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB\ .\ BD\ .\ \cos\widehat{ABD}$$
$$= (2a)^2 + (3a)^2 - 2\ .\ 2a\ .\ 3a\ .\ \cos 135^\circ = (13 + 6\sqrt{2})a^2.$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$.

Ví dụ 8 Cho tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

Giải

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có: $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = BD = AC$.

Vì $ABCD$ cũng là một hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Từ đó suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

Ví dụ 9 Cho hai điểm A, B. Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thoả mãn $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}|$.

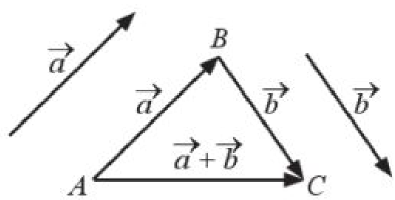
Giải. $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow AM = AB$.

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A bán kính AB.

Ví dụ 10 Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương.

Chứng minh rằng $|\vec{a}| + |\vec{b}| > |\vec{a} + \vec{b}|$.

Giải



Hình 39

Từ một điểm A trong mặt phẳng, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ thì $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (*Hình 39*).

Vì hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $AB + BC > AC$. Vậy suy ra $|\vec{a}|+|\vec{b}| > |\vec{a}+\vec{b}|$.

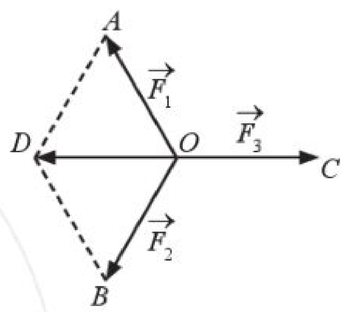
Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 11 Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm O và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ đều là 120 N và $\widehat{AOB} = 120°$. Xác định cường độ và hướng của lực $\overrightarrow{F_3}$.

Giải

Dựng hình bình hành $OADB$ (*Hình 40*), ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$. Vì vật đứng yên nên $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$, tức là $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ hay O là trung điểm của CD. Như vậy $\overrightarrow{OD}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OC}$ hay hướng của lực $\overrightarrow{F_3}$ ngược hướng với tổng hợp hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$.



Hình 40

Hình bình hành $OADB$ có $OA = OB$ nên là hình thoi.

Suy ra $\widehat{AOD} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 60°$ nên tam giác OAD là tam giác đều, do đó $OD = OA$.

Vậy ta có $OC = OA$ và cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$ bằng cường độ của lực $\overrightarrow{F_1}$ và bằng 120 N.

Ví dụ 12 Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là 10 km/h. Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc 40 km/h so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

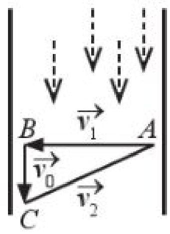
Giải

Giả sử ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây, từ vị trí A bên phải con sông sang vị trí B bên trái con sông (*Hình 41*).

Gọi $\vec{v}_0$ là vận tốc của dòng nước so với bờ sông, $|\vec{v}_0| = 10$ (km/h),

$\vec{v}_1$ là vận tốc của ca nô so với mặt nước, $|\vec{v}_1| = 40$ (km/h),

$\vec{v}_2$ là vận tốc của ca nô so với bờ sông.



Hình 41

Vì phương của hai vectơ $\vec{v}_0, \vec{v}_1$ vuông góc với nhau nên theo định lí Pythagore, ta có: $|\vec{v}_0|^2+|\vec{v}_1|^2=|\vec{v}_2|^2 \Rightarrow |\vec{v}_2| = \sqrt{|\vec{v}_0|^2+|\vec{v}_1|^2} = \sqrt{10^2+40^2} = 10\sqrt{17}$ (km/h).

Vậy vận tốc của ca nô so với bờ sông theo hướng từ A đến C có độ lớn là $10\sqrt{17}$ km/h.

C. BÀI TẬP

32. Cho ba điểm M, N, P phân biệt. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

B. $-\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{MP}$.

33. Cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$.

34. Cho các điểm A, B, O. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

35. Cho ba điểm A, B, M phân biệt. Điều kiện cần và đủ để M là trung điểm của đoạn thẳng AB là:

A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

B. $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$.

C. $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng.

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

36. Cho tam giác ABC. Điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm của tam giác ABC là:

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.

B. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB}$.

D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

37. Cho tứ giác $ABCD$, O là trung điểm của AB. Chứng minh:

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

38. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 4a$, $AC = 5a$. Tính:

a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$; b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

39. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính:

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$; c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

40. Cho tam giác ABC thoả mãn $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

41. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Chứng minh rằng nếu hai vectơ cùng hướng thì $|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$.

42. Cho hình vuông *ABCD* cạnh *a*. Tính $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$.

43. Cho tứ giác *ABCD* là hình bình hành. Gọi *O* là giao điểm của hai đường chéo, *E* là trung điểm của *AD*, *G* là giao điểm của *BE* và *AC*. Tính:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$; b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}$.

44. Cho tam giác *ABC*. Tìm tập hợp các điểm *M* trong mặt phẳng thoả mãn $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}|$.

45. Cho hai tam giác *ABC* và *A'B'C'* có cùng trọng tâm là *G*. Chứng minh $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

46. Cho tam giác nhọn *ABC* có các cạnh đôi một khác nhau. Gọi *H*, *O* lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác, *D* là điểm đối xứng với *H* qua *O*. Chứng minh $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

§5 TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Định nghĩa

Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số *k* với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

– Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;

– Có độ dài bằng $|k| \,.\, |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a}=\vec{0}$, $k\vec{0}=\vec{0}$.

II. Tính chất

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực *h*, *k*, ta có:

- $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; $k(\vec{a}-\vec{b})=k\vec{a}-k\vec{b}$;
- $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$;

- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;
- $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Nhận xét: $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

III. Một số ứng dụng

1. Trung điểm của đoạn thẳng

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với điểm M bất kì.

2. Trọng tâm của tam giác

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với điểm M bất kì.

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định điểm thoả mãn đẳng thức vectơ cho trước

Ví dụ 1 Cho đoạn thẳng $AB = 3$ cm. Xác định các điểm M, N thoả mãn:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Giải. (*Hình 42*)

Do $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng, $AM = \frac{1}{3}AB$. Vậy điểm M thuộc tia AB thoả mãn $AM = \frac{1}{3}AB = 1$ cm.

Hình 42

Do $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng, $AN = \frac{1}{3}AB$. Vậy điểm N thuộc tia đối của tia AB thoả mãn $AN = \frac{1}{3}AB = 1$ cm.

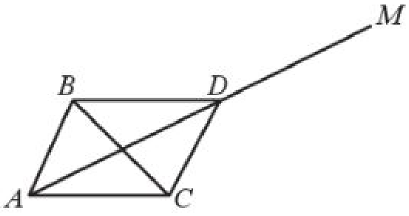
Ví dụ 2 Cho tam giác ABC. Xác định điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Giải

Dựng hình bình hành $ABDC$, theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD}$.

Vậy M là điểm thuộc tia AD thoả mãn $AM = 2AD$ (*Hình 43*).



Hình 43

Ví dụ 3 Cho tứ giác $ABCD$. Xác định điểm M thoả mãn

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

Giải

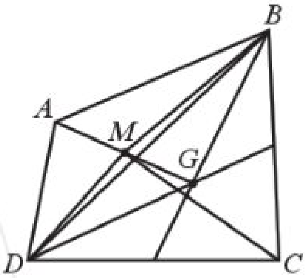
Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD, ta có:

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Nhận thấy $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG} = \vec{0}$.

Vậy M là trung điểm của đoạn thẳng AG (*Hình 44*).



Hình 44

Vấn đề 2. Biểu thị một vectơ theo một vectơ cùng phương

Phương pháp: Sử dụng tính chất sau:

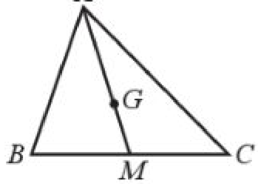
– Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng hướng và $|\vec{a}| = m \,.\, |\vec{b}|$ thì $\vec{a} = m\vec{b}$.

– Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) ngược hướng và $|\vec{a}| = m \,.\, |\vec{b}|$ thì $\vec{a} = -\, m\vec{b}$.

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm của BC (*Hình 45*).

a) Biểu thị $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AM}$;

b) Biểu thị $\overrightarrow{GA}$ theo $\overrightarrow{GM}$.



Hình 45

Giải

a) Vì $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng và $|\overrightarrow{AG}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AM}|$ nên $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

b) Vì $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GM}$ ngược hướng và $|\overrightarrow{GA}| = 2|\overrightarrow{GM}|$ nên $\overrightarrow{GA} = -\, 2\overrightarrow{GM}$.

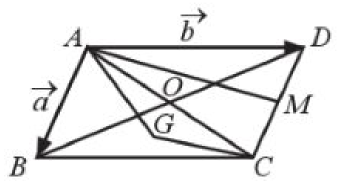
Vấn đề 3. Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Phương pháp:

– Sử dụng định nghĩa, tính chất của các phép toán: phép cộng vectơ, phép trừ vectơ, phép nhân một số với một vectơ.

– Sử dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác, hình bình hành.

Ví dụ 5 Cho hình bình hành *ABCD*. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*, *M* là trung điểm của *CD*, *G* là trọng tâm của tam giác *OBC* (*Hình 46*). Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CG}$ theo hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.



Hình 46

Giải

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$.

Vì $\overrightarrow{AO}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ và $|\overrightarrow{AO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

Vì *M* là trung điểm của *CD* nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.

Vì *G* là trọng tâm của tam giác *OBC* nên

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\right]=\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AC}=\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}.$$

Ví dụ 6 Cho đoạn thẳng *AB* và số *k* khác 1. Điểm *M* thoả mãn $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$. Với mỗi điểm *O*, biểu thị các vectơ $\overrightarrow{OM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

Giải

$$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Rightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$

$$\Rightarrow(1-k)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1-k}(\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}).$$

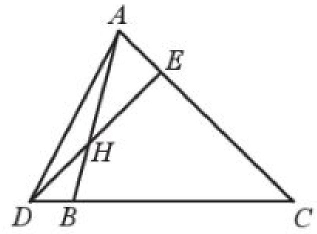
Nhận xét: Khi $k=-1$, tức là *M* là trung điểm của *AB*, thì

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1-(-1)}[\overrightarrow{OA}-(-1)\overrightarrow{OB}]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

Ví dụ 7 Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E, H thoả mãn $\overrightarrow{DB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ (*Hình 47*).

a) Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{HE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng ba điểm D, H, E thẳng hàng.



Hình 47

Giải

a) Ta có:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \left(\frac{6}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{-8}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

b) Từ các đẳng thức trên, ta có: $\overrightarrow{HE} = \frac{5}{4}\left(\frac{-8}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{5}{4}\overrightarrow{DH}.$

Vậy hai vectơ $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{DH}$ cùng phương nên D, H, E thẳng hàng.

Nhận xét: Nếu bỏ câu a) thì việc chứng minh câu b) trở nên khó khăn.

Khi đó, ta chuyển bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng về bài toán chứng minh hai vectơ cùng phương, chuyển bài toán chứng minh hai vectơ cùng phương về bài toán biểu diễn hai vectơ theo hai vectơ (không cùng phương) cho trước.

Vấn đề 4. Chứng minh đẳng thức vectơ

Phương pháp:

– Xét hiệu của hai vế.

– Biến đổi từ biểu thức vế này sang vế kia.

– Chứng minh hai biểu thức vectơ cùng bằng một vectơ trung gian.

– Chứng minh hai biểu thức vectơ cùng bằng một biểu thức vectơ trung gian bằng cách sử dụng quy tắc trừ với điểm đầu là điểm O bất kì.

Ví dụ 8 Cho hình bình hành $ABCD$ và M là một điểm tuỳ ý. Chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Giải

Cách 1:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})=(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})-(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Cách 2:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC và BD.

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$. Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

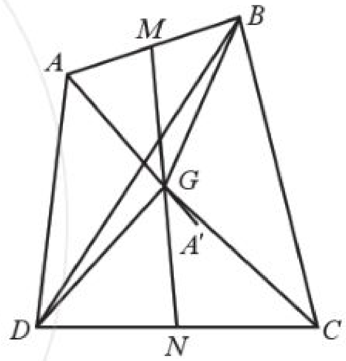
Ví dụ 9 Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN, A' là trọng tâm của tam giác BCD (*Hình 48*). Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$;

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$;

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$ với O bất kì;

d) $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$.



Hình 48

Giải

a) Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}$

$=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM})+(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND})+2\overrightarrow{MN}=-\vec{0}+\vec{0}+2\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MN}$.

b) Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$.

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$.

Suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=2(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN})=2\vec{0}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GD}$

$=4\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{OG}+\vec{0}=4\overrightarrow{OG}$.

d) Sử dụng kết quả câu c) khi điểm O trùng điểm A, ta có:

$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG}$.

Vì A' là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AA'}$.

Từ hai đẳng thức trên suy ra $3\overrightarrow{AA'}=4\overrightarrow{AG}$. Vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$.

C. BÀI TẬP

47. Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OA}$.

B. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OB}$.

C. $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{OB}$.

D. $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AB}$.

48. Cho tam giác ABC và M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{GM}$.

B. $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{GM}$.

C. $\overrightarrow{AM}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{GM}$.

D. $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{GM}$.

49. Cho $\vec{a}\neq\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{a}$ và $4\vec{a}$ cùng phương.

B. $\vec{a}$ và $-4\vec{a}$ cùng phương.

C. $\vec{a}$ và $4\vec{a}$ không cùng hướng.

D. $\vec{a}$ và $-4\vec{a}$ ngược hướng.

50. Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa hai điểm A, B. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC}=\frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$.

B. $\overrightarrow{AC}=-\frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{AC}=\frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$.

D. $\overrightarrow{AC}=-\frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$.

51. Cho đoạn thẳng BC và điểm A nằm giữa hai điểm B, C. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC}=\frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$.

B. $\overrightarrow{AC}=-\frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{AC}=\frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$.

D. $\overrightarrow{AC}=-\frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$.

52. Cho tam giác ABC. Xác định các điểm M, N, P trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$; b) $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$; c) $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

53. Cho tam giác ABC, kẻ phân giác AD. Đặt $AB = b$, $AC = c$. Chứng minh:

$$b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \vec{0}.$$

54*. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P thoả mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

55*. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E, M, N thoả mãn $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM}$ với k là số thực. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EN}$ theo các vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ và tìm k để ba điểm D, E, N thẳng hàng.

56*. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm A', B', C' không trùng với đỉnh của tam giác và lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CA thoả mãn $\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = \frac{CC'}{CA}$. Chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

§6 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ khác $\vec{0}$.

– Ta gọi góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA, OB và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

– Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số thực, kí hiệu $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

Định nghĩa 2

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

– Góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.

– Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \,.\, \vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \,.\, \vec{b} = |\vec{a}| \,.\, |\vec{b}| \,.\, \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

+ Khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $\vec{a} \,.\, \vec{b} = |\vec{a}| \,.\, |\vec{b}|$.

+ Khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng thì $\vec{a} \,.\, \vec{b} = -\, |\vec{a}| \,.\, |\vec{b}|$.

+ Khi $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì $\vec{a} \,.\, \vec{b} = 0$.

2. Tính chất

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và số thực k tuỳ ý, ta có:

$\vec{a} \,.\, \vec{b} = \vec{b} \,.\, \vec{a}$ (tính chất giao hoán);

$\vec{a} \,.\, (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \,.\, \vec{b} + \vec{a} \,.\, \vec{c}$ (tính chất phân phối);

$(k\vec{a}) \,.\, \vec{b} = k(\vec{a} \,.\, \vec{b}) = \vec{a} \,.\, (k\vec{b})$;

$\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Nhận xét: $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \,.\, \vec{b} + \vec{b}^2$; $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \,.\, \vec{b} + \vec{b}^2$;

$(\vec{a} - \vec{b}) \,.\, (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ

Ví dụ 1 Tính $\vec{a} \,.\, \vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 7$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$;

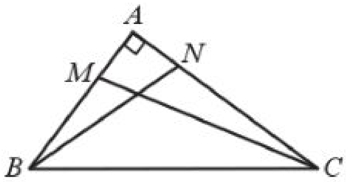
b) $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 9$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$.

Giải

a) $\vec{a} \,.\, \vec{b} = |\vec{a}| \,.\, |\vec{b}| \,.\, \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 6 \,.\, 7 \,.\, \cos 45^\circ = 42 \,.\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 21\sqrt{2}$.

b) $\vec{a} \,.\, \vec{b} = |\vec{a}| \,.\, |\vec{b}| \,.\, \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 8 \,.\, 9 \,.\, \cos 150^\circ = 72 \,.\, \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = -\,36\sqrt{3}$.

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3$, $AC = 4$. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC thoả mãn $AM = AN = 1$ (*Hình 49*). Tính $\overrightarrow{BN} . \overrightarrow{CM}$.



Hình 49

Giải

Vì $\widehat{A} = 90°$ nên $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{AN} = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{BN} . \overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}) . (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC})$

$$= \overrightarrow{AN} . \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} . \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$$

$$= 0 - \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} . \overrightarrow{AC} + 0 = -\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} . \overrightarrow{AC}.$$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AM} = AB . AM = 3 . 1 = 3$.

Vì hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AN} = AC . AN = 4 . 1 = 4$.

Suy ra $\overrightarrow{BN} . \overrightarrow{CM} = -4 - 3 = -7$.

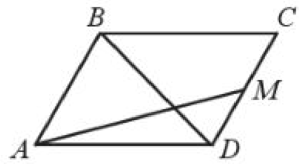
Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$. M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BC}$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) . (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2)$

$$= \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2\right) = \frac{1}{2}(6^2 - 4^2) = 10.$$

Ví dụ 4 Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 3$, $AD = 4$, $\widehat{A} = 60°$. M là trung điểm của CD (*Hình 50*). Tính $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BD}$.



Hình 50

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

Suy ra

$$\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) . (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} . \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} . \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$$

$$= AD^2 - \frac{1}{2}AD . AB . \cos\widehat{BAD} - \frac{1}{2}AB^2$$

$$= 4^2 - \frac{1}{2} . 4 . 3 . \cos 60° - \frac{1}{2} . 3^2 = \frac{17}{2}.$$

Vấn đề 2. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng

Phương pháp:

– Biến đổi từ biểu thức vế này sang vế kia.

– Chứng minh hai biểu thức cùng bằng một biểu thức trung gian.

– Sử dụng các tính chất của phép toán vectơ, tính chất của tích vô hướng.

– Tách vectơ, biến đổi về các tích vô hướng khác.

Ví dụ 5 Cho hình thoi *ABCD*. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB}\,.\,(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{AD}\,.\,(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=0.$$

Giải

Vì *ABCD* là hình thoi nên $AC \perp BD$. Khi đó, ta có:

$\overrightarrow{AB}\,.\,(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{AD}\,.\,(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\,.\,(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD}=0$.

Ví dụ 6 Cho đoạn thẳng *AB* và *O* là trung điểm của *AB*. Với mỗi điểm *M*, chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=2\overrightarrow{MO}\,.\,\overrightarrow{BA}$.

Giải

Cách 1: $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\,.\,(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=2\overrightarrow{MO}\,.\,\overrightarrow{BA}$.

Cách 2: $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2-(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2$

$=\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}\,.\,\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{MO}^2-2\overrightarrow{MO}\,.\,\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}^2$

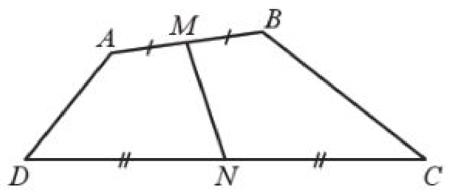
$=2\overrightarrow{MO}\,.\,(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=2\overrightarrow{MO}\,.\,\overrightarrow{BA}$.

Vấn đề 3. Tính khoảng cách giữa hai điểm, chứng minh đẳng thức độ dài

Phương pháp: Sử dụng tính chất:

Với hai điểm *A*, *B* phân biệt, ta có $\overrightarrow{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2$, do đó $AB=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Ví dụ 7 Cho tứ giác *ABCD* có *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD* (*Hình 51*). Biết $AD=2$, $BC=3$, $AD\perp BC$. Tính độ dài đoạn thẳng *MN*.



Hình 51

Giải

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$.

Từ đó, ta có:

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Do đó $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AD} \,.\, \overrightarrow{BC})$

$= \frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 0\right) = \frac{1}{4}(2^2 + 3^2) = \frac{13}{4}$. Vậy $MN = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Ví dụ 8 Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB. Với mỗi điểm M, chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + OA^2 + OB^2$.

Giải

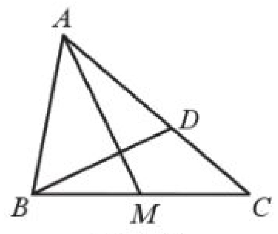
$$\begin{aligned}MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2\\ &= \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \,.\, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \,.\, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2\\ &= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \,.\, (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\\ &= 2MO^2 + OA^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO} \,.\, \vec{0}\\ &= 2MO^2 + OA^2 + OB^2.\end{aligned}$$

Vấn đề 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp: Sử dụng các tính chất:

Hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vectơ $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng b.

Ví dụ 9 Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60°$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Điểm D thuộc cạnh AC thoả mãn $AD = \frac{7}{12}AC$ (*Hình 52*). Chứng minh $AM \perp BD$.



Hình 52

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \,.\, \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \,.\, \left(\frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12}\,.\,2\,.\,3\,.\,\frac{1}{2} + \frac{7}{12}\,.\,3^2 - 2^2 - 2\,.\,3\,.\,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(7-4-3) = 0.$$ Vậy $AM \perp BD$.

Vấn đề 5. Tính góc giữa hai vectơ

Phương pháp: Với hai vectơ khác vectơ $\vec{0}$, sử dụng công thức $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|}$.

Ví dụ 10 Tính $(\vec{a}, \vec{b})$ biết rằng $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a}\,.\,\vec{b} = -6\sqrt{3}$.

Giải

Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|} = \dfrac{-6\sqrt{3}}{3\,.\,4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$. Do đó, $(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$.

C. BÀI TẬP

57. Cho tam giác ABC. Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{CA}$ bằng:

A. $AB\,.\,AC\,.\,\cos\widehat{BAC}$.

B. $-AB\,.\,AC\,.\,\cos\widehat{BAC}$.

C. $AB\,.\,AC\,.\,\cos\widehat{ABC}$.

D. $AB\,.\,AC\,.\,\cos\widehat{ACB}$.

58. Cho tam giác ABC. Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}$ bằng:

A. $AB\,.\,BC\,.\,\cos\widehat{ABC}$.

B. $AB\,.\,AC\,.\,\cos\widehat{ABC}$.

C. $-AB\,.\,BC\,.\,\cos\widehat{ABC}$.

D. $AB\,.\,BC\,.\,\cos\widehat{BAC}$.

59. Cho đoạn thẳng AB. Tập hợp các điểm M nằm trong mặt phẳng thoả mãn $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$ là:

A. Đường tròn tâm A bán kính AB.

B. Đường tròn tâm B bán kính AB.

C. Đường trung trực của đoạn thẳng AB.

D. Đường tròn đường kính AB.

60. Nếu hai điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{NM} = -9$ thì:

A. $MN = 9$.

B. $MN = 3$.

C. $MN = 81$.

D. $MN = 6$.

61. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Các điểm M, N lần lượt thuộc các tia BC và CA thoả mãn $BM = \frac{1}{3}BC$, $CN = \frac{5}{4}CA$. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BN}$;

b) MN.

62. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{A} = 120°$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

63. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

64*. Cho hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BC. N là điểm nằm giữa hai điểm A và C. Đặt $x = \dfrac{AN}{AC}$. Tìm x thoả mãn $AM \perp BN$.

65*. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác. Với mỗi điểm M, chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

66. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 650 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 35 km/h. Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

67. Cho góc nhọn α. Biểu thức $(\sin\alpha \cdot \cot\alpha)^2 + (\cos\alpha \cdot \tan\alpha)^2$ bằng:

A. 2.

B. $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$.

C. 1.

D. $\sin\alpha + \cos\alpha$.

68. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\cos(\vec{a}, \vec{b})|$.

B. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

69. Cho tứ giác $ABCD$. Biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng:

A. CD^2.

B. 0.

C. $\vec{0}$.

D. 1.

70. Cho góc nhọn α. Biểu thức $\tan\alpha \cdot \tan(90° - \alpha)$ bằng:

A. $\tan\alpha + \cot\alpha$.

B. $\tan^2\alpha$.

C. 1.

D. $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$.

71. Cho α thoả mãn $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$. Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, $\sin(90° - \alpha)$, $\cos(90° - \alpha)$, $\sin(180° - \alpha)$, $\cos(180° - \alpha)$ trong các trường hợp sau:

a) $0° < \alpha < 90°$;

b) $90° < \alpha < 180°$.

72. Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 6, \widehat{BAC} = 60°$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

a) Độ dài cạnh BC và độ lớn góc B;

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp R;

c) Diện tích của tam giác ABC;

d) Độ dài đường cao xuất phát từ A;

e) $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} \,.\, \overrightarrow{AC}$ với M là trung điểm của BC.

73. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

74. Cho tam giác ABC có $AB = 5, BC = 6, CA = 7$. Tính:

a) $\sin\widehat{ABC}$;

b) Diện tích tam giác ABC;

c) Độ dài trung tuyến AM.

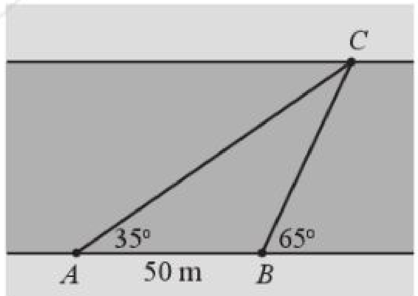
75. Cho ba điểm phân biệt I, A, B và số thực $k \neq 1$ thoả mãn $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB}$. Chứng minh rằng với O là điểm bất kì ta có:

$$\overrightarrow{OI} = \left(\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{OA} - \left(\frac{k}{1-k}\right)\overrightarrow{OB}.$$

76. Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 5, \widehat{BAC} = 120°$. Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng BC, điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC}$ và chứng minh $AM \perp BD$.

77. Một người quan sát đứng ở bờ sông muốn đo độ rộng của khúc sông chỗ chảy qua vị trí đang đứng (khúc sông tương đối thẳng, có thể xem hai bờ song song với nhau).

Từ vị trí đang đứng A, người đó đo được góc nghiêng $\alpha = 35°$ so với bờ sông tới một vị trí C quan sát được ở phía bờ bên kia. Sau đó di chuyển dọc bờ sông đến vị trí B cách A một khoảng $d = 50$ m và tiếp tục đo được góc nghiêng $\beta = 65°$ so với bờ sông tới vị trí C đã chọn (*Hình 53*). Hỏi độ rộng của con sông chỗ chảy qua vị trí người quan sát đang đứng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 53

78. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

Tính $(\vec{a} + 2\vec{b}) \,.\, (2\vec{a} - \vec{b})$.

79. a) Chứng minh đẳng thức $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\vec{a}\,.\,\vec{b}$ với $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ bất kì.

b) Cho $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{7}$. Tính $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ và $(\vec{a}, \vec{b})$.

80. Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}\,.\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0.$$

81*. Cho tứ giác $ABCD$. M là điểm thay đổi trong mặt phẳng thoả mãn $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\,.\,(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}) = 0$. Chứng minh rằng điểm M luôn nằm trên một đường tròn cố định.

82*. Cho tam giác ABC và đường thẳng d không có điểm chung với bất kì cạnh nào của tam giác. M là điểm thay đổi trên đường thẳng d. Xác định vị trí của M sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1 ĐỊNH LÍ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÍ SIN TRONG TAM GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

1. B. 2. A.

3. Ta có: $\sin 115° = \sin(180° - 115°) = \sin 65° = \cos(90° - 65°) = \cos 25°$;

$\sin 165° = \sin(180° - 165°) = \sin 15° = \cos(90° - 15°) = \cos 75°$.

Do đó, $T = \sin^2 25° + \sin^2 75° + \cos^2 25° + \cos^2 75°$

$= (\sin^2 25° + \cos^2 25°) + (\sin^2 75° + \cos^2 75°) = 1 + 1 = 2$.

4. Vì $\tan\alpha = -2$ nên $\cos\alpha \neq 0$. Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos\alpha$ ta có:

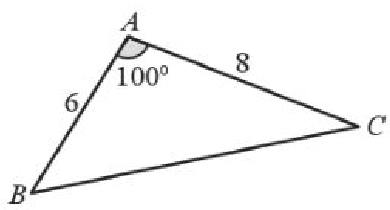
$$P = \frac{1+3\tan\alpha}{\tan\alpha+3} = \frac{1+3\,.\,(-2)}{(-2)+3} = -5.$$

5. Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC (*Hình 54*) ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,.\,AC\,.\,\cos A$

$= 6^2 + 8^2 - 2\,.\,6\,.\,8\,.\,\cos 100° \approx 116{,}67$.

Suy ra $BC \approx \sqrt{116{,}67} \approx 10{,}8$.



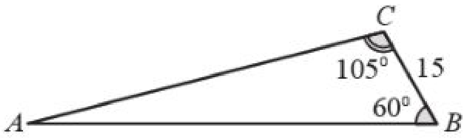
Hình 54

Áp dụng định lí sin ta có:

$$2R = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow R \approx \frac{10{,}8}{2\sin 100°} \approx 5{,}5.$$

6. Ta có: $\widehat{A} = 180° - 105° - 60° = 15°$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác *ABC* (*Hình 55*) ta có:

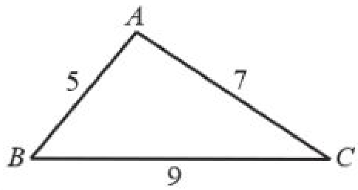


Hình 55

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R.$$

Do đó: $AC = \dfrac{BC\sin B}{\sin A} = \dfrac{15\sin 60°}{\sin 15°} \approx 50$; $\quad R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{15}{2\,.\,\sin 15°} \approx 29.$

7. Áp dụng định lí côsin cho tam giác *ABC* (*Hình 56*) ta có:



Hình 56

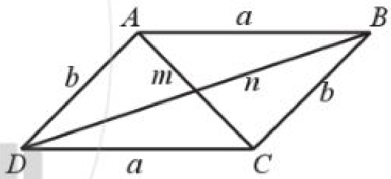
$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\,.\,AC} = \frac{5^2 + 7^2 - 9^2}{2\,.\,5\,.\,7} = -\frac{1}{10}.$$

Do đó, $\widehat{A} \approx 95,7°$.

Áp dụng định lí sin ta có: $2R = \dfrac{BC}{\sin A} \Rightarrow R \approx \dfrac{9}{2\sin 95,7°} \approx 4,5.$

8. Đặt $\widehat{ABC} = \alpha$, ta có: $\widehat{BAD} = 180° - \alpha$.

Xét tam giác *ABC* (*Hình 57*), áp dụng định lí côsin ta có:



Hình 57

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\,.\,BC\,.\,\cos\widehat{ABC}$

$\Rightarrow m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$

Xét tam giác *ABD*, áp dụng định lí côsin ta có:

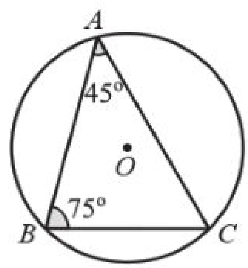
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\,.\,AD\,.\,\cos\widehat{BAD}$

$\Rightarrow n^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$

Vậy $m^2 + n^2 = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha) + (a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha) = 2(a^2 + b^2)$.

9. Xét tam giác *ABC* (*Hình 58*), ta có:

$\widehat{C} = 180° - 45° - 75° = 60°.$



Hình 58

Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = 2R = 2.$

Suy ra: $AB = 2\sin C = 2\sin 60° \approx 1,73$ (m);

$BC = 2\sin A = 2\sin 45° \approx 1,41$ (m).

Vậy bạn Trí phải cắt miếng tôn theo hai dây cung *AB*, *BC* có độ dài lần lượt là xấp xỉ 1,73 m và 1,41 m.

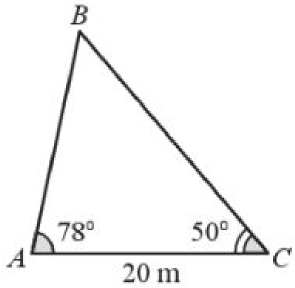
10. Xét tam giác ABC (*Hình 59*), ta có:

$\widehat{B} = 180° - 50° - 78° = 52°$.

Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B}$.

Do đó: $AB = \dfrac{20\sin 50°}{\sin 52°} \approx 19,4$ (m).

Vậy chiều dài của cây là xấp xỉ 19,4 m.



Hình 59

11. Xét *Hình 60*, ta có:

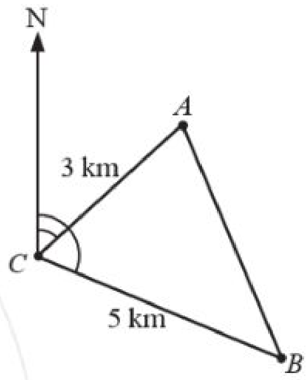
$\widehat{ACB} = 112,90° - 47,45° = 65,45°$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \,.\, BC \,.\, \cos\widehat{ACB}$

$= 3^2 + 5^2 - 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, \cos 65,45° \approx 21,54$.

Suy ra $AB \approx \sqrt{21,54} \approx 4,64$ (km). Vậy khoảng cách giữa hai tàu là khoảng 4,64 km.



Hình 60

§2 GIẢI TAM GIÁC. TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

12. Xét tam giác ABC (*Hình 61*):

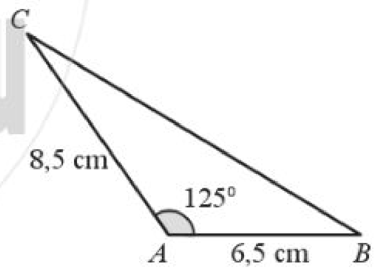
a) Áp dụng định lí côsin ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AC \,.\, \cos A$

$= 6,5^2 + 8,5^2 - 2 \,.\, 6,5 \,.\, 8,5 \,.\, \cos 125°$

$\approx 177,88$.

Suy ra $BC \approx \sqrt{177,88} \approx 13,3$ (cm).



Hình 61

b) Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CA}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$.

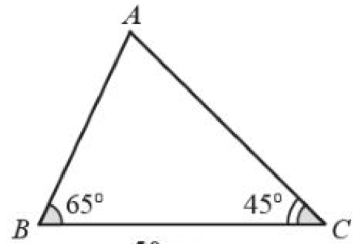
Suy ra: $\sin B = \dfrac{CA\sin A}{BC} \approx \dfrac{8,5\sin 125°}{13,3} \approx 0,52 \Rightarrow \widehat{B} \approx 31,3°$

$\Rightarrow \widehat{C} \approx 180° - 31,3° - 125° = 23,7°$.

c) Diện tích tam giác ABC là:

$S = \dfrac{1}{2}AB \,.\, AC \,.\, \sin A = \dfrac{1}{2} \,.\, 6,5 \,.\, 8,5 \,.\, \sin 125° \approx 22,6\ (\text{cm}^2)$.

13. Xét tam giác ABC (*Hình 62*):



Hình 62

Ta có: $\widehat{A} = 180° - 65° - 45° = 70°$.

Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CA}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C} = 2R$.

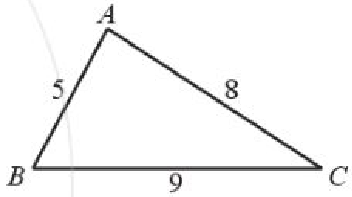
a) Ta có:

$$AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{50 \sin 45°}{\sin 70°} \approx 37,6 \text{ (cm)};$$

$$AC = \frac{BC \sin B}{\sin A} = \frac{50 \sin 65°}{\sin 70°} \approx 48,2 \text{ (cm)}.$$

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $R = \dfrac{50}{2\sin 70°} \approx 26,6$ (cm).

14. Xét tam giác ABC (*Hình 63*):



Hình 63

a) Áp dụng định lí côsin ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\ .\ AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 9^2}{2\ .\ 5\ .\ 8} = 0,1$$

$\Rightarrow \widehat{A} \approx 84,3°$.

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB\ .\ BC} = \frac{5^2 + 9^2 - 8^2}{2\ .\ 5\ .\ 9} = \frac{7}{15}$$

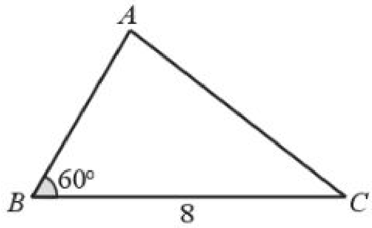
$\Rightarrow \widehat{B} \approx 62,2°$.

Do đó, $\widehat{C} \approx 180° - 84,3° - 62,2° = 33,5°$.

b) Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} AB\ .\ AC\ .\ \sin A \approx \frac{1}{2}\ .\ 5\ .\ 8\ .\ \sin 84,3° \approx 19,9.$$

15. Xét tam giác ABC (*Hình 64*):



Hình 64

Đặt $AB = x$ $(x > 0)$. Khi đó, $AC = 12 - x$ $(x < 12)$.

Áp dụng định lí côsin ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\ .\ BC\ .\ \cos B$

$\Rightarrow (12 - x)^2 = x^2 + 64 - 2x\ .\ 8\ .\ \cos 60°$

$\Rightarrow 144 - 24x + x^2 = x^2 + 64 - 8x \Rightarrow x = 5$.

Vậy độ dài cạnh AB là 5, độ dài cạnh AC là $12 - 5 = 7$.

16. a) Diện tích mảnh đất của gia đình bạn An (tam giác MNP) là:

$$S = \frac{1}{2}MN \,.\, MP \,.\, \sin M = \frac{1}{2} \,.\, 150 \,.\, 230 \,.\, \sin 110^\circ \approx 16\ 209,7\ (\text{m}^2).$$

b) Áp dụng định lí côsin ta có:

$$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN \,.\, MP \,.\, \cos M = 150^2 + 230^2 - 2 \,.\, 150 \,.\, 230 \,.\, \cos 110^\circ$$
$$\approx 98\ 999,39.$$

Suy ra $NP \approx \sqrt{98\ 999,39} \approx 314,6$ (m).

Vậy chiều dài hàng rào NP là khoảng 314,6 m.

17. Xét tam giác ABC. Ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - 54^\circ - 74^\circ = 52^\circ$.

Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{BA}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A}$.

Suy ra $BC = \dfrac{BA \sin A}{\sin C} = \dfrac{100 \sin 54^\circ}{\sin 52^\circ} \approx 102,7$ (m).

Vậy con tàu cách hòn đảo khoảng 102,7 m.

18. Xét tam giác ABC. Ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$.

Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{BA}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B}$.

Suy ra $AC = \dfrac{BA \sin B}{\sin C} = \dfrac{30 \sin 50^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 24,5$ (m).

Vậy khoảng cách từ vị trí A đến con tàu C là khoảng 24,5 m.

19. a) Xét tam giác ABC ta có: $\widehat{ACB} = 180^\circ - 6^\circ - 4^\circ = 170^\circ$. Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \dfrac{AB \sin B}{\sin C} = \dfrac{762 \sin 4^\circ}{\sin 170^\circ} \approx 306$ (m).

Xét tam giác vuông AHC ta có $h = CH = AC\sin A \approx 306 \sin 6^\circ \approx 32$ (m).

Vậy chiều cao con dốc là khoảng 32 m.

b) Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \dfrac{762 \sin 6^\circ}{\sin 170^\circ} \approx 459$ (m).

Ta có: $AC \approx 306$ m $= 0,306$ km; $CB \approx 459$ m $= 0,459$ km.

Như vậy, thời gian bạn An đi từ nhà đến trường là:

$$t = \frac{AC}{4} + \frac{CB}{19} \approx \frac{0,306}{4} + \frac{0,459}{19} \approx 0,1\ (\text{giờ}) = 6\ (\text{phút}).$$

Vậy bạn An đến trường lúc khoảng 6 giờ 6 phút.

20. Độ dốc của cầu là góc nghiêng giữa đường cầu qua trụ và phương nằm ngang, tức là góc KBH.

Xét tam giác ABH, áp dụng định lí côsin ta có:

$$\cos\widehat{AHB} = \frac{BH^2 + AH^2 - AB^2}{2BH \,.\, AH} = \frac{250^2 + 150^2 - 300^2}{2 \,.\, 250 \,.\, 150} = -\frac{1}{15} \Rightarrow \widehat{AHB} \approx 93{,}8°.$$

Xét tam giác BHK ta có: $\widehat{HBK} \approx 93{,}8° - 90° = 3{,}8°$ (tính chất góc ngoài tam giác).

Vậy độ dốc của cầu qua trụ theo đề bài là khoảng 3,8°.

21. Xét tam giác vuông ABH ta có: $AB = \sqrt{4^2 + 20^2} = 4\sqrt{26}$ (m) (định lí Pythagore) và $\tan\widehat{ABH} = \frac{4}{20} = 0{,}2 \Rightarrow \widehat{ABH} \approx 11{,}3°$. Do đó, $\widehat{ABC} \approx 90° - 11{,}3° = 78{,}7°$.

Suy ra $\widehat{ACB} \approx 180° - 45° - 78{,}7° = 56{,}3°$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$

$\Rightarrow BC = \frac{AB\sin A}{\sin C} \approx \frac{4\sqrt{26}\sin 45°}{\sin 56{,}3°} \approx 17{,}3$ (m). Vậy cây cao khoảng 17,3 m.

§3 KHÁI NIỆM VECTƠ

22. C. **23. B.** **24. B.** **25. C.** **26. D.**

27. a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$. b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB}$.

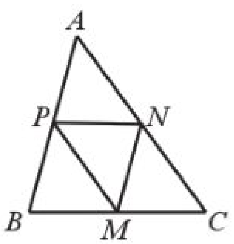
28. $|\overrightarrow{AB}| = AB = a$, $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

29. Xét tam giác ABC (*Hình 65*).

a) Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \,//\, AB$, $MN = \frac{1}{2}AB$.

Suy ra $MN \,//\, AP$, $MN = AP$. Vậy $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$.

b) Chứng minh tương tự như câu a).



Hình 65

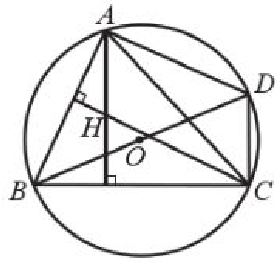
30. Học sinh tự làm.

31*. Kẻ đường kính BD của (O). Khi đó, D là điểm cố định (*Hình 66*).

Ta chứng minh được $AHCD$ là hình bình hành.

Suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$.

Vậy $AH = |\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{DC}| = DC$ cố định hay $\overrightarrow{AH}$ có độ dài không đổi.



Hình 66

§4 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

32. C. **33.** A. **34.** B. **35.** D. **36.** B.

37. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

$= \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

38. a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{41}$. b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{41}$.

39. a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = a$. b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a$. c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

40. Dựng hình bình hành $ABDC$. Từ giả thiết suy ra $AD = BC$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật. Do đó tam giác ABC vuông tại A.

41. Từ một điểm A trong mặt phẳng, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng thì ba điểm A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Suy ra $AB + BC = AC$.

Vậy $|\vec{a}| + |\vec{b}| = AB + BC = AC = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.

42. Dựng hình bình hành $ABEC$ (*Hình 67*).

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = AE$.

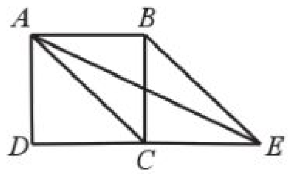
Vì $CD \parallel AB$, $CE \parallel AB$ nên C, D, E thẳng hàng.

Ta có: $DE = DC + CE = 2a$.

Tam giác ADE vuông tại D, suy ra

$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

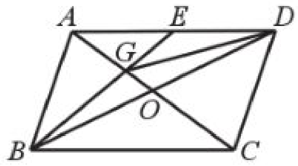
Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = a\sqrt{5}$.



Hình 67

43. a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của cả hai đoạn thẳng AC và BD. Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

b) Vì tam giác *ABD* (*Hình 68*) có hai đường trung tuyến *AO* và *BE* cắt nhau tại *G* nên *G* là trọng tâm của tam giác. Do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.



Hình 68

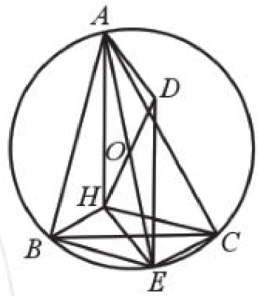
44. Tập hợp các điểm *M* là đường trung trực của đoạn thẳng *AC*.

45. $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GC'}$

$$=(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG})+(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'})$$

$$=-\,(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'})=-\,\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}.$$

46. Kẻ đường kính *AE*. Ta có *BH* // *EC*, *CH* // *BE*. Suy ra *BHCE* là hình bình hành. Tứ giác *AHED* có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên cũng là hình bình hành. Ta có: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{HD}$ (*Hình 69*).



Hình 69

§5 TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

47. B. **48. D**. **49. C**. **50. A**. **51. B**.

52. a) Điểm *M* nằm ở vị trí thoả mãn tứ giác *AMBC* là hình bình hành.

b) Lấy *K* là trung điểm *BC*. Điểm *N* đối xứng với *K* qua *A*.

c) Điểm *P* nằm trên tia *Cx* song song với *AB*, cùng phía *A* so với *BC* và $2PC=AB$.

53. Vì hai vectơ $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ ngược hướng và $|\overrightarrow{DB}|=\dfrac{DB}{DC}\,.\,|\overrightarrow{DC}|$ nên

$$\overrightarrow{DB}=-\,\frac{DB}{DC}\overrightarrow{DC}=-\,\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}=-\,\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}\Rightarrow b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}=\vec{0}.$$

54*. $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b}),$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{-3}{10}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{-1}{5}\vec{a}+\frac{2}{15}\vec{b}.$$

Suy ra $\overrightarrow{NP}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{-3}{10}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}\right)=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MN}$. Vậy *M*, *N*, *P* thẳng hàng.

55*. $\overrightarrow{AN} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = k\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) = k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{2k}{3}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{b},$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b},$

$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AN} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2k}{3}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{b} = \frac{2k}{3}\vec{a} + \frac{5k-6}{15}\vec{b}.$

Ba điểm phân biệt D, E, N thẳng hàng khi và chỉ khi có số thực t thoả mãn

$$\overrightarrow{EN} = t\overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \frac{2k}{3}\vec{a} + \frac{5k-6}{15}\vec{b} = t\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2k}{3} + \frac{t}{3}\right)\vec{a} = -\left(\frac{5k-6}{15} - \frac{2t}{5}\right)\vec{b}.$$

Vì $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương nên $\frac{2k}{3} + \frac{t}{3} = \frac{5k-6}{15} - \frac{2t}{5} = 0.$

Suy ra $k = \frac{6}{17}$.

56*. Giả sử hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G, G'.

Ta có: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$

$$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Đặt $\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = \frac{CC'}{CA} = k$, ta có: $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{CA}.$

Suy ra $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CA} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = k\vec{0} = \vec{0}.$

Từ các đẳng thức trên, ta có: $3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ hay G và G' trùng nhau.

§6 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

57. A. **58. A.** **59. D.** **60. B.**

61. a) $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \,.\, |\overrightarrow{AC}| \,.\, \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \,.\, a \,.\, \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$

$\overrightarrow{AM} \,.\, \overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \,.\, (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}) \,.\, (\overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA})$

$= \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \,.\, \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \,.\, \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \,.\, \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}$

$= a^2\cos 120^\circ + \frac{5}{4}a^2\cos 120^\circ + \frac{1}{3}a^2 + \frac{5}{12}a^2\cos 120^\circ$

$= -a^2.$

b) $MN^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN})^2 = \left(\frac{-1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2$

$= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \cos 120° + \left(\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2$

$= \frac{4}{9}a^2 - \frac{5}{6}a^2 + \frac{25}{16}a^2 = \frac{169}{144}a^2$. Vậy $MN = \frac{13}{12}a$.

62. Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 + a \cdot a \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}a^2$.

63. Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0.$

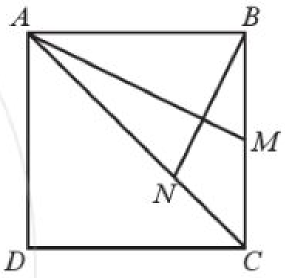
64*. (*Hình 70*) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$

$\Rightarrow \overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) \cdot \left[x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BA}\right]$

$= \left[\frac{x}{2} - (1-x)\right]BC^2 = \left(\frac{3x}{2} - 1\right)BC^2$.



Hình 70

$AM \perp BN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3x}{2} - 1\right)BC^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

65*. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$

$= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$

$= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

66. Gọi $\vec{v}_0$ là vận tốc của máy bay khi không có gió, $|\vec{v}_0| = 650$ (km/h);

$\vec{v}_1$ là vận tốc của gió, $|\vec{v}_1| = 35$ (km/h); $\vec{v}_2$ là vận tốc của máy bay khi có gió.

Ta có: $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$. Vì $(\vec{v}_1, \vec{v}_0) = 45°$ nên

$\vec{v}_2^{\,2} = (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)^2 = \vec{v}_0^{\,2} + \vec{v}_1^{\,2} + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2 + 2|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos 45°$

$= 650^2 + 35^2 + 2 \cdot 650 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 455\,898{,}36.$

Suy ra $|\vec{v}_2| \approx 675{,}2$ (km/h).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

67. C. **68. D.** **69. B.** **70. C.**

71. Ta có: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

a) Nếu $0° < \alpha < 90°$ thì $\cos\alpha > 0$ nên $\cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$.

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{3}{5}$,

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{-4}{5}$.

b) Nếu $90° < \alpha < 180°$ thì $\cos\alpha < 0$ nên $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{-4}{5} = \frac{-3}{4}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{-4}{3}$.

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha = \frac{-4}{5}$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{3}{5}$,

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

72. a) Áp dụng định lí côsin, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AC \,.\, \cos\widehat{BAC}$,

tức là $BC^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, \cos 60° = 28 \Rightarrow BC = 2\sqrt{7}$.

$\cos\widehat{ABC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \,.\, BA \,.\, BC} = \frac{4^2 + (2\sqrt{7})^2 - 6^2}{2 \,.\, 4 \,.\, 2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 79°$.

b) Áp dụng định lí sin, ta có: $R = \frac{BC}{2\sin\widehat{BAC}} = \frac{2\sqrt{7}}{2\sin 60°} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \approx 3$.

c) Diện tích tam giác ABC là:

$S = \frac{1}{2}AB \,.\, AC \,.\, \sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, \sin 60° = 6\sqrt{3} \approx 10$.

d) Gọi h_a là độ dài đường cao xuất phát từ A, ta có: $S = \frac{1}{2}h_a BC$

$\Rightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = \frac{2 \,.\, 6\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{21}}{7} \approx 4$.

e) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB\,.\,AC\,.\,\cos\widehat{BAC} = 4\,.\,6\,.\,\cos 60^\circ = 12.$

$\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\,.\,\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 = \dfrac{1}{2}\,.\,12 + \dfrac{1}{2}\,.\,6^2 = 24.$

73. $2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CB}^2$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2).$

74. a) Áp dụng định lí côsin, ta có:

$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA\,.\,BC} = \dfrac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2\,.\,5\,.\,6} = \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow (\sin\widehat{ABC})^2 = 1 - (\cos\widehat{ABC})^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{24}{25} \Rightarrow \sin\widehat{ABC} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}.$

b) Diện tích tam giác ABC là:

$S = \dfrac{1}{2}BA\,.\,BC\,.\,\sin\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}\,.\,5\,.\,6\,.\,\dfrac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}.$

c) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2 = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC})$

Ta có: $2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CB}^2$

$\Rightarrow AM^2 = \dfrac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2) = \dfrac{1}{4}(2\,.\,5^2 + 2\,.\,7^2 - 6^2) = 28$

$\Rightarrow AM = 2\sqrt{7}.$

75. $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) \Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OI}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} - k\overrightarrow{OI} = (1-k)\overrightarrow{OI} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \left(\dfrac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{OA} - \left(\dfrac{k}{1-k}\right)\overrightarrow{OB}.$

76. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB\,.\,AC\,.\,\cos\widehat{BAC} = 4\,.\,5\,.\,\cos 120^\circ = -10.$

$\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BD} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\,.\,(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\,.\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.\,\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}^2 - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB}$

$= \dfrac{1}{5}\,.\,(-10) - \dfrac{1}{2}\,.\,4^2 + \dfrac{1}{5}\,.\,5^2 - \dfrac{1}{2}\,.\,(-10) = 0.$ Suy ra $AM \perp BD.$

77. $\widehat{ABC} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ; \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{ABC} = 180^\circ - 35^\circ - 115^\circ = 30^\circ.$

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có:

$\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \dfrac{AB\sin A}{\sin C} = \dfrac{50\sin 35^\circ}{\sin 30^\circ} = 100\sin 35^\circ.$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng AB, ta có:

Độ rộng của con sông là: $CH = CB\sin 65° = 100\sin 35° \,.\, \sin 65° \approx 51{,}98$ (m).

78. $(\vec{a}+2\vec{b})\,.\,(2\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{a}^2 + 4\vec{b}\,.\,\vec{a} - \vec{a}\,.\,\vec{b} - 2\vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 + 3\vec{a}\,.\,\vec{b} - 2\vec{b}^2$

$= 2|\vec{a}|^2 + 3|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|\,.\,\cos(\vec{a},\vec{b}) - 2|\vec{b}|^2 = 2\,.\,4^2 + 3\,.\,4\,.\,5\,.\,\cos 135° - 2\,.\,5^2$

$= -18 - 30\sqrt{2}$.

79. a) Ta có: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\,.\,\vec{b}$.

b) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\,.\,\vec{b}$

$\Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\right) = \dfrac{1}{2}[(\sqrt{7})^2 - 2^2 - 3^2] = -3$.

$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|} = \dfrac{-3}{2\,.\,3} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 120°$.

80. $\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\,.\,(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2)$,

$\overrightarrow{BE}\,.\,\overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\,.\,(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{BC}^2)$,

$\overrightarrow{CF}\,.\,\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})\,.\,(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CA}^2)$.

Ta có: $\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}\,.\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}\,.\,\overrightarrow{AB}$

$= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{BC}^2) + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CA}^2) = 0$.

81*. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MQ}$.

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\,.\,(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MP}\,.\,2\overrightarrow{MQ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}\,.\,\overrightarrow{MQ} = 0$.

Nếu M không trùng với P và Q thì $\overrightarrow{MP}\,.\,\overrightarrow{MQ} = 0 \Leftrightarrow MP \perp MQ$. Do đó M thuộc đường tròn đường kính PQ.

Nếu M trùng với P hoặc Q thì hiển nhiên M thuộc đường tròn đường kính PQ.
Vậy M luôn thuộc đường tròn cố định có đường kính là PQ.

82*. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có: $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MG}| = 3GM$.

GM đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của G lên đường thẳng d.

Vậy biểu thức $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của G lên đường thẳng d.