NGUYỄN VŨ LƯƠNG (Chủ biên)
PHẠM VĂN HÙNG - NGUYỄN NGỌC THẮNG

CÁC BÀI GIẢNG VỀ BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỞ ĐẦU

Bất đẳng thức Côsi quá quen thuộc đối với hầu hết học sinh. Tuy nhiên hằng năm bằng việc sử dụng bất đẳng thức Côsi người ta vẫn xây dựng được nhiều bất đẳng thức mới, hay và khó. Các bất đẳng thức này chúng ta có thể tham khảo từ các đề thi vô địch của các quốc gia trên thế giới hay trong các đề thi khu vực và quốc tế. Phương pháp giải các bất đẳng thức dạng này rất đa dạng nên khó có thể phân loại và tổng kết thành một số ít các phương pháp giải chung. Các bạn quan tâm đến bất đẳng thức thường gặp các cuốn sách giới thiệu các bất đẳng thức cùng với cách giải cụ thể mà ít có những cuốn sách trình bày các phương pháp giải các dạng bất đẳng thức. Các tác giả của tập sách này muốn giới thiệu với bạn đọc một cách tiếp cận mới với bất đẳng thức Côsi thông qua các bài giảng đã được giảng dạy cho học sinh lớp 10 Khối Chuyên Toán - Tin Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQGHN. Tập sách là tài liệu tham khảo tốt cho học sinh năng khiếu toán lớp 9 (cuối cấp II) và lớp 10 cũng như các học sinh chuẩn bị thi vào các trường Đại học. Hy vọng bạn đọc sẽ nắm chắc nhiều phép biến đổi cơ bản và phương pháp giải trong tập sách này. Nếu sau khi hiểu rõ các bài giảng các bạn có thể xây dựng được nhiều bất đẳng thức mới, hay hơn của riêng mình thì điều này là mong muốn của các tác giả.

Trong quá trình biên soạn cuốn sách này chúng tôi đã nhận được sự động viên, khích lệ của các đồng nghiệp thuộc Khối chuyên Toán - Tin,của Ban Chủ nhiệm Khoa Toán - Cơ - Tin học và lãnh đạo Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

Cho phép chúng tôi được nói lời cám ơn đối với các tập thể và cá nhân nói trên.

Lần đầu ra mắt độc giả, có thể cuốn sách còn sai sót và nội dung chưa hoàn thiện nên rất mong sự góp ý của bạn đọc. Ý kiến góp ý của các bạn xin gửi về địa chỉ:

Khối THPT chuyên Toán - Tin,
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên,
334 Đường Nguyễn Trãi, Thanh Xuân, Hà Nội.

Mục Lục

Chương 1

Bất đẳng thức Côsi

1 Bất đẳng thức Côsi

Trong mục này chúng ta giới thiệu bất đẳng thức Côsi và một số ví dụ minh hoạ.
Trước hết chúng ta xét trường hợp đơn giản $n = 2$:

1. $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

2. Với $a, b \geqslant 0$, $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 1. Với $a, b, c \geqslant 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P = a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geqslant 4\sqrt[3]{abc}.$$

Ta có

$$P \geqslant 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \geqslant 4\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} = 4\sqrt[3]{abc}. \quad \text{(đpcm)}$$

Một số dạng tương tự:
Với $a, b, c \geqslant 0$ ta có

1. $abc \leq (\frac{a+b+c}{3})^3$,
2. $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc.$

Sau đây chúng ta chứng minh trường hợp tổng quát .

Ví dụ 2. Với $a_1, a_2, \cdots, a_n$ là các số thực không âm, chứng minh rằng

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

Ở đây ký hiệu $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$.

Giải

Cách 1
Nếu $n = 1, n = 2$ hiển nhiên bất đẳng thức đúng .
Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geqslant 2$ ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.
Ta có

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \frac{k\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}}{k+1}$$

Theo giả thiết quy nạp ta thu được

$$S_{k+1} \geqslant \frac{k\Big(\prod_{i=1}^{k} a_i\Big)^{\frac{1}{k}} + a_{k+1}}{k+1}$$

Để chứng minh bất đẳng thức đúng khi $n = k + 1$ ta cần chứng minh

$$\frac{k\Big(\prod_{i=1}^{k} a_i\Big)^{\frac{1}{k}} + a_{k+1}}{k+1} \geqslant \Big(\prod_{i=1}^{k+1} a_i\Big)^{\frac{1}{k+1}}$$

Ký hiệu

$$\alpha^{k+1} = \Big(\prod_{i=1}^{k} a_i\Big)^{\frac{1}{k}},\ \beta^{k+1} = a_{k+1}$$

Ta thu được

$$
\begin{aligned}
& k\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} \geqslant (k+1)\alpha^k \cdot \beta \\
\Leftrightarrow & k\alpha^k(\alpha - \beta) + \beta(\beta^k - \alpha^k) \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow & (\alpha - \beta)\left[k\alpha^k - \beta\left(\beta^{k-1} + \beta^{k-2}\alpha + \beta^{k-3}\alpha^2 + \cdots + \alpha^{k-1}\right)\right] \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow & (\alpha - \beta)\left[(\alpha^k - \beta^k) + (\alpha^k - \beta^{k-1}\alpha) + \cdots + (\alpha^k - \beta\alpha^{k-1})\right] \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow & (\alpha - \beta)^2\left[(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \cdots + \beta^{k-1}) + \right. \\
& \left. + \alpha(\alpha^{k-2} + \alpha^{k-3}\beta + \cdots + \beta^{k-2}) + \cdots + \alpha^{k-1}\right] \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

(Bất đẳng thức đúng vì $\alpha, \beta \geqslant 0$)
Có nhiều cách chứng minh bất đẳng thức Côsi, trong đó cách chứng minh quen thuộc nhất như sau:

Cách 2

- Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức đúng với n số không âm thì sẽ đúng với $2n$ số không âm .

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{n+i}\right] \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i \geqslant \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i+n}\right)^{\frac{1}{n}} \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{2n} a_i\right)^{\frac{1}{2n}}
\end{aligned}
$$

- Từ đó suy ra bất đẳng thức đúng với $n = 2^k$. Bất đẳng thức Côsi sẽ được chứng minh nếu chúng ta chứng minh khẳng định sau đây
Nếu bất đẳng thức đúng với $n = k$ thì cũng đúng với $n = k - 1$.
Thật vậy

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{\frac{1}{k-1}} \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{k-1} a_i + \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{\frac{1}{k-1}} \geqslant k\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{\frac{1}{k-1}}
\end{aligned}
$$

Áp dụng giả thiết quy nạp suy ra

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i + \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{\frac{1}{k-1}} \geqslant k\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \cdot \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{\frac{1}{k-1}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} a_i + \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{\frac{1}{k-1}} \geqslant k\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{(đpcm.)}$$

Sau đây chúng ta xét một số ví dụ minh hoạ

Ví dụ 3. Với $a, b, c \geqslant 0$, chứng minh rằng

$$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} - 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow c + \sqrt{ab} + \sqrt{ab} \geqslant 3\sqrt[3]{abc}.$$

Ví dụ 4. Với $0 < a, b, c < 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1-a}{1+b+c} + \frac{1-b}{1+c+a} + \frac{1-c}{1+a+b} \geqslant 3(1-a)(1-b)(1-c) \quad (1.1.1).$$

Giải

Ta có

$$(1+a+b)(1-a)(1-b) \leq \left(\frac{1+a+b+1-a+1-b}{3}\right)^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-c}{1+a+b} \geqslant (1-a)(1-b)(1-c).$$

Tương tự ta nhận được

$$\frac{1-b}{1+c+a} \geqslant (1-a)(1-b)(1-c),$$

$$\frac{1-a}{1+b+c} \geqslant (1-a)(1-b)(1-c).$$

Cộng 3 đẳng thức trên ta thu được (1.1.1).

Ví dụ 5. Với $a_i \geqslant 0 (i = \overline{1, n})$ thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2 - a_i} \geqslant \frac{n}{2n - 1}.$$

Giải

Ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} (2 - a_i) \geqslant n \left[\prod_{i=1}^{n} (2 - a_i) \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} \geqslant n \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2 - a_i} \right) \right]^{\frac{1}{n}}$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} (2 - a_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} \geqslant n^2$$

$$\Leftrightarrow (2n - 1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} \geqslant n^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{2 - a_i} \geqslant \frac{2n^2}{2n - 1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{2 - a_i} \geqslant \frac{n}{2n - 1} + n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{2 - a_i} \geqslant \frac{n}{2n - 1} + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2}{2 - a_i} - 1 \right] \geqslant \frac{n}{2n - 1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2 - a_i} \geqslant \frac{n}{2n - 1} \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{a}{c}} \leq 1. \qquad (1.1.2)$$

Hướng dẫn
Ta có

$$1 - \frac{a}{b} = \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$1 - \frac{b}{a} = \frac{c}{a} + \frac{a}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{c}{b}},$$

$$1 - \frac{c}{a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta thu được (1.1.2).

2. Với $a_i > 0$ $i = \overline{1, n}$ thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i} - 1) \geqslant (n-1)^n. \qquad (1.1.3).$$

Hướng dẫn
Đặt $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$, ta có

$$\frac{1}{a_i} - 1 = \frac{S}{a_i} - \frac{a_i}{a_i} = \frac{S - a_i}{a_i} \geqslant \frac{(n-1)\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n}}{a_i}$$

với $i = \overline{1, n}$
Nhân vế với vế của n bất đẳng thức trên ta thu được (1.1.3).

3. Với $a, b, c, d > 0$ thoả mãn điều kiện $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c})(1 + \frac{1}{d}) \geqslant 5^4. \qquad (1.1.4)$$

Hướng dẫn
Ta có

$$\frac{1}{a} + 1 = \frac{a + b + c + d + a}{a} \geqslant \frac{5\sqrt[5]{a^2 \cdot bcd}}{a}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{b}+1 \geqslant \frac{5\sqrt[5]{b^2\cdot cda}}{b},$$
$$\frac{1}{c}+1 \geqslant \frac{5\sqrt[5]{c^2\cdot dab}}{c},$$
$$\frac{1}{d}+1 \geqslant \frac{5\sqrt[5]{d^2\cdot abc}}{d}.$$

Nhân vế với vế bốn bất đẳng thức ta thu được (1.1.4)

4. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geqslant (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geqslant 3+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}.$$

Ta có

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}} = 3,$$
$$\frac{a^2}{b^2}+1 \geqslant 2\cdot\frac{a}{b},$$
$$\frac{b^2}{c^2}+1 \geqslant 2\cdot\frac{b}{c},$$
$$\frac{c^2}{a^2}+1 \geqslant 2\cdot\frac{c}{a},$$
$$\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{b}} = 3.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geqslant 3+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \quad \text{(đpcm)}.$$

5. Với $a, b, c > 1$, chứng minh rằng

$$\frac{4a^2}{a-1}+\frac{5b^2}{b-1}+\frac{3c^2}{c-1} \geqslant 48.$$

Hướng dẫn
Ta có

$$\frac{4a^2}{a-1} = 4(a+1) + \frac{4}{a-1} = 4(a-1) + \frac{4}{a-1} + 8,$$

suy ra

$$\frac{4a^2}{a-1} \geqslant 16$$

Tương tự

$$\frac{5b^2}{b-1} \geqslant 20,$$

$$\frac{3c^2}{c-1} \geqslant 12.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

6. Với $a, b, c, x, y, z > 0$, chứng minh rằng

$$\left(\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z}\right) \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

Hướng dẫn
Ta sử dụng bất đẳng thức

$$(a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3)^3 \leq (a_1^3 + b_1^3)(a_2^3 + b_2^3)(a_3^3 + b_3^3)$$

với $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0$.
Ta có

$$(a+b+c)^3 = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot 1 + \frac{b}{\sqrt[3]{y}} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot 1 + \frac{c}{\sqrt[3]{z}} \cdot \sqrt[3]{z} \cdot 1\right)^3,$$

suy ra

$$(a+b+c)^3 \leq 3\left(\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z}\right)(x+y+z),$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z}\right) \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)} \quad \text{(đpcm)}.$$

7. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{b^3}{a^2(a^3+2b^3)} + \frac{c^3}{b^2(b^3+2c^3)} + \frac{a^3}{c^2(c^3+2a^3)} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right). \quad (1.1.5)$$

Hướng dẫn

Ta có $\dfrac{ab^2}{a^3+2b^3} \leq \dfrac{1}{3}$, suy ra $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} \cdot \dfrac{ab^2}{a^3+2b^3} \geqslant \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{3b^2}$.

Thu được

$$\frac{2b^3}{a^2(a^3+2b^3)} \geqslant \frac{1}{a^2} - \frac{1}{3b^2},$$

Tương tự

$$\frac{2c^3}{c^2(b^3+2c^3)} \geqslant \frac{1}{b^2} - \frac{1}{3c^2},$$

$$\frac{2a^3}{a^2(c^3+2a^3)} \geqslant \frac{1}{c^2} - \frac{1}{3a^2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được (1.1.5).

8. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geqslant \frac{1}{9}(a+b+c)^2.$$

Hướng dẫn

Sử dụng bất đẳng thức

$$(a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3)^3 \leq (a_1^3 + b_1^3)(a_2^3 + b_2^3)(a_3^3 + b_3^3)$$

Ta thu được

$$(a+b+c)^3 = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{b+2c}}\cdot\sqrt[3]{b+2c}\cdot 1 + \frac{b}{\sqrt[3]{c+2a}}\cdot\sqrt[3]{c+2a}\cdot 1 + \frac{c}{\sqrt[3]{a+2b}}\sqrt[3]{c+2b}\cdot 1\right)^3$$

Suy ra

$$(a+b+c)^3 \leq P\cdot 3(a+b+c)\cdot 3$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{9} \text{ (đpcm).}$$

9. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{2a^2}{2b+c} + \frac{2b^2}{2a+c} + \frac{c^2}{4a+4b} \geqslant \frac{1}{4}(2a+2b+c).$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$P = \frac{a^2}{b+\frac{c}{2}} + \frac{b^2}{a+\frac{c}{2}} + \frac{(\frac{c}{2})^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+\frac{c}{2}).$$

Ta có

$$(a+b+\frac{c}{2})^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{b+\frac{c}{2}}}\sqrt{b+\frac{c}{2}} + \frac{b}{\sqrt{\frac{c}{2}+a}}\sqrt{\frac{c}{2}+a} + \frac{\frac{c}{2}}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\right)^2 \leq$$

$$\leq P \cdot 2(a+b+\frac{c}{2})$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{1}{2}(a+b+\frac{c}{2}) \quad \text{(đpcm).}$$

10. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$, chứng minh rằng

$$\sqrt{a^6+b^6+1} + \sqrt{b^6+c^6+1} + \sqrt{c^6+a^6+1} \geqslant 3\sqrt{3}. \qquad (1.1.6)$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a^6+b^6+1 \geqslant 3a^2b^2$$

Suy ra

$$\sqrt{a^6+b^6+1} \geqslant \sqrt{3}ab$$

Tương tự

$$\sqrt{a^6+b^6+1} \geqslant \sqrt{3}bc,$$

$$\sqrt{a^6+b^6+1} \geqslant \sqrt{3}ca.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được (1.1.6).

2 Một số phép biến đổi cơ bản.

a. Nhóm đối xứng: Phép biến đổi này thường được sử dụng để hạ bậc từng vế bất đẳng thức.

Ví dụ 1. Với a, b, c là số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a+b+c} \geqslant abc.$$

Giải

Ta có

$$a^4+b^4+c^4 = \frac{a^4+b^4}{2} + \frac{b^4+c^4}{2} + \frac{c^4+a^4}{2} \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \quad (1.2.1)$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = \frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} + \frac{b^2c^2+c^2a^2}{2} + \frac{c^2a^2+a^2b^2}{2} \geqslant abc(a+b+c) \quad (1.2.2)$$

Từ (1.2.1) và (1.2.2) suy ra $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$ (đpcm).

Ví dụ 2. Với a, b, c là các số thực không âm, chứng minh rằng

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^2 = (a^2+bc)+(b^2+ca)+(c^2+ab)+\frac{ab+bc}{2}+\frac{bc+ca}{2}+\frac{ca+ab}{2}$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2 \geqslant 2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ca}+2c\sqrt{ab}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}+a\sqrt{bc}$$

$$\geqslant 3(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}) \quad \text{(đpcm)}.$$

b . Khử căn

Ví dụ 3. Với $x_i > 0,\ y_i > 0,\ i = \overline{1,n}$, chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \leq \sqrt[n]{(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_n+y_n)}.$$

Giải

phương trình đã cho tương đương với

$$= \sqrt[n]{\frac{x_1.x_2\cdots x_n}{(x_1+y_1)\cdots(x_n+y_n)}} + \sqrt[n]{\frac{y_1y_2\cdots y_n}{(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_n+y_n)}} \leq 1$$

có

$$P \leq \frac{\dfrac{x_1}{x_1+y_1} + \dfrac{x_2}{x_2+y_2} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_n+y_n}}{n} +$$

$$+ \frac{\dfrac{y_1}{x_1+y_1} + \dfrac{y_2}{x_2+y_2} + \cdots + \dfrac{y_n}{x_n+y_n}}{n} = 1 \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 4. Với a, b, c, d là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} \leq 4\sqrt{2}.$$

Giải

Ta có

$$\sqrt{4a+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(4a+1)\cdot 2} \leq \frac{4a+1+2}{2\sqrt{2}} = \frac{4a+3}{2\sqrt{2}}$$

Tương tự

$$\sqrt{4b+1} \leq \frac{4b+3}{2\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{4c+1} \leq \frac{4c+3}{2\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{4d+1} \leq \frac{4d+3}{2\sqrt{2}}.$$

Cộng vế với vế của bốn đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(4a+4b+4d+12) \leq 4\sqrt{2}$$

Ví dụ 5. Với a, b, c là các số thực không âm, chứng minh rằng

$$\ldots\sqrt{\ldots^2 + 2a^2} \geqslant \sqrt{3}(a+b+c).$$

Giải

Từ bất đẳng thức Côsi ta thu được

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3(\frac{a+b+c}{3})^2$$

Suy ra

$$a^2 + 2b^2 \geqslant 3(\frac{a+b+b}{3})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+2b^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}(a+2b)$$

Tương tự

$$\sqrt{b^2+2c^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}(b+2c),$$

$$\sqrt{c^2+2a^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}(c+2a).$$

Cộng vế với vế của ba đẳng thức trên ta thu được

$$P \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3(a+b+c) = \sqrt{3}(a+b+c) \text{ . (đpcm).}$$

c. Nhóm theo các hệ số có tổng bằng 1.

Ví dụ 6. Với a, b, c là các số thực không âm, chứng minh rằng

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{\frac{a+2b}{3}} + \sqrt{\frac{b+2c}{3}} + \sqrt{\frac{c+2a}{3}}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{3} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{b}}{3} \leq \sqrt{\frac{a+b+b}{3}} = \sqrt{\frac{a+2b}{3}}$$

hay

$$\frac{1}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}\sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a+2b}{3}}$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{1}{3}\sqrt{b} + \frac{2}{3}\sqrt{c} \leq \sqrt{\frac{a+2b}{3}},$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{c}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\leq\sqrt{\frac{c+2a}{3}}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 7. Với a, b, c là các số thực không âm, chứng minh rằng

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)\geqslant(1+ab^2)(1+bc^2)(1+ca^2). \qquad (1.2.3)$$

Giải

Với $x, y, z \geqslant 0$ ta có

$$\sqrt[3]{\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}}+\sqrt[3]{\frac{xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}}\leq$$

$$\leq\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}}{3}+\frac{\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}}{3}\leq 1,$$

suy ra $\sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)}\geqslant 1+\sqrt[3]{xyz}$

hay $(1+x)(1+y)(1+z)\geqslant(1+\sqrt[3]{xyz})^3$.

Với $x=a^3, y=z=b^3$ ta có

$$(1+a^3)(1+b^3)^2\geqslant(1+ab^2)^3.$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$(1+b^3)(1+c^3)^2\geqslant(1+bc^2)^3,$$

$$(1+c^3)(1+a^3)^2\geqslant(1+ca^2)^3.$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.2.3).

d. Nhóm theo bậc.

Ví dụ 8. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{b^3+c^3}{a}+\frac{c^3+a^3}{b}+\frac{a^3+b^3}{c}\geqslant 2(ab+bc+ca). \qquad (1.2.4)$$

Giải

Ta có

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\geqslant 2ab.$$

$$\frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{b} \geqslant 2bc\,,$$
$$\frac{c^3}{a} + \frac{a^3}{c} \geqslant 2ca.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được (1.2.4).

Ví dụ 9. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c. \tag{1.2.5}$$

Giải

Ta có

$$\frac{a^2}{b} + b \geqslant 2a, \ \frac{b^2}{c} + c \geqslant 2b, \ \frac{c^2}{a} + a \geqslant 2a$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

e. Đổi biến

Ví dụ 10. Với a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Giải

Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$ ta thu được $xyz = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{x^2yz}{y+z} + \frac{y^2zx}{z+x} + \frac{z^2xy}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y+z} + 1\right) + \left(\frac{y}{z+x} + 1\right) + \left(\frac{z}{x+y} + 1\right) \geqslant \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow P = (x+y+z)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) \geqslant \frac{9}{2}.$$

Ta có

$$P \geqslant (x+y+z) \cdot \frac{9}{(x+y)+(y+z)+(z+x)} = \frac{9}{2} \quad \text{(đpcm.)}$$

Ví dụ 11. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geqslant (a+bc)^3.$$

Giải

Chia cả hai vế cho $b^3c^3 > 0$ ta thu được

$$\Leftrightarrow (1+a^3)\left(1+\frac{1}{b^3}\right)\left(1+\frac{1}{c^3}\right) \geqslant \left(1+a\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\right)^3$$

Đặt $a = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z$ bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3) \geqslant (1+xyz)^3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3)} \geqslant 1+xyz$$
$$\Leftrightarrow P = \sqrt[3]{\frac{1}{(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3)}} + \sqrt[3]{\frac{x^3\cdot y^3\cdot z^3}{(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3)}} \leq 1.$$

Ta có

$$P \leq \frac{\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}}{3} + \frac{\frac{x^3}{1+x^3}+\frac{y^3}{1+y^3}+\frac{z^3}{1+z^3}}{3} = 1 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 12. Với $a, b, c > 0, abc = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1. \qquad (1.2.6)$$

Giải

Đặt $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ ta thu được $xyz = 1$ và

$$\frac{1}{a+b+1} = \frac{1}{1+x^3+y^3} = \frac{z}{z+z(x^3+y^3)}$$

Vì $x^3+y^3 \geqslant xy(x+y)$ suy ra

$$\frac{1}{a+b+1} \leq \frac{z}{z+zxy(x+y)} = \frac{z}{z+y+z}$$

Tương tự

$$\frac{1}{b+c+1} \leq \frac{x}{x+y+z},$$
$$\frac{1}{c+a+1} \leq \frac{y}{x+y+z}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được (1.2.6).

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^8}{b^4}+\frac{b^8}{c^4}+\frac{c^8}{a^4} \geqslant ab^3+bc^3+ca^3.$$

Hướng dẫn

$$\frac{a^8}{b^4}+\frac{b^8}{c^4}+\frac{c^8}{a^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^8}{b^4}+\frac{b^8}{c^4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^8}{c^4}+\frac{c^8}{a^4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^8}{a^4}+\frac{a^8}{b^4}\right)$$

$$\geqslant \frac{a^4b^2}{c^2}+\frac{b^4c^2}{a^2}+\frac{c^4a^2}{b^2} \geqslant ab^3+bc^3+ca^3 \quad \text{(đpcm)}.$$

2. Với a, b, c, d là các số thực không âm, chứng minh rằng

$$a^8+b^8+2c^4+4d^2 \geqslant 8abcd.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\begin{aligned} a^8+b^8+2c^4+4d^2 &\geqslant 2a^4b^4+2c^4+4d^2 \\ &\geqslant 4a^2b^2c^2+4d^2 \\ &\geqslant 8abcd \quad \text{(đpcm)}. \end{aligned}$$

3. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P=\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{2ca^2}{b}+4b^2c^2 \geqslant 8abc.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$P \geqslant \frac{2a^2b}{c}+\frac{2ca^2}{b}+4b^2c^2 \geqslant 4a^2+4b^2c^2 \geqslant 8abc \quad \text{(đpcm)}.$$

4. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P=\frac{a^4}{b^2c^2}+\frac{b^4}{c^2a^2}+\frac{c^4}{a^2b^2} \geqslant \frac{b}{\sqrt{ac}}+\frac{c}{\sqrt{ab}}+\frac{a}{\sqrt{bc}}.$$

Hướng dẫn

Sử dụng phép nhóm đối xứng ta thu được

$$P \geqslant \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \geqslant \frac{b}{\sqrt{ac}} + \frac{c}{\sqrt{ab}} + \frac{a}{\sqrt{bc}}.$$

5. Với a, b, c là các số thực dương. chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{3}{a+2b} + \frac{3}{b+2c} + \frac{3}{a+2b}.$$

Hướng dẫn

Chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geqslant \frac{9}{a+2b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{9}{a+b+b},$$

mà điều đó dễ dàng chứng minh được.

6. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geqslant a^2b + b^2c + c^2a. \tag{1.2.7}$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a^5 + b^5 \geqslant a^3b^2 + b^3a^2 \Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geqslant 0,$$

suy ra

$$\frac{a^5}{b^2} + b^3 \geqslant a^3 + a^2b.$$

Tương tự

$$\frac{b^5}{c^2} + c^3 \geqslant b^3 + b^2c,$$

$$\frac{c^5}{a^2} + a^3 \geqslant c^3 + c^2a.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta thu được $(1.2.7)$.

7. Với $a, b, c > 0,\ a + b + c = 1$, chứng minh rằng

$$P = \sqrt[3]{3a+1} + \sqrt[3]{3b+1} + \sqrt[3]{3c+1} \leq 3\sqrt[3]{2}.$$

Hướng dẫn

Từ điều kiện ta có nhận xét: $a = b = c = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3a + 1 = 2$

Từ đó có

$$\sqrt[3]{3a+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{(3a+1)\cdot 2\cdot 2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{3a+5}{3}.$$

Tương tự

$$\sqrt[3]{3b+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{3b+5}{3},$$

$$\sqrt[3]{3c+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{3c+5}{3},$$

suy ra

$$P \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{3(a+b+c)+15}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot 6 = 3\sqrt[3]{2} \quad \text{(đpcm)}.$$

8. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{b^2c^2} + \frac{b^6}{c^2a^2} + \frac{c^6}{a^2b^2} \geqslant ab + bc + ca.$$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned}\frac{a^6}{b^2c^2} + \frac{b^6}{c^2a^2} + \frac{c^6}{a^2b^2} &\geqslant \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2}\\ &\geqslant a^2 + b^2 + c^2\\ &\geqslant ab + bc + ca.\end{aligned}$$

9. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}. \tag{1.2.8}$$

Hướng dẫn
Ta có

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{b} \geqslant 2\sqrt{a}\ ,$$

$$\sqrt{\frac{b^2}{a}} + \sqrt{a} \geqslant 2\sqrt{b}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.2.8) .
10. Với $a, b, c > 0, a + b + c = 1$, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} \leq \sqrt[3]{3}.$$

Hướng dẫn
Ta có

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{ab \cdot \frac{1}{3}} \leq \sqrt[3]{3} \cdot \frac{a + b + \frac{1}{3}}{3}$$

Tương tự

$$\sqrt[3]{bc} \leq \sqrt[3]{3} \cdot \frac{b+c+\frac{1}{3}}{3},$$

$$\sqrt[3]{ca} \leq \sqrt[3]{3} \cdot \frac{c+a+\frac{1}{3}}{3}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} \leq \sqrt[3]{3} \cdot \left(\frac{2}{3}(a+b+c) + \frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{3} \quad \text{(đpcm)}.$$

11. Với $a, b, c > 0$, $abc = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Hướng dẫn

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ ta thu được $xyz = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{x^3yz}{y+z} + \frac{y^3zx}{z+x} + \frac{z^3xy}{x+y} \geqslant \frac{x+y+z}{2xyz}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{x+y+z}{2}. \qquad (1.2.9)$$

Ta có

$$\frac{4x^2}{y+z} + (y+z) \geqslant 4x,$$

$$\frac{4y^2}{z+x} + (z+x) \geqslant 4y,$$

$$\frac{4z^2}{x+y} + (x+y) \geqslant 4z.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.2.9).

12. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$a^3b^2c + \frac{c^2}{b^2} + \frac{b}{ac^2} \geqslant ac + ab + 1.$$

Hướng dẫn

Chia hai vế bất đẳng thức cho $bc > 0$ ta thu được

$$a^3b + \frac{c}{b^3} + \frac{1}{ac^3} \geqslant \frac{a}{b} + \frac{1}{bc} + \frac{a}{c}$$

Đặt $a = x, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geqslant xy + yz + zx. \tag{1.2.10}$$

Ta có

$$x^3 + y^3 \geqslant xy^2 + yx^2 \Leftrightarrow \frac{x^3}{y} + y^2 \geqslant xy + x^2$$

Tương tự

$$\frac{y^3}{z} + z^2 \geqslant yz + y^2,$$

$$\frac{z^3}{x} + x^2 \geqslant xz + z^2.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.2.10).

3 Dạng luỹ thừa

Chúng ta gọi bất đẳng thức $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^m \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^m$ $(m, n \in N^*, a_i > 0, i = \overline{1, n})$ là bất đẳng thức dạng luỹ thừa.

Ví dụ 1. Với a, b là những số thực không âm, chứng minh rằng

$$a^{m+n} + b^{m+n} \geqslant \frac{1}{2}(a^m + b^m)(a^n + b^n), \quad (m, n \in N^*).$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$a^{m+n} + b^{m+n} \geqslant a^m b^n + a^n b^m$$

$$(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geqslant 0$$

(Hiển nhiên đúng vì 2 thừa số cùng dương khi $a \geqslant b \geqslant 0$, cùng âm khi $b \geqslant a \geqslant 0$).

Ví dụ 2. Với a, b, c là những số thực không âm, chứng minh rằng

$$a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n} \geqslant \frac{1}{3}(a^m + b^m + c^m)(a^n + b^n + c^n) \quad (m, n \in N^*).$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$2(a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+}) \geqslant a^m(b^n + c^n) + b^m(c^n + a^n) + c^m(a^n + b^n)$$

$$\Leftrightarrow (a^m - b^m)(a^n - b^n) + (b^m - c^m)(b^n - c^n) + (a^m - c^m)(a^n - c^n) \geqslant 0.$$

(Hiển nhiên đúng vì các số hạng luôn dương .)

Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản trên ta dễ dàng giải được các bài toán sau

Ví dụ 3. Với a, b là những số thực không âm, chứng minh rằng

$$a^{10} + b^{10} \geqslant \frac{1}{4}(a^6 + b^6)(a^2 + b^2)^2.$$

Giải

Áp dụng ví dụ 1 ta có

$$a^{10} + b^{10} \geqslant \frac{1}{2}(a^6 + b^6)(a^4 + b^4)$$

$$\geqslant \frac{1}{4}(a^6 + b^6)(a^2 + b^2)^2.$$

Ví dụ 4. Với a, b là những số thực không âm, chứng minh rằng

$$a^{10} + 2b^{10} \geqslant \frac{1}{9}(a^6 + 2b^6)(a^2 + 2b^2)^2.$$

Giải

Áp dụng ví dụ 2 ta có

$$\begin{aligned} a^{10} + 2b^{10} &\geqslant \frac{1}{3}(a^6 + 2b^6)(a^4 + 2b^4) \\ &\geqslant \frac{1}{9}(a^6 + 2b^6)(a^2 + 2b^2)^2. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^{10}+b^{10}}{a^6+b^6}} + \sqrt{\frac{b^{10}+c^{10}}{b^6+c^6}} + \sqrt{\frac{c^{10}+a^{10}}{c^6+a^6}} \geqslant a^2+b^2+c^2. \qquad (1.3.1)$$

Giải

Ta có

$$\frac{a^{10}+b^{10}}{a^6+b^6} \geqslant \frac{1}{4}(a^2+b^2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^{10}+b^{10}}{a^6+b^6}} \geqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

Tương tự

$$\sqrt{\frac{b^{10}+c^{10}}{b^6+c^6}} \geqslant \frac{1}{2}(b^2+c^2).$$

$$\sqrt{\frac{c^{10}+a^{10}}{c^6+a^6}} \geqslant \frac{1}{2}(c^2+a^2).$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được $(1.3.1)$.

Ví dụ 6. Với $a, b \geqslant 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \quad (n \in N^*).$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^n+b^n}{2} &\geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}\right)\\ &\geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{a^{n-2}+b^{n-2}}{2}\right)\\ &\geqslant \cdots \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Ví dụ 7. Với a, b, c là những số thực không âm, chứng minh rằng

$$\frac{a^n+b^n+c^n}{3} \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n. \quad (n \in N^*).$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P = a^n + b^n + c^n + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \geqslant 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n.$$

Áp dụng bài 6 ta có

$$\begin{aligned}P &\geqslant 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n + 2\left(\frac{c+\frac{a+b+c}{3}}{2}\right)^n \geqslant\\ &\geqslant 4\left(\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\right)^n\\ \Leftrightarrow P &\geqslant 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \quad \text{(đpcm)}.\end{aligned}$$

Cách 2.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^n+b^n+c^n}{3} &\geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{3}\right)\\ &\geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\left(\frac{a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2}}{3}\right) \geqslant \cdots\\ \cdots &\geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \quad \text{(áp dụng ví dụ 2).}\end{aligned}$$

Ví dụ 8. Với a, b, c là các số thực không âm, chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3} \leq \sqrt[n]{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Giải

Áp dụng kết quả ví dụ 7 ta nhận được

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n \leq \frac{a+b+c}{3}$$

Khai căn bậc n hai vế ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 9. Với a, b, c là các số thực không âm, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n} \geqslant 3\left(\frac{3}{a+b+c}\right)^n.$$

Giải

Áp dụng ví dụ 7 ta có

$$\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n+\left(\frac{1}{b}\right)^n+\left(\frac{1}{c}\right)^n}{3} \geqslant \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\right)^n$$
$$\geqslant \left(\frac{3}{a+b+c}\right)^n \quad \text{(đpcm.)}$$

Mở rộng chúng ta thu được các kết quả sau:

Ví dụ 10. Với $a_i(i=\overline{1,n})$ là số thực không âm, $n \in N^*$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^m \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^m.$$

Giải

Với $m=2$ bất đẳng thức đúng (Áp dụng ví dụ 6.)
Ta chứng minh khẳng định: " Nếu bất đẳng thức đúng với $n=k$ thì đúng với $n=2k$".

Thật vậy

$$\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k} a_i^m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i^m + \frac{1}{k}\sum_{i=k+1}^{2k} a_i^m\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^m + \left(\frac{1}{k}\sum_{i=k+1}^{2k} a_i\right)^m\right] \quad \text{(Giả thiết quy nạp)}$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k} a_i\right)^m \quad \text{(đpcm).}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh đúng nếu chúng ta chứng minh được khẳng định:" Nếu bất đẳng thức đúng với $n = k+1$ thì đúng với $n = k$ ".
Thật vậy, ta cần chứng minh

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i^m \geqslant \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^m$$

$$\Leftrightarrow P = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^m\right) + \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^m \geqslant (k+1)\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^m$$

Áp dụng giả thiết quy nạp ta thu được

$$P = (k+1)\left(\frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\right)^m$$

$$\geqslant (k+1)\cdot\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^m \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 11. Với $a_i(i=\overline{1,n})$ là các số thực không âm, $m \in N^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt[m]{a_i} \leq \sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Giải

Áp dụng kết quả ví dụ 10 ta có

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt[m]{a_i}\right)^m \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Khai căn bậc m hai vế ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.
Ta nhận xét: Khi $m = 2k$ thì trong giả thiết của bài toán không cần điều kiện $a_i \geqslant 0 (i = \overline{1, n})$.

Ví dụ 12. Với $a, b, c \in R$, chứng minh rằng

$$\frac{a^{2m} + b^{2m} + c^{2m}}{3} \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{2m}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{a^{2m} + b^{2m} + c^{2m}}{3} = \frac{(a^2)^m + (b^2)^m + (c^2)^m}{3} \geqslant \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^m$$

Vì $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \geqslant \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$, với mọi $a, b, c \in R$ nên ta thu được

$$\frac{a^{2m} + b^{2m} + c^{2m}}{3} \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{2m} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 13. Với $a, b, c \geqslant 0$, chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant \left(\frac{a+2b}{3}\right)^4 + \left(\frac{b+2c}{3}\right)^4 + \left(\frac{c+2a}{3}\right)^4. \qquad (1.3.2)$$

Giải

Ta có

$$\frac{a^4 + b^4 + b^4}{3} \geqslant \left(\frac{a+2b}{3}\right)^4.$$

$$\frac{b^4 + c^4 + c^4}{3} \geqslant \left(\frac{b+2c}{3}\right)^4,$$

$$\frac{c^4 + a^4 + a^4}{3} \geqslant \left(\frac{c+2a}{3}\right)^4.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức ta thu được (1.3.2).

Ví dụ 14. Với $a, b, c \geqslant 0$, chứng minh rằng

$$P = \sqrt{a} + \sqrt{2b} + \sqrt{3c} \leqslant 6\sqrt{\frac{a+b+c}{6}}.$$

Giải

Ta có

$$P=\sqrt{a}+\sqrt{\frac{b}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}+\sqrt{\frac{c}{3}}+\sqrt{\frac{c}{3}}+\sqrt{\frac{c}{3}}\le 6\sqrt{\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}}{6}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 15. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\geqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3c}}+\frac{1}{\sqrt{c+3a}}\right). \qquad (1.3.3)$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{3}{\sqrt{b}}\geqslant\frac{16}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}\geqslant\frac{8}{\sqrt{a+3b}},$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{3}{\sqrt{c}}\geqslant\frac{8}{\sqrt{b+3c}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{3}{\sqrt{a}}\geqslant\frac{8}{\sqrt{c+3a}}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.3.3).

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1. Với $a, b, c \geqslant 0$, chứng minh rằng

$$P=a^4+\frac{1}{8}b^4+\frac{1}{27}c^4\geqslant 6\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^4.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$P=a^4+\left(\frac{b}{2}\right)^4+\left(\frac{b}{2}\right)^4+\left(\frac{c}{3}\right)^4+\left(\frac{c}{3}\right)^4+\left(\frac{c}{3}\right)^4\geqslant 6\left(\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}}{6}\right)^4.$$

2. Với $a, b, c \geqslant 0$, chứng minh rằng

$$P=a^4+b^4+\frac{1}{8}c^4\geqslant\frac{1}{64}(a+b+c)^4.$$

Hướng dẫn

$$P = a^4 + b^4 + \left(\frac{c}{2}\right)^4 + \left(\frac{c}{2}\right)^4 \geqslant 4\cdot\left(\frac{a+b+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}}{4}\right)^4 = \frac{1}{64}(a+b+c)^4.$$

3. Giải phương trình

$$2x^4 + (1-2x)^4 = \frac{1}{27}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$2x^4 + (1-2x)^4 = x^4 + x^4 + (1-2x)^4 \geqslant 3\left(\frac{x+x+1-2x}{3}\right)^4 = \frac{1}{27}.$$

Phương trình đúng khi và chỉ khi $x = 1 - 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

4. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = \sqrt[4]{\frac{4-x}{3}} + \sqrt[4]{\frac{2+x}{3}}.$$

Hướng dẫn

Điều kiện $0 \leq x \leq 2$.

Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = \sqrt[4]{\frac{x+2x}{3}} + \sqrt[4]{\frac{x+2(2-x)}{3}} + \sqrt[4]{\frac{(2-x)+2x}{3}}$$

sử dụng bất đẳng thức

$$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} \leq \sqrt[4]{\frac{a+2b}{3}} + \sqrt[4]{\frac{b+2c}{3}} + \sqrt[4]{\frac{c+2a}{3}},$$

Ta suy ra

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} \leq \sqrt[4]{\frac{x+2x}{3}} + \sqrt[4]{\frac{x+2(2-x)}{3}} + \sqrt[4]{\frac{(2-x)+2x}{3}},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$.

5. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c}} \geq \frac{8}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Hướng dẫn

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{c}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{c}{2}}}\geqslant\frac{16}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{\frac{c}{2}}+\sqrt{\frac{c}{2}}}$$

$$\geqslant\frac{16}{4\sqrt{\dfrac{a+b+c}{4}}}=\frac{8}{\sqrt{a+b+c}}.$$

6. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{8}{c^2}\geqslant\frac{64}{(a+b+c)^2}.$$

Hướng dẫn

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(\frac{c}{2})^2}+\frac{1}{(\frac{c}{2})^2}\geqslant 4\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{\frac{c}{2}}+\frac{1}{\frac{c}{2}}}{4}\right)^2$$

$$\geqslant 4\left(\frac{16}{\frac{a+b+c}{4}}\right)^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

7. Với $a, b, c > 0, a+b+c=1$, chứng minh rằng

$$\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}+2(\sqrt[4]{a+3b}+\sqrt[4]{b+3c}+\sqrt[4]{c+3a})\leq 9.$$

Hướng dẫn

$$\sqrt[4]{a}+2\sqrt[4]{a+3b}\leq 3\sqrt[4]{a+2b},$$

$$\sqrt[4]{b}+2\sqrt[4]{b+3c}\leq 3\sqrt[4]{b+2c},$$

$$\sqrt[4]{c}+2\sqrt[4]{c+3a}\leq 3\sqrt[4]{c+2a},$$

và sử dụng bất đẳng thức

$$\sqrt[4]{a+2b}+\sqrt[4]{b+2c}+\sqrt[4]{c+2a}\leq 3\cdot\sqrt[4]{a+b+c}=3.$$

8. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$9(a^4+b^4+c^4)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant (a+2b)^3+(b+2c)^3+(c+2a)^3. \quad (1.3.4)$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{a^4}{b}+ba^2 \geqslant 2a^3,$$

$$\frac{b^4}{c}+cb^2 \geqslant 2b^3,$$

$$\frac{c^4}{a}+ac^2 \geqslant 2c^3.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{c}+\frac{c^4}{a} \geqslant a^3+b^3+c^3 \geqslant \frac{1}{9}(a+b+c)^3,$$

suy ra (cho $b=c$)

$$\frac{a^4}{b}+b^3+\frac{b^4}{a} \geqslant \frac{1}{9}(a+2b)^3$$

Tương tự

$$\frac{b^4}{c}+c^3+\frac{c^4}{b} \geqslant \frac{1}{9}(b+2c)^3,$$

$$\frac{c^4}{a}+a^3+\frac{a^4}{c} \geqslant \frac{1}{9}(c+2a)^3.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức cuối ta thu được (1.3.4) .

9 . Với a, b, c là độ dài của ba cạnh tam giác, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a+b-c}+\sqrt[3]{b+c-a}+\sqrt[3]{c+a-b} \leq \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\sqrt[3]{a+b-c}+\sqrt[3]{b+c-a} \leq 2\sqrt[3]{b},$$

$$\sqrt[3]{b+c-a}+\sqrt[3]{c+a-b} \leq 2\sqrt[3]{c},$$

$$\sqrt[3]{c+a-b}+\sqrt[3]{a+b-c} \leq 2\sqrt[3]{c}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh .

10.Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2c} \leq 2\sqrt{2a+b+2c}+\sqrt{2b+4c}. \qquad (1.3.5)$$

Hướng dẫn
Ta có

$$\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2c} \leq 4\sqrt{\frac{2a+b+2c}{4}},$$

$$\sqrt{b}+\sqrt{2c} \leq 2\sqrt{\frac{b+2c}{2}}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được $(1.3.5)$.
11.Với $a, b, c \geqslant 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt{a+3b}+\sqrt{a+3c}+\sqrt{2a+b+c} \geqslant 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}). \qquad (1.3.6)$$

Hướng dẫn
Ta có

$$\sqrt{a}+3\sqrt{b} \leq 4\sqrt{\frac{a+3b}{4}} = 2\sqrt{a+3b},$$

$$\sqrt{a}+3\sqrt{c} \leq 2\sqrt{a+3c},$$

$$2\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq 4\sqrt{\frac{2a+b+c}{4}} = 2\sqrt{2a+b+c}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được $(1.3.6)$.
12. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}} \geqslant 2\Big(\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3c}}+\frac{1}{\sqrt{c+3a}}\Big). \qquad (1.3.7)$$

Hướng dẫn
Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{3}{\sqrt{b}} \geqslant \frac{16}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}} = \frac{4}{\dfrac{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{4}} \geqslant \frac{4}{\sqrt{\dfrac{a+3b}{4}}}$$

Thu được

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{3}{\sqrt{b}} \geqslant \frac{8}{\sqrt{a+3b}}$$

Tương tự

$$\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{3}{\sqrt{c}} \geqslant \frac{8}{\sqrt{b+3c}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{3}{\sqrt{a}} \geqslant \frac{8}{\sqrt{c+3a}}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.3.7).

4 Dạng cộng mẫu số

Chúng ta gọi bất đẳng thức $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$ với $a_i > 0, i = \overline{1,n}$ là bất đẳng thức dạng cộng mẫu số.
Bất đẳng thức cộng mẫu số là một bất đẳng thức rất đơn giản nhưng thường được sử dụng ở các bước biến đổi trung gian. Ta chứng minh bất đẳng thức dạng này ở bài toán sau.

Ví dụ 1. Với $a_i (i = \overline{1,n})$ là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Giải

Ta có

$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^{\frac{1}{n}}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Suy ra

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (đpcm).
Sử dụng bất đẳng thức trên ta chứng minh các bất đẳng thức sau.

Ví dụ 2. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 3\left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{c+2a}\right). \qquad (1.4.1)$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{9}{a+2b}$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\geqslant\frac{9}{b+2c};$$
$$\frac{1}{c}+\frac{2}{a}\geqslant\frac{9}{c+2a}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.4.1).

Ví dụ 3. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geqslant\frac{36}{a+b+c}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{1}{\frac{c}{3}}+\frac{1}{\frac{c}{3}}+\frac{1}{\frac{c}{3}}\geqslant\frac{36}{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}}.$$

Ví dụ 4. Với $a, b, c, d > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geqslant\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}&\geqslant\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\\&\geqslant\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}\\&\geqslant\frac{64}{a+b+c+d}.\end{aligned}$$

Ví dụ 5. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{4}{a}+\frac{5}{b}+\frac{3}{c}\geqslant 4\left(\frac{3}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

Giải

Ta có

$$\frac{12}{a+b}\leq 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

$$\frac{8}{b+c} \leq 2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

$$\frac{4}{c+a} \leq \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right).$$

ng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần ứng minh.

í dụ 6. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a+3c}{a+b}+\frac{c+3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a} \geqslant 6.$$

Giải

Để giải bài tập khó này chúng ta cần trình bày phương pháp xây dựng cách giải như sau:
Tìm α, β sao cho

$$(a+3c)+\alpha(a+b)=(c+3a)+\beta(b+c)=M$$

$$\Leftrightarrow (1+\alpha)a+\alpha b+3c=3a+\beta b+(1+\beta)c$$

Thu được .

$$1+\alpha=3 \Leftrightarrow \alpha=2$$

$$3=1+\beta \Leftrightarrow \beta=2$$

$$\text{và } M=3a+2b+3c$$

Tìm γ sao cho

$$4b+\gamma(c+a)=m(3a+2b+3c)$$

$$\Leftrightarrow \gamma a+4b+\gamma c=3ma+2mb+3mc$$

Suy ra
$4=2m \Leftrightarrow m=2$
$\gamma=3m=6.$
Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a+3c}{a+b}+2+\frac{c+3a}{b+c}+2+\frac{4b}{c+a}+6 \geqslant 16$$

$$\cdots 3c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{2}{c+a}\right) \geqslant 16$$

Ta có $$P \geqslant (3a+2b+3c)\cdot\frac{16}{(a+b)+(b+c)+2(c+a)} = 16$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a+b = b+c = 2c+2a$
Suy ra
$$\begin{cases} a = c \\ b+c = 2c+2a \Leftrightarrow b = c+2a = 3a \end{cases}$$

Ví dụ 7. Với $a, b, c > 0$ là độ dài ba cạnh của một tam giác, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right). \qquad (1.4.2)$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \geqslant \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{4}{c},$$
$$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geqslant \frac{4}{a},$$
$$\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a} \geqslant \frac{4}{b}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.4.2).

Ví dụ 8. Với $a, b, c > 0$ là những số thực dương thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca = 3$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a^2+bc}+\frac{b}{2b^2+ca}+\frac{c}{2c^2+ab} \geqslant abc.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P = \frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{bc}}+\frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ca}}+\frac{1}{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}} \geqslant (abc)^2.$$

Ta có

$$P \geqslant \frac{9}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2} = \frac{9(abc)^2}{(ab+bc+ca)^2} = (abc)^2 \quad (\text{đpcm}).$$

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1. Với h_a, h_b, h_c là độ dài ba đường cao của một tam giác, r là độ dài bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. chứng minh rằng

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

Suy ra

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r \quad (\text{đpcm.})$$

2. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geqslant \frac{3}{a+b} + \frac{18}{3b+4c} + \frac{9}{c+6a}.$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức đã cho được viết lại dưới dạng tương đương

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{b}{2}} + \frac{1}{\frac{c}{3}} \geqslant \frac{3}{a + 2\cdot\frac{b}{2}} + \frac{3}{\frac{b}{2} + 2\cdot\frac{c}{3}} + \frac{3}{\frac{c}{3} + 2a}.$$

Đặt $B = \frac{b}{2}$, $C = \frac{c}{3}$ ta thu được

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geqslant \frac{3}{a+2B} + \frac{3}{B+2C} + \frac{3}{C+2a}.$$

3. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a} + \frac{2a+c}{b} + \frac{4(a+b)}{a+c} \geqslant 9.$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{b+c}{a} + 2\right) + \left(\frac{2a+c}{b} + 1\right) + \left(\frac{4(a+b)}{a+c} + 4\right) \geqslant 16$$

$$\Leftrightarrow (2a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+c}\right) \geqslant 16.$$

Ta có

$$P=(2a+b+c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+c}\right) \geqslant 16$$

$$P \geqslant (2a+b+c)\cdot\frac{8^2}{8a+4b+4c}=\frac{8^2}{4}=16 \quad \text{(đpcm)}.$$

4. Với $a, b, c, d > 0$, chứng minh rằng

$$P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{12}{c}+\frac{64}{d} \geqslant \frac{64}{a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}}.$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P=\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{4}{\frac{c}{3}}+\frac{16}{\frac{d}{4}} \geqslant \frac{4}{a+\frac{b}{2}}+\frac{4}{\frac{c}{3}}+\frac{16}{\frac{d}{4}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{16}{a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}}+\frac{16}{\frac{d}{4}} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{64}{a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}} \quad \text{(đpcm .)}$$

5. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{2}{a}+\frac{6}{b}+\frac{9}{c} \geqslant \frac{8}{2a+b}+\frac{48}{3b+2c}+\frac{12}{c+3a}. \tag{1.4.3}$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{8}{2a+b}=\frac{4}{a+\frac{b}{2}} \leq \frac{1}{a}+\frac{2}{b};$$

$$\frac{48}{3b+2c}=\frac{8}{\frac{b}{2}+\frac{c}{3}} \leq 2\left(\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right);$$

$$\frac{12}{c+3a}=\frac{4}{\frac{c}{3}+a} \leq \frac{3}{c}+\frac{1}{a}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.4.3).

6. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{4c}{2a+b} + \frac{4a}{b+2c} + \frac{b}{c+a} \geqslant 3.$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{4c}{2a+b} + 2\right) + \left(\frac{4a}{b+2c} + 2\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 2\right) \geqslant 9$$

$$\Leftrightarrow P = (2a+2c+b)\left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+\frac{b}{2}} + \frac{1}{c+\frac{b}{2}}\right) \geqslant 9$$

Ta có

$$P \geqslant (2a+2c+b) \cdot \frac{9}{2a+2c+b} = 9 \quad \text{(đpcm)}.$$

7. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$a + \frac{a}{1+ab} + \frac{4}{a+2c} \geqslant \frac{8a}{1+ab+ac}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{a}+b} \geqslant \frac{4}{\frac{2}{a}+b}$$

Suy ra

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{a}+b} + \frac{4}{2c+b} \geqslant \frac{16}{\frac{2}{a}+2c+2b}$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{a}{1+ab} + \frac{4}{2c+b} \geqslant \frac{8a}{1+ac+ab} \quad \text{(đpcm)}.$$

8. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{4a}{b} + \frac{3b}{a} + \frac{b}{a+b} \geqslant 6.$$

Hướng dẫn
Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}\geqslant\frac{16}{2a+3b}$$
$$\Leftrightarrow P=\Big(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{a+b}\Big)(2a+3b)\geqslant 16$$
$$\Leftrightarrow(2+\frac{3b}{a})+(6+\frac{4a}{b})+(2+\frac{b}{a+b})\geqslant 16$$
$$\Leftrightarrow\frac{4a}{b}+\frac{3b}{a}+\frac{b}{a+b}\geqslant 6\quad \text{(đpcm)}.$$

9. Với $a, b, c>0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+b+c\geqslant 3\Big(\frac{b}{2+ab}+\frac{bc}{c+2b}+\frac{c}{1+2ac}\Big).\qquad(1.4.4)$$

Hướng dẫn
Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{b}}\geqslant\frac{9}{a+\frac{2}{b}}=\frac{9b}{2+ab}$$
$$\frac{1}{\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{c}}\geqslant\frac{9}{\frac{1}{b}+\frac{2}{c}}=\frac{9bc}{c+2b},$$
$$\frac{1}{\frac{1}{c}}+a+a\geqslant\frac{9}{\frac{1}{c}+2a}=\frac{9c}{1+2ac}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.4.4).

10. Với $a, b, c>0$, chứng minh rằng

$$\frac{7}{a}+\frac{4}{b}+\frac{7}{c}\geqslant 9\Big(\frac{1}{a+2b}+\frac{2}{b+2c}+\frac{3}{c+2a}\Big).\qquad(1.4.5)$$

Hướng dẫn
Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{9}{a+2b},$$
$$2\Big(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\Big)\geqslant\frac{18}{b+2c},$$

$$3\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right) \geqslant \frac{27}{c+2a}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.4.5).

11. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{3}{\sqrt{b}} + \frac{8}{\sqrt{3c+2a}} \geqslant \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{3(a+b+c)}}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{3}{\sqrt{b}} \geqslant \frac{16}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}} \geqslant \frac{4}{\sqrt{\dfrac{a+3b}{4}}} = \frac{8}{\sqrt{a+3b}}$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{8}{\sqrt{a+3b}} + \frac{8}{\sqrt{3c+2a}} \geqslant \frac{32}{\sqrt{a+3b}+\sqrt{3c+2a}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{16}{\sqrt{\dfrac{3(a+b+c)}{2}}} \quad \text{(đpcm.)}$$

5 Dạng trung bình

Ta gọi $\left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ là trung bình bậc α. Một số trường hợp đặc biệt:

- $\alpha = 1$: $\frac{a+b}{2}$ gọi là trung bình cộng.
  $\sqrt{ab}$ gọi là trung bình nhân.
- $\alpha = -1$: $\frac{2ab}{a+b}$ gọi là trung bình điều hoà.

Trong mục này chúng ta quan tâm tới các bất đẳng thức được chứng minh nhờ tính chất của các dạng trung bình như:
1. Trung bình nhân,
2. Trung bình căn,
3. Trung bình điều hoà,
4. Mối liên quan giữa các trung bình.

I . Trung bình nhân. Chúng ta có các kết quả cơ bản sau:

Ví dụ 1. Với $a_i, b_i (i = \overline{1,n})$ là những số thực dương. chứng minh rằng

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i + b_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta thu được

$$P \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i + b_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n}{n} = 1 \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 2. Với $a_{ij}, b_{ij} (i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m})$ là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P = \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta thu được

$$P \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n}{n} = 1 \text{(đpcm)}.$$

Hai bất đẳng thức trên ta có thể tóm tắt: Tổng các trung bình nhân nhỏ hơn hoặc bằng trung bình nhân của tổng. Từ kết quả trên chúng ta thu được các hệ quả sau:

Ví dụ 3. (Bất đẳng thức Côsi dạng tích.)

Với $a_i (i = \overline{1, n})$ là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geqslant \left(1 + \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{n}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \right)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow P = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + a_i} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + a_i} \right)^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta thu được

$$P \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + a_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + a_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n}{n} = 1 \text{(đpcm)}.$$

Chúng ta dễ dàng mở rộng ví dụ 3 như sau:

Ví dụ 4. Với $a_i, b_i (i = \overline{1,n})$ là những số thực dương , chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i+b_i) \geqslant \left(1+\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1+a_i+b_i)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1+\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow P=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i+b_i}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i+b_i}\right)^{\frac{1}{n}}+$$

$$+\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i}{1+a_i+b_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta thu được

$$P \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i+b_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i+b_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{1+a_i+b_i}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{n}{n}=1 \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 5. (Một cách mở rộng bất đẳng thức Bunhiacopski.)
Với $a_i, b_i, c_i (i = \overline{1,m})$ là những số thực dương , chứng minh rằng

1. $\left(\prod_{i=1}^{m} a_i + \prod_{i=1}^{m} b_i\right)^m \leq \prod_{i=1}^{m}(a_i^m + b_i^m)$ (*)
2. $\left(\prod_{i=1}^{m} a_i + \prod_{i=1}^{m} b_i + \prod_{i=1}^{m} c_i\right)^m \leq \prod_{i=1}^{m}(a_i^m + b_i^m + c_i^m)$.(**)

Giải

Đặt $A_i = a_i^m,\ B_i = b_i^m,\ C_i = c_i^m$;

suy ra $a_i = A_i^{\frac{1}{m}},\ b_i = B_i^{\frac{1}{m}},\ c_i = C_i^{\frac{1}{m}}$

Ta thu được

$$(**) \Leftrightarrow \Big(\prod_{i=1}^{m} A_i\Big)^{\frac{1}{m}} + \Big(\prod_{i=1}^{m} B_i\Big)^{\frac{1}{m}} + \Big(\prod_{i=1}^{m} C_i\Big)^{\frac{1}{m}} \le \Big(\prod_{i=1}^{m}(A_i+B_i+C_i)\Big)^{\frac{1}{m}}$$

$$\Leftrightarrow P = \Big(\prod_{i=1}^{m} \frac{A_i}{A_i+B_i+C_i}\Big)^{\frac{1}{m}} + \Big(\prod_{i=1}^{m} \frac{B_i}{A_i+B_i+C_i}\Big)^{\frac{1}{m}} + \Big(\prod_{i=1}^{m} \frac{C_i}{A_i+B_i+C_i}\Big)^{\frac{1}{m}} \le 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta thu được

$$P \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{A_i+B_i+C_i} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{A_i+B_i+C_i} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{A_i+B_i+C_i}$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i+B_i+C_i}{A_i+B_i+C_i} = \frac{m}{m} = 1 \quad (\text{đpcm}).$$

Bất đẳng thức (*) chứng minh tương tự và đơn giản hơn.

Trong các trường hợp đặc biệt chúng ta thu được khá nhiều bất đẳng thức hay như sau:

Ví dụ 6. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$P = (1+a^3+b^3)(1+b^3+c^3)(1+c^3+a^3) \geqslant (1+2abc)^3.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho được suy trực tiếp từ ví dụ 4.

$$P \geqslant \left(1+\sqrt[3]{a^3b^3c^3}+\sqrt[3]{b^3c^3a^3}\right)^3 = (1+2abc)^3.$$

Ví dụ 7. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geqslant (1+ab^2)(1+bc^2)(1+ca^2).$$

Giải

Ta có $\quad (1+a^3)(1+b^3)^2 = (1+a^3)(1+b^3)(1+b^3) \geqslant (1+ab^2)^3$

Tương tự

$$(1+b^3)(1+c^3)^2 \geqslant (1+bc^2)^3,$$
$$(1+c^3)(1+a^3)^2 \geqslant (1+ca^2)^3.$$

Nhân vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 8. Với $a, b, c > 0$ là các số thực thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (1 + 8^a)(1 + 8^b)(1 + 8^c).$$

Giải

Ta có

$$P \geqslant (1 + \sqrt[3]{8^a \cdot 8^b \cdot 8^c}\ )^3 = \left(1 + 8^{\frac{a+b+c}{3}}\right)^3 = 27$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 9. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = (1 + a^6)(1 + b^3)^2(1 + c^2)^3 \geqslant (1 + abc)^6.$$

Giải

ta có

$$P = (1+a^6)(1+b^3)^2(1+c^2)^3 = (1+a^6)(1+b^3)(1+b^3)(1+c^2)(1+c^2)(1+c^2).$$

Suy ra

$$P \geqslant (1 + \sqrt[6]{a^6b^3b^3c^2c^2c^2}\ )^6 = (1 + abc)^6.$$

Ví dụ 10. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = (1 + a^4)(1 + b^4)(1 + c^2)^2 \geqslant (1 + abc)^4.$$

Giải

Ta có

$$P \geqslant (1 + \sqrt[4]{a^4b^4c^2c^2}\ )^4 = (1 + abc)^4.$$

Ví dụ 11 . Với $a, b, c > 0$, $a + b + c = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (1 + 2^a + 2^b)(1 + 2^b + 2^c)(1 + 2^c + 2^a).$$

Giải

Ta có

$$P \geqslant (1 + 2\sqrt[3]{2^a 2^b 2^c})^3 = \left(1 + 2 \cdot 2^{\frac{a+b+c}{3}}\right)^3$$

$P \geqslant (1 + 2 \cdot 2)^3 = 125$ và đạt dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 125.

Ví dụ 12. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$P = (1 + 8^a)(1 + 8^b)(1 + 8^c) \geqslant (1 + 2^{a+2b})(1 + 2^{b+2c})(1 + 2^{c+2a}).$$

Giải

Ta có

$$(1 + 8^a)(1 + 8^b)^2 \geqslant (1 + \sqrt[3]{8^a \cdot 8^b \cdot 8^b})^3 = (1 + 2^{a+2b})^3.$$

Tương tự

$$(1 + 8^b)(1 + 8^c)^2 \geqslant (1 + 2^{b+2c})^3$$

$$(1 + 8^c)(1 + 8^a) \geqslant (1 + 2^{c+2a})^3.$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 13. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}}.$$

Giải

Luỹ thừa 6 hai vế ta thu được

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \leq 3(a^3 + b^3 + c^3)^2.$$

Ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 = (1.a.a + 1.b.b + 1.c.c)^3 \leq (1^3 + 1^3 + 1^3)(a^3 + b^3 + c^3)^2$$

$$= 3(a^3 + b^3 + c^3)^2 \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 14. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{6}.$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^3 = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{a+b}}\cdot\sqrt[3]{a+b}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+c}}\cdot\sqrt[3]{b+c}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+a}}\cdot\sqrt[3]{c+a}\right)^3$$

$$\leq (1^3+1^3+1^3)\left(\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}\right)\cdot 2(a+b+c).$$

Suy ra

$$\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{6}\quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 15. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$(a+b+c)^3 \leq (2+a^3)(2+b^3)(2+c^3).$$

Giải

Ta có

$$(a+b+c)^3 = (a.1.1+b.1.1+c.1.1)^3 \leq (a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)\quad \text{(đpcm)}.$$

II. Trung bình căn. Ta có tính chất: "Tổng các trung bình căn lớn hơn hoặc bằng trung bình căn của tổng".

Ví dụ 16. Với $a_i, b_i (i = \overline{1,m})$ là các số thực dương bất kỳ, chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\geqslant\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i_i=1}^{n}b_i\right)^2}.$$

Giải

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = 2$.

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\geqslant\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}. \quad (1.5.1)$$

Bình phương hai vế ta nhận được

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}\geqslant a_1a_2+b_1b_2$$

$$\Leftrightarrow (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\geqslant(a_1a_2+b_1b_2)^2$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_2-a_2b_1)^2\geqslant 0.$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$.

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_k^2+b_k^2}\geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_k^2)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_k)^2}.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$.
Ta có

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i^2+b_i^2}=\left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}.$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\geqslant\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}$$

(Theo giả thiết quy nạp).

$$\geqslant\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k+1}b_i\right)^2}$$ (áp dụng (1.5.1) (đpcm)) .

Ví dụ 17. Với $a_i, b_i, c_i \in R(i=\overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}\geqslant\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2}.$$

Giải

Chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = 2$

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\geqslant\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)\geqslant(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2.$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_2-a_2b_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2\geqslant 0$$ (Hiển nhiên đúng).

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$

$$\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2} \geqslant \sqrt{(\sum_{i=1}^{k} a_i)^2+(\sum_{i=1}^{k} b_i)^2+(\sum_{i=1}^{k} c_i)^2}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$.
Ta có

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2} = \Big(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}\Big)+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2+c_{k+1}^2}$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2} \geqslant \sqrt{(\sum_{i=1}^{k} a_i)^2+(\sum_{i=1}^{k} b_i)^2+(\sum_{i=1}^{k} c_i)^2}+$$

$$+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2+c_{k+1}^2} \geqslant \sqrt{(\sum_{i=1}^{k+1} a_i)^2+(\sum_{i=1}^{k+1} b_i)^2+(\sum_{i=1}^{k+1} c_i)^2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 18. Với $a_i, b_i (i=\overline{1,n})$ là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{a_i^3+b_i^3} \geqslant \sqrt[3]{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^3}.$$

Giải

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng khi $n = 2$.

$$\sqrt[3]{a_1^3+b_1^3}+\sqrt[3]{a_2^3+b_2^3} \geqslant \sqrt[3]{(a_1+a_2)^3+(b_1+b_2)^3}.$$

Lập phương hai vế bất đẳng thức ta thu được

$$\sqrt[3]{(a_1^3+b_1^3)^2(a_2^3+b_2^3)}+\sqrt[3]{(a_1^3+b_1^3)(a_2^3+b_2^3)^2} \geqslant a_1^2a_2+a_1a_2^2+b_1^2b_2+b_1b_2^2. \quad (1.5.2).$$

Áp dung bất đẳng thức Bunhiacopski mở rộng (tính chất trung bình nhân) ta thu được

$$\sqrt[3]{(a_1^3+b_1^3)^2(a_2^3+b_2^3)} \geqslant a_1\cdot a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_1\cdot b_2 = a_1^2a_2+b_1^2b_2$$

$$\sqrt[3]{(a_1^3+b_1^3)(a_2^3+b_2^3)^2} \geqslant a_1 \cdot a_2 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \cdot b_2 = a_1 a_2^2 + b_1 b_2^2.$$

Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức trên ta thu được (1.5.2).
Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

$$\sum_{i=1}^{k+1} \sqrt[3]{a_i^3+b_i^3} \geqslant \sqrt[3]{\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^3 + \left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^3} + \sqrt[3]{a_{k+1}^3 + b_{k+1}^3}$$

(Theo giả thiết quy nạp).

$$\geqslant \sqrt[3]{\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)^3 + \left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i\right)^3}.$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Ví dụ 19. Với $a_i, b_i, c_i (i = \overline{1,n})$ là những số thực dương , chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{a_i^3+b_i^3+c_i^3} \geqslant \sqrt[3]{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^3 + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^3}.$$

Giải

Chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = 2$

$$\sqrt[3]{a_1^3+b_1^3+c_1^3} + \sqrt[3]{a_2^3+b_2^3+c_2^3} \geqslant \sqrt[3]{(a_1+a_2)^3+(b_1+b_2)^3+(c_1+c_2)^3} \quad (1.5.3)$$

Lập phương hai vế ta thu được

$$\sqrt[3]{(a_1^3+b_1^3+c_1^3)^2(a_2^3+b_2^3+c_2^3)} + \sqrt[3]{(a_1^3+b_1^3+c_1^3)(a_2^3+b_2^3+c_2^3)^2} \geqslant$$

$$\geqslant a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + b_1^2 b_2 + b_1 b_2^2 + c_1^2 c_2^2 + c_1 c_2^2.$$

Áp dụng kết quả ví dụ 5 ta thu được

$$\sqrt[3]{(a_1^3+b_1^3+c_1^3)^2(a_2^3+b_2^3+c_2^3)} \geqslant a_1^2 a_2 + b_1^2 b_2 + c_1^2 c_2,$$

$$\sqrt[3]{(a_1^3+b_1^3+c_1^3)(a_2^3+b_2^3+c_2^3)^2} \geqslant a_1 a_2^2 + b_1 b_2^2 + c_1 c_2^2.$$

Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức trên ta thu được (1.5.3)
Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$.

$$\sum_{i=1}^{k}\sqrt[3]{a_i^3+b_i^3+c_i^3} \geqslant \sqrt[3]{\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^3+\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)^3+\left(\sum_{i=1}^{k}c_i\right)^3}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.
Ta có

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt[3]{a_i^3+b_i^3+c_i^3} = \left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt[3]{a_i^3+b_i^3+c_i^3}\right) + \sqrt[3]{a_{k+1}^3+b_{k+1}^3+c_{k+1}^3}$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt[3]{a_i^3+b_i^3+c_i^3} \geqslant \sqrt[3]{\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^3+\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)^3+\left(\sum_{i=1}^{k}c_i\right)^3}+$$

$$+\sqrt[3]{a_{k+1}^3+b_{k+1}^3+c_{k+1}^3} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i\right)^3+\left(\sum_{i=1}^{k+1}b_i\right)^3+\left(\sum_{i=1}^{k+1}c_i\right)^3} \quad \text{(đpcm)}.$$

Chúng ta xét một số trường hợp cụ thể sau:

Ví dụ 20. Với $a, b, c \in R$, chứng minh rằng

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2} \geqslant \sqrt{9+(a+b+c)^2}.$$

Giải

Ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}+\sqrt{z^2+c^2} \geqslant \sqrt{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}.$$

Chọn $x = y = z = 1$ ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh .

Ví dụ 21. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{1+a^3}+\sqrt[3]{1+b^3}+\sqrt[3]{1+c^3} \geqslant \sqrt[3]{27+(a+b+c)^3}.$$

Giải

Ta có bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{x^3+a^3}+\sqrt[3]{y^3+b^3}+\sqrt[3]{z^3+c^3} \geqslant \sqrt[3]{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}.$$

(Với $x, y, z, a, b, c > 0$).
Chọn $x = y = z = 1$ ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 22. Với a, b, c là các số thực dương , chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{1+a^3+b^3}+\sqrt[3]{1+b^3+c^3}+\sqrt[3]{1+c^3+a^3} \geqslant \sqrt[3]{27+2(a+b+c)^3}.$$

Giải

Ta có bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{x^3+a^3+b^3}+\sqrt[3]{y^3+b^3+c^3}+\sqrt[3]{z^3+c^3+a^3} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[3]{(x+y+z)^3+2(a+b+c)^3}.$$

Chọn $x = y = z = 1$ ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh .

Ví dụ 23. Với $a, b > 0$, chứng minh rằng

$$P = 2\sqrt{1+a^2}+3\sqrt{1+b^2} \geqslant \sqrt{25+(2a+3b)^2}.$$

Giải

Ta có

$$P = \sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+b^2} \geqslant \sqrt{5^2+(2a+3b)^2}.$$

Ví dụ 24. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2} \geqslant \sqrt{1+\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2}+$$

$$+\sqrt{1+\left(\frac{b+2c}{3}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{c+2a}{3}\right)^2}.$$

Giải

Ta có

$$\sqrt{1+a^2}+2\sqrt{1+b^2} \geqslant \sqrt{9+(a+2b)^2} = 3\sqrt{1+\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2}$$

Tương tự

$$\sqrt{1+b^2}+2\sqrt{1+c^2} \geqslant 3\sqrt{1+\left(\frac{b+2c}{3}\right)^2},$$

$$\sqrt{1+c^2}+2\sqrt{1+a^2}\geqslant 3\sqrt{1+\left(\frac{c+2a}{3}\right)^2}.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh

Ví dụ 25. Với $a, b \in R$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{9+(a+b+1)^2}-\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}.$$

Giải

Ta có

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1^2+1^2}\geqslant\sqrt{9+(a+b+1)^2}.$$

Suy ra $P\leq\sqrt{2}$.
Vậy $P_{max}=\sqrt{2}$ (khi $a=b=1$).

III. Trung bình điều hoà.
Ta xét các bất đẳng thức cơ bản sau

Ví dụ 26. Với $a_i, b_i > 0 (i=\overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\leq\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{i=1}^{n}b_i)}{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}-b_i\right]\leq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i}-\sum_{i=1}^{n}b_i.$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i+b_i}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)}.$$

Ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\sqrt{a_i+b_i}}\sqrt{a_i+b_i}\right)^2\leq$$

$$\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i+b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\quad(\text{đpcm}).$$

Ta xét một số bài toán cụ thể:

Ví dụ 27. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} + \frac{3c}{3+c} \leq \frac{6(a+b+c)}{6+(a+b+c)}.$$

Giải

Ta có

$$\left(\frac{a}{1+a} - 1\right) + \left(\frac{2b}{2+b} - 2\right) + \left(\frac{3c}{3+c} - 3\right) \leq \frac{6(a+b+c)}{6+(a+b+c)} - 6$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{1}{1+a} + \frac{4}{2+b} + \frac{9}{3+c} \geqslant \frac{36}{6+(a+b+c)}$$

Ta có

$$36 = 6^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a} + \frac{2}{\sqrt{2+b}}\sqrt{2+b} + \frac{3}{\sqrt{3+c}}\sqrt{3+c}\right)^2$$

Suy ra

$$36 \leq N \cdot (6+a+b+c) \Leftrightarrow N \geqslant \frac{36}{6+(a+b+c)} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 28. Với a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác; h_a, h_b, h_c là độ dài của 3 đường cao, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, S là diện tích tam giác, chứng minh rằng

$$S\left(\frac{1}{a+h_a} + \frac{1}{b+h_b} + \frac{1}{c+h_c}\right) \leq \frac{p \cdot (h_a+h_b+h_c)}{2p+(h_a+h_b+h_c)}.$$

Giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{ah_a}{a+h_a} + \frac{bh_b}{b+h_b} + \frac{ch_c}{c+h_c} \leq \frac{(a+b+c)(h_a+h_b+h_c)}{(a+b+c)+(h_a+h_b+h_c)}.$$

Theo ví dụ 26 điều này hiển nhiên đúng.

IV. Mối liên quan giữa các dạng trung bình .

Ví dụ 29. Với a, b là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$$

Ta có

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0$$

Suy ra

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 30. Với $a, b > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}.$$

Giải

Luỹ thừa 12 cả hai vế ta nhận được

$$(a^3+b^3)^4 \leq 2(a^4+b^4)^3$$

Áp dụng kết quả ở ví dụ 5 ta có

$$(a^3+b^3)^4 = (1.a.a.a+1.b.b.b)^4 \leq (1^4+1^4)(a^4+b^4)^3 \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 31. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt[5]{\frac{a^5+b^5+c^5}{3}} \leq \sqrt[6]{\frac{a^6+b^6+c^6}{3}}.$$

Giải

Luỹ thừa 30 cả hai vế ta nhận được

$$(a^5+b^5+c^5)^6 \leq 3(a^6+b^6+c^6)^5.$$

Áp dụng kết quả ở ví dụ 5 ta có

$$(a^5+b^5+c^5)^6 = (1.a.a.a.a.a+1.b.b.b.b.b+1.c.c.c.c.c)^6$$

$$\leq (1^6+1^6+1^6)(a^6+b^6+c^6)^5 \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^4}{a+b} + \frac{b^4}{b+c} + \frac{c^4}{c+a} \geqslant \frac{1}{18}(a+b+c)^3.$$

Hướng dẫn

$$(a+b+c)^4 = \left(\frac{a}{\sqrt[4]{a+b}}\sqrt[4]{a+b}\cdot 1\cdot 1 + \frac{b}{\sqrt[4]{b+c}}\sqrt[4]{b+c}\cdot 1\cdot 1 + \frac{c}{\sqrt[4]{c+a}}\sqrt[4]{c+a}\cdot 1\cdot 1\right)^4$$
$$\leq P\cdot 2\cdot (a+b+c)\cdot 3\cdot 3.$$

Suy ra $\quad P \geqslant \dfrac{1}{18}(a+b+c)^3 \quad$ (đpcm).

2. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $a + b^2 + c^3 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^3 + b^3 + c^3)(1 + b^3 + c^3)(2 + c^3).$$

Hướng dẫn

$$3^3 = (a + b^2 + c^3)^3 = (a.1.1 + b.b.1 + c.c.c)^3$$
$$\leq (a^3 + b^3 + c^3)(1 + b^3 + c^3)(2 + c^3) = P.$$

3. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{2a}{1+a} + \frac{bc}{b+c} \leq \frac{(2+b)(c+2a)}{2+b+c+2a}.$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức đã cho được viết lại dưới dạng

$$\frac{a}{1+a} + \frac{bc}{b+c} + \frac{a}{1+a} \leq \frac{(1+b+1)(a+c+a)}{(1+b+1)+(a+c+a)}.$$

4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt[3]{1+\sin^6 x} + \sqrt[3]{8+\cos^6 x}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$y = \sqrt[3]{1+(\sin^2 x)^3} + \sqrt[3]{2^3+(\cos^2 x)^3} \geqslant \sqrt[3]{3^3+(\sin^2 x+\cos^2 x)^3}.$$

Suy ra $y_{min} = \sqrt[3]{28}$.

5. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{4}(a+b),$$

$$\frac{bc}{b+c} \leq \frac{1}{4}(b+c).$$

$$\frac{ca}{c+a} \leq \frac{1}{4}(c+a).$$

6. Với $a, b, c > 0, a+b+c = 1$, chứng minh rằng

$$P = (1+64^a)(1+8^b)^2(1+4^c)^3 \geqslant 3^6.$$

Hướng dẫn

Ta có

$P = (1+64^a)(1+8^b)(1+8^b)(1+4^c)(1+4^c)(1+4^c) \geqslant$

$\geqslant (1+\sqrt[6]{64^a \cdot 8^b \cdot 8^b \cdot 4^c \cdot 4^c \cdot 4^c})^6 =$

$= (1+2^a \cdot 2^b \cdot 2^c)^6 = (1+2^{a+b+c})^6 = 3^6.$

7. Với $a, b, c > 0, a+b+c = 1$, chứng minh rằng

$$P = (1+8^a+8^b)(1+8^b+8^c)(1+8^c+8^a) \geqslant 125.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$P \geqslant (1+2\sqrt[3]{8^a \cdot 8^b \cdot 8^c})^3 = (1+2 \cdot 2^{a+b+c})^3 = 125.$$

8. Với $a, b, c > 0, a^4+b^4+c^4 = 3$, chứng minh rằng

$$\frac{(a^2+b^3+c^4)^4}{(1+b^4+c^4)(2+c^4)} \leq 9.$$

Hướng dẫn

Ta có

$(a^2+b^3+c^4)^4 = (a \cdot a \cdot 1 \cdot 1 + b \cdot b \cdot b \cdot 1 + c \cdot c \cdot c \cdot c)^4 \leq$

$\leq (a^4 + b^4 + c^4)^2(1 + b^4 + c^4)(2 + c^4)$

Suy ra

$$\frac{(a^2 + b^3 + c^4)^4}{(1 + b^4 + c^4)(2 + c^4)} \leq 9 \quad \text{(đpcm)}.$$

9. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \leq \frac{a+2b}{3+a+2b} + \frac{b+2c}{3+b+2c} + \frac{c+2a}{3+c+2a}. \quad (1.5.3)$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{b}{1+b} \leq \frac{3(a+2b)}{3+(a+2b)};$$

$$\frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{c}{1+c} \leq \frac{3(b+2c)}{3+(b+2c)};$$

$$\frac{c}{1+c} + \frac{a}{1+a} + \frac{a}{1+a} \leq \frac{3(c+2a)}{3+(c+2a)}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.5.3).

10. Với $a, b, c > 0, a + 2b + 3c = 6$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} + \frac{3c}{1+c} \leq 3.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} + \frac{3c}{1+c} \leq \frac{6(a+2b+3c)}{6+(a+2b+3c)} = \frac{36}{12} = 3.$$

11. Với $a, b > 0, a + 2b \geqslant 3$, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{1+a^3} + 2\sqrt[3]{1+b^3} \geqslant 3\sqrt[3]{2}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\sqrt[3]{1+a^3} + \sqrt[3]{1+b^3} + \sqrt[3]{1+b^3} \geqslant \sqrt[3]{3^3 + (a+2b)^3} \geqslant \sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}.$$

12. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \leq \frac{3(abc+b+c)}{3bc+abc+b+c}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{a}{1+a}+\frac{\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{b}}+\frac{\frac{1}{c}}{1+\frac{1}{c}}\leq\frac{3(a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}{3+a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{3(abc+b+c)}{3bc+abc+b+c}\quad\text{(đpcm).}$$

13. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=3abc$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+ca}\leq\frac{3(a+b+c)}{3+(a+b+c)}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{a.\frac{1}{b}}{a+\frac{1}{b}}+\frac{b.\frac{1}{c}}{b+\frac{1}{c}}+\frac{c.\frac{1}{a}}{c+\frac{1}{a}}\leq\frac{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}{(a+b+c)+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+ca}\leq\frac{3(a+b+c)}{3+(a+b+c)}$$

$$\text{(Vì }\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3).$$

14. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$, chứng minh rằng

$$P=\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{4+(b+c)^2}+\sqrt{4+(c+a)^2}\geqslant 6\sqrt{2}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\geqslant\sqrt{4+(a+b)^2}$$

Suy ra

$$P\geqslant\sqrt{4+(a+b)^2}+\sqrt{4+(b+c)^2}+\sqrt{4+(c+a)^2}$$

Suy ra

$$P\geqslant\sqrt{6^2+4.(a+b+c)^2}=6\sqrt{2}\quad\text{(đpcm).}$$

15. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\geqslant(1+ab^2)^2(1+bc^2)^2(1+ca^2)^2. \tag{1.5.4}$$

Hướng dẫn

Ta có

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^2)^2 \geqslant (1+a^2b^2)^2(1+c^2)^2 \geqslant (1+abc)^4$$

Suy ra

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+b^2)^2 \geqslant (1+ab^2)^4$$

Tương tự

$$(1+b^4)(1+c^4)(1+c^2)^2 \geqslant (1+bc^2)^4,$$

$$(1+c^4)(1+a^4)(1+a^2)^2 \geqslant (1+ca^2)^4.$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được (1.5.4).

6 Dạng phân thức

Ta chứng minh các kết quả cơ bản sau:

Ví dụ 1. Với $x_i > 1, (i = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i} \geqslant \frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Giải

Chúng ta chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp quy nạp.
Bất đẳng thức đúng với $n = 2$.

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2} \geqslant \frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2+(x_1+x_2)}{1+x_1x_2+(x_1+x_2)} \geqslant \frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}}$$
$$\Leftrightarrow 2+(x_1+x_2)+2\sqrt{x_1x_2}+(x_1+x_2)\sqrt{x_1x_2} \geqslant 2+2x_1x_2+2(x_1+x_2)$$
$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)(\sqrt{x_1x_2}-1)+2\sqrt{x_1x_2}(1-\sqrt{x_1x_2}) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x_1x_2}-1)(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geqslant 0 \quad \text{(Hiển nhiên đúng).}$$

Ta chứng minh: Nếu bất đẳng thức đúng với n thì cũng đúng với $2n$.
Thật vậy

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{1+x_i} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{1+x_i}\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{1+\left(\prod_{i=n+1}^{2n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{2n} x_i\right)^{\frac{1}{2n}}} \quad \text{(đpcm).}$$

Bất đẳng thức đã cho sẽ được chứng minh nếu chúng ta chứng minh được khẳng định sau:
Nếu bất đẳng thức đúng với $n = k+1$ thì cũng đúng với $n = k$.
Thật vậy

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1+x_i} \geqslant \frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)^{\frac{1}{k}}}$$

$$\Leftrightarrow P = \left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1+x_i}\right) + \frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)^{\frac{1}{k}}} \geqslant \frac{k+1}{1+\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)^{\frac{1}{k}}}$$

Áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra

$$P \geqslant \frac{k+1}{1+\left(\prod_{i=1}^{k} x_i \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{k+1}{1+\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)^{\frac{1}{k}}} \quad \text{(đpcm).}$$

Chứng minh tương tự ta thu được

Ví dụ 2. Với $0 < x_i < 1$, $(i = \overline{1,n})$ thì

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i} \leq \frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{x_i} \leq \sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$, ta thu được kết quả sau

Ví dụ 3. Với $0 < x_i < 1$, $(i = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[m]{1+x_i}} \leq \frac{1}{\sqrt[m]{1+\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}}.$$

Giải

Ta có

$$P \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{1+\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}}$$

*

Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m$$

Với $x_i > 0, (i = \overline{1,n})$ ta thu được kết quả sau đây

Ví dụ 4. Với $x_i > 1, (i = \overline{1,n})$, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+x_i)^m} \geqslant \frac{1}{\left(1+\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)^m}.$$

Giải

Ta có

$$P \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\right)^m \geqslant \left(\frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}\right)^m$$

$$= \frac{1}{\left(1+\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)^m} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 5. Với $a, b > 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geqslant \frac{2}{1+\sqrt{ab}}.$$

Giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{(a+b)+2}{1+(a+b)+ab} \geqslant \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$
$$\Leftrightarrow (a+b)+2+(a+b)\sqrt{ab}+2\sqrt{ab} \geqslant 2+2(a+b)+2ab$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(\sqrt{ab}-1)+2\sqrt{ab}(1-\sqrt{ab}) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0 \quad \text{(Hiển nhiên đúng vì } \sqrt{ab}>1\text{)}.$$

Ví dụ 6. Với $0<a,b<1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}.$$

Giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{(a+b)+2}{1+(a+b)+ab} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$
$$\Leftrightarrow (a+b)+2+(a+b)\sqrt{ab}+2\sqrt{ab} \leq 2+2(a+b)+2ab$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \leq 0 \quad \text{(Hiển nhiên đúng vì } \sqrt{ab}<1\text{)}.$$

Ví dụ 7. Với $a,b>1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^n}+\frac{1}{(1+b)^n} \geqslant \frac{2}{(1+\sqrt{ab})^n}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{a^n+b^n}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \quad \text{Với } a,b>0$$

Ta thu được

$$\frac{1}{(1+a)^n}+\frac{1}{(1+b)^n} \geqslant 2\left(\frac{\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}}{2}\right)^n$$

Áp dụng kết quả ví dụ 5 ta thu được

$$\frac{1}{(1+a)^n}+\frac{1}{(1+b)^n} \geqslant 2\left(\frac{1}{1+\sqrt{ab}}\right)^n = \frac{2}{(1+\sqrt{ab})^n} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 8. Với $0 < a, b < 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1+b}} \leq \frac{2}{\sqrt[n]{1+\sqrt{ab}}}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{a+b}{2}} \quad \text{Với } a, b > 0$$

Ta thu được

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1+b}} \leq 2\sqrt[n]{\frac{\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}}{2}}$$

Áp dụng kết quả ở ví dụ 6 ta thu được

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1+b}} \leq 2\sqrt[n]{\frac{1}{1+\sqrt{ab}}} = \frac{2}{\sqrt[n]{1+\sqrt{ab}}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Một số bất đẳng thức sau được suy ra trực tiếp từ các bất đẳng thức đơn giản trên:

Ví dụ 9. Với $a, b > 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \geqslant \frac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a}{1+b} + 1 + \frac{b}{1+a} + 1 \geqslant \frac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}} + 2$$

$$\Leftrightarrow (a+b+1)\left(\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a}\right) \geqslant (1+2\sqrt{ab}) \cdot \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Ta có

$$a + b + 1 \geqslant 1 + 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+a}\geqslant\frac{2}{1+\sqrt{ab}}.$$

Nhân vế với vế hai bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 10. Với $a, b, c > 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geqslant\frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{abc}}\geqslant\frac{4}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

Ta có

$$P\geqslant\frac{2}{1+\sqrt{ab}}+\frac{2}{1+\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}}\geqslant\frac{4}{1+\sqrt[4]{abc\cdot\sqrt[3]{abc}}}=\frac{4}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

(đpcm).

Ví dụ 11. Với $a, b, c > 1$, chứng minh rằng

$$\frac{2+b+c}{1+a}+\frac{2+c+a}{1+b}+\frac{2+a+b}{1+c}\geqslant 6.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{2+b+c}{1+a}+1+\frac{2+c+a}{1+b}+1+\frac{2+a+b}{1+c}+1\geqslant 9$$

$$\Leftrightarrow (3+a+b+c)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)\geqslant 9$$

Ta có

$$3+a+b+c\geqslant 3(1+\sqrt[3]{abc})$$

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geqslant\frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Nhân vế với vế của hai bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 12. Với $a, b, c > 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+b)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}\geqslant\frac{3}{(1+\sqrt[3]{abc})^3}.$$

Giải

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$P=\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+b)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}+\frac{1}{(1+\sqrt[3]{abc})^3}\geqslant\frac{4}{(1+\sqrt[3]{abc})^3}$$

Áp dụng kết quả ví dụ 7 ta có

$$P\geqslant\frac{2}{(1+\sqrt{ab})^3}+\frac{2}{(1+\sqrt{c\cdot\sqrt[3]{abc}})^3}$$

$$\geqslant\frac{4}{(1+\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}})^3}\geqslant\frac{4}{(1+\sqrt[3]{abc})^3}\quad\text{(đpcm).}$$

Ví dụ 13. Với $o < a, b, c < 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\leq\frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}+\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}}\leq\frac{4}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}}$$

Áp dụng kết quả ví dụ 8 ta thu được

$$P\leq\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{ab}}}+\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}}}\leq\frac{4}{\sqrt{1+\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}}}=\frac{4}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}}\quad\text{(đpcm).}$$

Ví dụ 14. Với $a, b, c > 1$, chứng minh rằng

$$P=\left(\frac{2+b+c}{1+a}\right)^2+\left(\frac{2+c+a}{1+b}\right)^2+\left(\frac{2+a+b}{1+c}\right)^2\geqslant 12.$$

Giải

Ta có

$$P \geqslant 3 \cdot \left(\frac{\frac{2+b+c}{1+a} + \frac{2+c+a}{1+b} + \frac{2+a+b}{1+c}}{3} \right)^2 \geqslant 3 \cdot \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 12$$

(Áp dụng ví dụ 11.)

Ví dụ 15. Với $0 < a, b, c < 1$, chứng minh rằng

$$(a+b+c) + \frac{a(2+b+c)}{1+a} + \frac{b(2+c+a)}{1+b} + \frac{c(2+a+b)}{1+c} \geqslant 9\sqrt[3]{abc}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$a\left(1 + \frac{2+b+c}{1+a}\right) + b\left(1 + \frac{2+c+a}{1+b}\right) + c\left(1 + \frac{2+a+b}{1+c}\right) \geqslant 9\sqrt[3]{abc}$$

$$\Leftrightarrow (3+a+b+c)\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}\right) \geqslant 9\sqrt[3]{abc}$$

Ta có

$$3+a+b+c \geqslant 3(1+\sqrt[3]{abc}),$$

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Nhân vế với vế hai bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 16. Với $0 < a, b, c \leq 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \leq \frac{1}{1+ab^2} + \frac{1}{1+bc^2} + \frac{1}{1+ca^2}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+b^3} \leq \frac{3}{1+ab^2}$$

Tương tự ta nhận được

$$\frac{1}{1+b^3} + \frac{2}{1+c^3} \leq \frac{3}{1+bc^2}$$

$$\frac{1}{1+c^3}+\frac{2}{1+a^3}\le\frac{3}{1+ca^2}.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 17. Với $a, b, c \geqslant 0, a+b+c=3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{1+2^a}+\frac{1}{1+2^b}+\frac{1}{1+2^c}.$$

Giải

$P \geqslant \dfrac{3}{1+2^{\frac{a+b+c}{3}}}=\dfrac{3}{1+2}=1$, dấu đẳng thức đạt được khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.

Ví dụ 18. Với $a, b, c \geqslant 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+8^a}+\frac{1}{1+8^b}+\frac{1}{1+8^c}\geqslant\frac{1}{1+2^{a+2b}}+\frac{1}{1+2^{b+2c}}+\frac{1}{1+2^{c+2a}}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{1+8^a}+\frac{1}{1+8^b}+\frac{1}{1+8^b}\geqslant\frac{3}{1+8^{\frac{a+2b}{3}}}=\frac{3}{1+2^{a+2b}}$$

Tương tự

$$\frac{1}{1+8^b}+\frac{1}{1+8^c}+\frac{1}{1+8^c}\geqslant\frac{3}{1+2^{b+2c}},$$

$$\frac{1}{1+8^c}+\frac{1}{1+8^a}+\frac{1}{1+8^a}\geqslant\frac{3}{1+2^{c+2a}}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 19. Với $a, b, c \geqslant 1$, chứng minh rằng

$$P=\frac{1}{1+a^6}+\frac{2}{1+b^3}+\frac{3}{1+c^2}\geqslant\frac{6}{1+abc}.$$

Giải

$$P = \frac{1}{1+a^6}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+c^2} \geqslant \frac{6}{1+abc} \quad (\text{ đpcm}).$$

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN.

1. Với $0 < a, b, c \leq 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+ab^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+bc^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+ca^2}}.$$

Hướng dẫn

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^3}} \leq \frac{3}{\sqrt{1+ab^2}}.$$

2. Với $0 < a, b, c \leq 1$, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+a^4}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^4}}+\frac{2}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{4}{\sqrt{1+abc}}.$$

Hướng dẫn

$$P \leq \frac{2}{\sqrt{1+a^2b^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{4}{\sqrt{1+abc}}.$$

3. Với $a, b, c \geqslant 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a^3)^3}+\frac{1}{(1+b^3)^3}+\frac{1}{(1+c^3)^3} \geqslant \frac{1}{(1+ab^2)^3}+\frac{1}{(1+bc^2)^3}+\frac{1}{(1+ca^2)^3}.$$

Hướng dẫn

$$\frac{1}{(1+a^3)^3}+\frac{1}{(1+b^3)^3}+\frac{1}{(1+b^3)^3} \geqslant \frac{3}{(1+ab^2)^3},$$

$$\frac{1}{(1+b^3)^3}+\frac{1}{(1+c^3)^3}+\frac{1}{(1+c^3)^3} \geqslant \frac{3}{(1+bc^2)^3},$$

$$\frac{1}{(1+c^3)^3}+\frac{1}{(1+a^3)^3}+\frac{1}{(1+a^3)^3} \geqslant \frac{3}{(1+ca^2)^3}.$$

Cộng vế với vế của ba đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

4. Với $a, b, c \geqslant 1$, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{(1+a^6)^3} + \frac{2}{(1+b^3)^3} + \frac{3}{(1+c^2)^3} \geqslant \frac{6}{(1+abc)^3}.$$

Hướng dẫn

$$P = \frac{1}{(1+a^6)^3} + \frac{1}{(1+b^3)^3} + \frac{1}{(1+b^3)^3} + \frac{1}{(1+c^2)^3} + \frac{1}{(1+c^2)^3} + \frac{1}{(1+c^2)^3} \geqslant \frac{6}{(1+abc)^3}.$$

5. Với $a, b, c > 0, a + b + c = 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2^{\frac{a}{2}}}{\sqrt{1+2^a}} + \frac{2^{\frac{b}{2}}}{\sqrt{1+2^b}} + \frac{2^{\frac{c}{2}}}{\sqrt{1+2^c}}.$$

Hướng dẫn

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^a}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^b}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^c}} \leq \frac{3}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a+b+c}{3}}}} = \frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}}$$

(Dấu đẳng thức khi $a = b = c = \frac{1}{3}$).

6. Với $a, b \geqslant 1$, chứng minh rằng với mọi $n \in N^*$ ta có

$$\frac{1}{1+a^n b} + \frac{n-1}{1+b} \geqslant \frac{n}{1+ab}.$$

Hướng dẫn

$$\frac{1}{1+a^n b} + \underbrace{\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+b} + \cdots + \frac{1}{1+b}}_{n-1 \text{ số hạng}} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{a^n b^n}} = \frac{n}{1+ab}.$$

7. Với $a, b, c \geqslant 1$, chứng minh rằng

$$\frac{3}{1+a^2} + \frac{4}{1+b^2} + \frac{5}{1+c^2} \geqslant \frac{2}{1+ab} + \frac{6}{1+bc} + \frac{4}{1+ca}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{2}{1+ab} \leq \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2},$$

$$\frac{6}{1+bc} \leq \frac{3}{1+b^2} + \frac{3}{1+c^2},$$
$$\frac{4}{1+ca} \leq \frac{2}{1+c^2} + \frac{2}{1+a^2}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh .

8. Với $1 \leq a, b, c \leq 2$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a} + \frac{3}{1+b} + \frac{2a}{1+c} \geqslant \frac{2(2-a)}{1+\sqrt{ab}} + \frac{2(1+a)}{1+\sqrt{bc}} + \frac{2(a-1)}{1+\sqrt{ca}}.$$

Hướng dẫn

$$\frac{2(2-a)}{1+\sqrt{ab}} \leq (2-a)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}\right),$$
$$\frac{2(1+a)}{1+\sqrt{bc}} \leq (1+a)\left(\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right),$$
$$\frac{2(a-1)}{1+\sqrt{ca}} \leq (a-1)\left(\frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+a}\right).$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

9. Với $a > 1. 0 < b, c < 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{bc}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{bc}}.$$

Hướng dẫn

Ta có $a, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} > 1$ và:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+\frac{1}{b}} + \frac{1}{1+\frac{1}{c}} \geqslant \frac{3}{1+\sqrt[3]{\frac{a}{bc}}} \quad \text{(đpcm)}.$$

10. Với $0 < a, b, c < 1$, chứng minh rằng

$$\frac{4}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{3}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{5}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}} + \frac{4}{\sqrt{1+bc}} + \frac{6}{\sqrt{1+ca}}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+ab}},$$

$$2\Big(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\Big)\le\frac{4}{\sqrt{1+bc}},$$

$$3\Big(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\Big)\le\frac{6}{\sqrt{1+ca}}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

11. Với $0<a,b,c<1$, chứng minh rằng

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+a^4}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^4}}+\frac{2}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{4}{\sqrt{1+abc}}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^4}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^4}}\le\frac{2}{\sqrt{1+a^2b^2}}$$

Suy ra

$$P\le\frac{2}{\sqrt{1+a^2b^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+ac^2}}\le\frac{4}{\sqrt{1+abc}}\quad\text{(đpcm)}.$$

Chương 2

Một số áp dụng của bất đẳng thức Côsi

1 Xây dựng bất đẳng thức một biến và áp dụng

Ví dụ 1. Với $0 \leq a \leq 1$, chứng minh rằng $a(1-a) \leq \dfrac{1}{4}$

Giải

Ta có $a^2 + \dfrac{1}{4} \geqslant a \Leftrightarrow a(1-a) \leq \dfrac{1}{4}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = \dfrac{1}{2}$.
Một số áp dụng.
Ví dụ 2. Với $0 < a, b, c < 1$, chứng minh trong ba đẳng thức :

$$a(1-b) > \frac{1}{4},$$

$$b(1-c) > \frac{1}{4},$$

$$c(1-a) > \frac{1}{4}$$

có ít nhất một bất đẳng thức sai.

Giải

Giả sử 3 bất đẳng thức đều đúng suy ra

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) > \frac{1}{64} \tag{2.1.1}$$

Mặt khác ta có

$$a(1-a) \leq \frac{1}{4},$$
$$b(1-b) \leq \frac{1}{4},$$
$$c(1-c) \leq \frac{1}{4}.$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{64} \tag{2.1.2}$$

Từ (2.1.1), (2.1.2) suy ra mâu thuẫn, bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3. Với $0 \leq a \leq 1$, chứng minh rằng

1) $a(1-a^2) \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$,

2) $a(1-a^3) \leq \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$,

3) $a(1-a^n) \leq \dfrac{n}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}$.

Giải

1) Ta có

$$a^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geqslant 3 \cdot a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = a$$

Suy ra

$$a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ (đpcm).}$$

2) Ta có

$$a^4 + \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} \geqslant a$$

Suy ra $\quad a(1-a^3) \leq \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ (đpcm).

3) Ta có

$$a^{n+1} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}}_{n \text{ số hạng}} \geqslant a$$

Suy ra

$$a(1-a^n) \leq \frac{n}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}} \text{ (đpcm).}$$

Một số ví dụ áp dụng.

Ví dụ 4. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a}{1-a^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\Leftrightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{(Xem ví dụ 3.)}$$

Tương tự

$$\frac{b}{1-b^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 \quad ,$$

$$\frac{c}{1-c^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2 \quad .$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh .

Ví dụ 5. Với a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^3+b^3+c^3+d^3=1$. chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^3+c^3+d^3}+\frac{b^2}{c^3+d^3+a^3}+\frac{c^2}{d^3+a^3+b^3}+\frac{d^2}{a^3+b^3+c^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^2}{1-a^3}+\frac{b^2}{1-b^3}+\frac{c^2}{1-c^3}+\frac{d^2}{1-d^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}(a^3+b^3+c^3+d^3)$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2}{1-a^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}a^3 \Leftrightarrow a(1-a^3) \leq \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \quad \text{(Xem ví dụ 3.)}$$

Tương tự

$$\frac{b^2}{1-b^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}b^3 \quad ,$$

$$\frac{c^2}{1-c^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}c^3 \quad ,$$

$$\frac{d^2}{1-d^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}d^3 \quad .$$

Cộng vế với vế bốn bất đẳng thức trên ta được điều cần chứng minh.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Ví dụ 6. Với $a > 0$, chứng minh rằng

1) $\quad a^2(1-2a) \leq \dfrac{1}{27}$,

2) $\quad a^3(1-3a) \leq \dfrac{1}{256}$,

3) $\quad a^n(1-na) \leq \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \quad (n \in N^*)$.

Giải

1) Ta có

$$a^3 + a^3 + \frac{1}{27} \geqslant a^2 \Leftrightarrow a^2(1-2a) \leq \frac{1}{27}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \dfrac{1}{3}$.

2) Ta có

$$a^4 + a^4 + a^4 + \frac{1}{256} \geqslant a^3 \Leftrightarrow a^3(1-3a) \leq \frac{1}{256}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \dfrac{1}{4}$.

3) Ta có

$$\underbrace{a^{n+1} + a^{n+1} + \cdots + a^{n+1}}_{\text{n số hạng}} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \geqslant a^n$$

$$\Leftrightarrow a^n(1-na) \leq \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = \dfrac{1}{n+1}$.

Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 7. Với $0 < a, b, c < \dfrac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{a(2b+2c-1)} + \frac{1}{b(2c+2a-1)} + \frac{1}{c(2a+2b-1)} \geqslant 27.$$

Giải

Ta có

$$a^2(1-2a) \leq \frac{1}{27} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2(1-2a)} \geqslant 27$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a(1-2a)} \geqslant 27a \Leftrightarrow \frac{1}{a(2b+2c-1)} \geqslant 27a.$$

Tương tự

$$\frac{1}{b(2c+2a-1)} \geqslant 27b,$$

$$\frac{1}{c(2a+2b-1)} \geqslant 27c.$$

Suy ra $\quad P \geqslant 27(a+b+c) = 27 \quad$ (đpcm).

Ví dụ 8. Với $0 < a, b, c, d < \dfrac{1}{3}$ thoả mãn điều kiện $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{a^2(3b+3c+3d-2)} + \frac{1}{b^2(3c+3d+3a-2)} +$$

$$+ \frac{1}{c^2(3d+3a+3b-2)} + \frac{1}{d^2(3a+3b+3c-2)} \geqslant 256.$$

Giải

Ta có

$$a^3(1-3a) \leq \frac{1}{256} \Leftrightarrow \frac{1}{a^3(1-3a)} \geqslant 256$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2(1-3a)} \geqslant 256a \Leftrightarrow \frac{1}{a^2(3b+3c+3d-2)} \geqslant 256a.$$

Tương tự

$$\frac{1}{b^2(3+3d+3a-2)} \geqslant 256b,$$
$$\frac{1}{c^2(3d+3a+3b-2)} \geqslant 256c,$$
$$\frac{1}{d^2(3a+3b+3c-2)} \geqslant 256d.$$

Suy ra $\qquad P \geqslant 256(a+b+c+d) = 256.$

Ví dụ 9. Chứng minh rằng

1) $\dfrac{\sqrt{2a-1}}{a} \leq 1,$

2) $\dfrac{\sqrt[3]{3a-2}}{a} \leq 1,$

3) $\dfrac{\sqrt[n]{na-n+1}}{a} \leq 1.$

Giải

1) Ta có

$$\frac{\sqrt{2a-1}}{a} \leq \frac{2a-1+1}{2a} = 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

2) Ta có

$$\frac{\sqrt[3]{3a-2}}{a} \leq \frac{3a-2+1+1}{3a} = 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

3) Ta có

$$\frac{\sqrt[n]{na-(n-1)}}{a} \leq \frac{na-(n-1)+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{n - 1 số}}}{na} = 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

Ví dụ 10. Với $a, b, c > \frac{1}{2}$; $\quad a+b+c = 3$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{\sqrt{5-2(b+c)}} + \frac{b^2}{\sqrt{5-2(c+a)}} + \frac{c^2}{\sqrt{5-2(a+b)}} \geqslant 3.$$

Giải

Ta có

$$\frac{\sqrt{2a-1}}{a} \le 1 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{2a-1}} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{\sqrt{5-2(b+c)}} \geqslant a.$$

Tương tự

$$\frac{b^2}{\sqrt{5-2(c+a)}} \geqslant b.$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{5-2(a+b)}} \geqslant c.$$

Suy ra $P \geqslant a+b+c=3.$

Ví dụ 11. Với $a, b, c \geqslant \frac{1}{2}$, chứng minh rằng

$$P = \frac{\sqrt{2a-1}}{a} + \frac{\sqrt[3]{3b-2}}{b} + \frac{\sqrt[4]{4c-3}}{c} \le 3.$$

Giải

Ta có

$$\frac{\sqrt{2a-1}}{a} \le 1, \quad \frac{\sqrt[3]{3b-2}}{b} \le 1, \quad \frac{\sqrt[4]{4c-3}}{c} \le 1.$$

Cộng các bất đẳng thức trên suy ra $P \le 3$ (đpcm).

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1. Với $0 < a, b, c < \frac{1}{2}$, chứng minh rằng trong 3 bất đẳng thức

$$a^2(1-2b) > \frac{1}{27}, \quad b^2(1-2c) > \frac{1}{27}, \quad c^2(1-2a) > \frac{1}{27}$$

có ít nhất một đẳng thức sai.

Hướng dẫn

Nếu cả ba bất đẳng thức trên đúng, suy ra

$$a^2b^2c^2(1-2a)(1-2b)(1-2c) > \left(\frac{1}{27}\right)^3$$

Mặt khác $a^2b^2c^2(1-2a)(1-2b)(1-2c) \leq (\frac{1}{27})^3$ suy ra mâu thuẫn.

2. Với $0 < a, b, c < \frac{1}{3}$, $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{3}{64}$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{1-3a} + \frac{1}{1-3b} + \frac{1}{1-3c} \geqslant 12.$$

Hướng dẫn

Từ bất đẳng thức $a^3(1-3a) \leq \frac{1}{256} \Leftrightarrow \frac{1}{1-3a} \geqslant 256a^3$ thu được

$$P \geqslant 256 \cdot (a^3 + b^3 + c^3) = 256 \cdot \frac{3}{64} = 12.$$

3. Với $a, b, c \geqslant \frac{1}{2}$, $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2a-1} \cdot \sqrt[3]{3b-2} \cdot \sqrt[4]{4c-3} \leq 1.$$

Hướng dẫn

Suy ra từ các bất đẳng thức $\sqrt{2a-1} \leq a$, $\sqrt[3]{3b-2} \leq b$, $\sqrt[4]{4c-3} \leq c$

4. Với $a, b, c, d, e > 0$, thoả mãn điều kiện $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^4+c^4+d^4+e^4} + \frac{b^4}{c^4+d^4+e^4+a^4} + \frac{c^4}{d^4+e^4+a^4+b^4} +$$

$$+ \frac{d^4}{e^4+a^4+b^4+c^4} + \frac{e^4}{a^4+b^4+c^4+d^4} \geqslant \frac{5\sqrt[4]{5}}{4}.$$

5. Với $a, b > 0$, $a^2 + b^2 = \frac{2}{3}$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+3b^2} + \frac{b}{1+3a^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a^2 + b^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a}{b^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + \frac{b}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + a^2} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{a^2 + b^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{(Xem ví dụ 4.)}$$

6. Với $a, b > 0, a^3 + b^3 = \frac{1}{2}$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{2b^3 + 1} + \frac{b^2}{2a^3 + 1} \geqslant \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a^3 + b^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^3 = 1$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a^2}{b^3 + \frac{1}{2}} + \frac{b^2}{a^3 + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}}{a^3 + b^3 + \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}}{a^3 + b^3 + \frac{1}{4}} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{4}}{3} \quad \text{(Xem ví dụ 5.)}$$

7. Với $a, b > 0, a^2 + 2b^2 = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2} + \frac{4b}{a^2 + b^2} \geqslant 3\sqrt{3}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a^2 + 2b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + b^2 = 1$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a}{b^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + a^2} + \frac{b}{b^2 + a^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{(Xem ví dụ 4.)}$$

8. Với $a, b > 0, a^3 + 3b^3 = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{9b^2}{a^3 + 2b^3} \geqslant 4\sqrt[3]{4}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a^3 + 3b^3 = 1 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + b^3 + b^3 = 1$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^2}{b^3+b^3+b^3} + \frac{b^2}{a^3+b^3+b^3} + \frac{b^2}{a^3+b^3+b^3} + \frac{b^2}{a^3+b^3+b^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}.$$

9. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + 768(a+b+c) \geqslant 768.$$

Hướng dẫn

Chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a^3} + 768a \geqslant 256 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{a^3} \geqslant 256(1-3a) \quad \Leftrightarrow a^3(1-3a) \leq \frac{1}{256}.$$

10. Với $0 < a, b, c < 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) \geqslant \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Hướng dẫn

Chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}(1-a^2) \Leftrightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

11. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $a^3 + b^3 + 2c^3 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^3+2c^3} + \frac{b^2}{a^3+2c^3} + \frac{2c^2}{a^3+b^3+c^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}.$$

Hướng dẫn

Bài toán được viết lại dưới dạng

$$a^3 + b^3 + c^3 + c^3 = 1$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^3+c^3+c^3} + \frac{b^2}{a^3+c^3+c^3} + \frac{c^2}{a^3+b^3+c^3} + \frac{c^2}{a^3+b^3+c^3} \geqslant \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}.$$

(Sử dụng kết quả ví dụ 5)

2 Sử dụng hằng đẳng thức

Trong mục này chúng ta trình bày một dạng bất đẳng thức có cách giải sử dụng hằng đẳng thức.

Ví dụ 1. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^3}{c^2+a^2+ca}\geqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

Giải

Ta có $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$
Suy ra

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3-c^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^3-a^3}{c^2+a^2+ca}=0$$

$\Leftrightarrow P=Q$, trong đó

$$P=\frac{a^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^3}{c^2+a^2+ca}$$

$$Q=\frac{b^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{c^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{a^3}{c^2+a^2+ca}$$

Suy ra

$$2P=P+Q=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3+c^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^3+a^3}{c^2+a^2+ca}$$

Ta có

$$\frac{a^2+b^2-ab}{a^2+b^2+ab}\geqslant\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2+ab}\geqslant\frac{a+b}{3}$$

Thu được

$$2P\geqslant\frac{a+b}{3}+\frac{b+c}{3}+\frac{c+a}{3}=\frac{2(a+b+c)}{3}$$

Suy ra $\quad P\geqslant\dfrac{a+b+c}{3}$ (đpcm).

Ví dụ 2. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^4}{(c^2+a^2)(c+a)}\geqslant\frac{a+b+c}{4}.$$

Giải

Ta có $a-b+b-c+c-a=0$, suy ra

$$\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^4-c^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^4-a^4}{(c^2+a^2)(c+a)}=0 \Leftrightarrow P=Q$$

Trong đó

$$P=\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^4}{(c^2+a^2)(c+a)}$$

$$Q=\frac{b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{c^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{a^4}{(c^2+a^2)(c+a)}$$

Suy ra

$$2P=P+Q=\frac{a^4+b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^4+c^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^4+a^4}{(c^2+a^2)(c+a)}$$

Ta có

$$a^4+b^4\geqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)(a^2+b^2)\geqslant\frac{1}{4}(a^2+b^2)(a+b)(a+b).$$

suy ra $\dfrac{a^4+b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}\geqslant\dfrac{a+b}{4}.$

Tương tự

$$\frac{b^4+c^4}{(b^2+c^2)(b+c)}\geqslant\frac{b+c}{4}.$$

$$\frac{c^4+a^4}{(c^2+a^2)(a+b)}\geqslant\frac{c+a}{4}.$$

Suy ra

$$2P\geqslant\frac{a+b}{4}+\frac{b+c}{4}+\frac{c+a}{4}\Leftrightarrow P\geqslant\frac{a+b+c}{4}.$$

Ví dụ 3. Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{a^4+b^4+ab(a^2+b^2)+a^2b^2}+\frac{b^5}{b^4+c^4+bc(b^2+c^2)+b^2c^2}+$$

$$+\frac{c^5}{c^4+a^4+ca(c^2+a^2)+c^2a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{5}.$$

Giải

Ta có $\quad a-b+b-c+c-a=0$, suy ra

$$\frac{a^5-b^5}{a^4+b^4+ab(a^2+b^2)+a^2b^2}+\frac{b^5-c^5}{b^4+c^4+bc(b^2+c^2)+b^2c^2}+$$

$$+\frac{c^5-a^5}{c^4+a^4+ca(c^2+a^2)+c^2a^2}=0 \Leftrightarrow P=Q, \text{ trong đó}$$

$$P=\frac{a^5}{a^4+b^4+ab(a^2+b^2)+a^2b^2}+\frac{b^5}{b^4+c^4+bc(b^2+c^2)+b^2c^2}+$$

$$+\frac{c^5}{c^4+a^4+ca(c^2+a^2)+c^2a^2}$$

$$Q=\frac{b^5}{a^4+b^4+ab(a^2+b^2)+a^2b^2}+\frac{c^5}{b^4+c^4+bc(b^2+c^2)+b^2c^2}+$$

$$+\frac{a^5}{c^4+a^4+ca(c^2+a^2)+c^2a^2}$$

Suy ra $\quad 2P=P+Q$

$$2P=\frac{a^5+b^5}{a^4+b^4+ab(a^2+b^2)+a^2b^2}+\frac{b^5+c^5}{b^4+c^4+bc(b^2+c^2)+b^2c^2}+$$

$$+\frac{c^5+a^5}{c^4+a^4+ca(c^2+a^2)+c^2a^2}.$$

Ta có

$$\frac{a^5+b^5}{a^4+b^4+ab(a^2+b^2)+a^2b^2} \geqslant \frac{a^5+b^5}{a^4+b^4+a^4+b^4+\dfrac{a^4+b^4}{2}}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{a^5+b^5}{a^4+b^4} \geqslant \frac{2}{5}\cdot\frac{a+b}{2}.$$

Suy ra

$$2P \geqslant \frac{a+b}{5}+\frac{b+c}{5}+\frac{c+a}{5} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{a+b+c}{5}.$$

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1. Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$\frac{2a^2}{2a+b}+\frac{3b^2}{6b+4c}+\frac{c^2}{3c+9a} \geqslant \frac{6a+3b+2c}{12}.$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức đã cho được viết dưới dạng

$$\frac{a^2}{a+\frac{b}{2}}+\frac{(\frac{b}{2})^2}{\frac{b}{2}+\frac{c}{3}}+\frac{(\frac{c}{3})^2}{\frac{c}{3}+a}\geqslant\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}}{2}.$$

Đặt $B=\frac{b}{2}, C=\frac{c}{3}, A=a$, ta thu được

$$P=\frac{A^2}{A+B}+\frac{B^2}{B+C}+\frac{C^2}{C+A}\geqslant\frac{A+B+C}{2}$$

Ta có $A-B+B-C+C-A=0$, suy ra

$$\frac{A^2-B^2}{A+B}+\frac{B^2-C^2}{B+C}+\frac{C^2-A^2}{C+A}=0\Leftrightarrow P=Q\Leftrightarrow 2P=P+Q$$

trong đó $Q=\frac{B^2}{A+B}+\frac{C^2}{B+C}+\frac{A^2}{C+A}$

Vậy

$$2P=\frac{A^2+B^2}{A+B}+\frac{B^2+C^2}{B+C}+\frac{C^2+A^2}{C+A}\geqslant\frac{A+B}{2}+\frac{B+C}{2}+\frac{C+A}{2}$$

$$\Leftrightarrow P\geqslant\frac{A+B+C}{2}\qquad \text{(đpcm)}.$$

2. Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$P=\frac{a^6}{(a^3+b^3)(a^2+b^2+ab)}+\frac{b^6}{(b^3+c^3)(b^2+c^2+bc)}+$$

$$+\frac{c^6}{(c^3+a^3)(c^2+a^2+ca)}\geqslant\frac{a+b+c}{6}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a-b=\frac{a^6-b^6}{(a^3+b^3)(a^2+b^2+ab)}$$

$$2P=\frac{a^6+b^6}{(a^3+b^3)(a^2+b^2+ab)}+\frac{b^6+c^6}{(b^3+c^3)(b^2+c^2+bc)}+\frac{c^6+a^6}{(c^3+a^3)(c^2+a^2+ca)}$$

Ta có

$$\frac{a^6+b^6}{(a^3+b^3)(a^2+b^2+ab)} \geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{a^6+b^6}{(a^3+b^3)(a^2+b^2)} \geqslant \frac{a+b}{6}.$$

3. Với $a, b > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3}{b^2+b+1}+\frac{2-a^2-a}{3(a^2+a+1)} \geqslant \frac{a+b}{3}.$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3}{b^2+b+1}+\frac{1^3}{a^2+a+1} \geqslant \frac{a+b+1}{3}$$

(Bất đẳng thức đúng suy từ ví dụ 1 với $c=1$)

4. Với $a, b, c > 0$, $ab+bc+ca=3abc$, chứng minh rằng

$$\frac{b^2}{a(a^2+b^2+ab)}+\frac{c^2}{b(b^2+c^2+bc)}+\frac{a^2}{c(c^2+a^2+ac)} \geqslant 1.$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}}+\frac{\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc}}+\frac{\frac{1}{c^3}}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ca}} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Sử dụng kết quả ở ví dụ 1.

5. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^4c}{b(a^2c+b^3)}+\frac{b^4a}{c(b^2a+c^3)}+\frac{c^4b}{a(c^2b+a^3)} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Hướng dẫn

Vì $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c$ nên cần chứng minh

$$\frac{\frac{a^4}{b^2}}{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}}+\frac{\frac{b^4}{c^2}}{\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}}+\frac{\frac{c^4}{a^2}}{\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{b}} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)$$

Đặt $x = \dfrac{a^2}{b},\ y = \dfrac{b^2}{c},\ z = \dfrac{c^2}{a}$ ta thu được

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&(x-y)+(y-z)+(z-x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{x^2-y^2}{x+y}+\frac{y^2-z^2}{y+z}+\frac{z^2-x^2}{z+x}=0\\
\Leftrightarrow\ &P=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}=\frac{y^2}{x+y}+\frac{z^2}{y+z}+\frac{x^2}{z+x}=Q.
\end{aligned}$$

Đặt $P = \dfrac{x^2}{x+y} + \dfrac{y^2}{y+z} + \dfrac{z^2}{z+x},\ Q = \dfrac{y^2}{x+y} + \dfrac{z^2}{y+z} + \dfrac{x^2}{z+x}$ thì $P = Q$.

Suy ra

$$\begin{aligned}
&2P = P+Q = \frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{x+z}\\
\Leftrightarrow\ &2P \geqslant \frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(y+z)+\frac{1}{2}(z+x)\\
\Leftrightarrow\ &P \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z) \quad \text{(đpcm)}.
\end{aligned}$$

3 Sử dụng các số hạng hằng số

Trong mục này chúng ta trình bày cách sử dụng hằng số chứng minh một số bất đẳng thức có điều kiện.
Trước hết ta xét bài toán sau:
Ví dụ 1. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Giải

Ta có

$$a^3 + b^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geqslant 3 \cdot ab \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}ab,$$

tương tự

$$b^3 + c^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{3}bc,$$

$$c^3 + a^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{3}ca.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức ta thu được

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{1}{\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{3}(ab + bc + ca) = \sqrt{3},$$

suy ra $\quad a^3 + b^3 + c^3 \geqslant \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad$ (đpcm).

Từ cách giải trên ta xây dựng phương pháp giải bài toán loại này như sau:
Bước 1. Cho $a = b = c$ thay vào điều kiện để xác định a, b, c bằng bao nhiêu?
Bước 2. Sử dụng bất đẳng thức Côsi với $n = 2, 3, 4, 5\ldots$ thích hợp cùng với các số hạng hằng số xác định ở bước 1 để mô tả điều kiện hoặc biểu thức trong bất đẳng thức.

Ví dụ 2. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a^4 + b^4 + c^4 = 48$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = ab^2 + bc^2 + ca^2.$$

Giải

Ta có

$$a^4 + b^4 + b^4 + 2^4 \geqslant 4 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot 2 = 8ab^2,$$
$$b^4 + c^4 + c^4 + 16 \geqslant 8bc^2,$$
$$c^4 + a^4 + a^4 + 16 \geqslant 8ca^2.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$3(a^4 + b^4 + c^4) + 48 \geqslant 8 \cdot P$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 48 \geqslant 8 \cdot P \Leftrightarrow P \leq 24$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.
Vậy $P_{max} = 24$

Ví dụ 3. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a + b + c = 3abc$.
Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5} \geqslant 3.$$

Giải

Ta có $a + b + c = 3abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = 3$ và

$$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + 1 + 1 + 1 \geqslant \frac{5}{ab},$$
$$\frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5} + 1 + 1 + 1 \geqslant \frac{5}{bc},$$
$$\frac{1}{c^5} + \frac{1}{a^5} + 1 + 1 + 1 \geqslant \frac{5}{ca}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức ta thu được

$$2\left(\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5}\right) + 9 \geqslant 5\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 15,$$

suy ra $\dfrac{1}{a^5} + \dfrac{1}{b^5} + \dfrac{1}{c^5} \geqslant 3.$

Ví dụ 4. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{ab}{\sqrt[3]{(b+c)(c+a)}} + \frac{bc}{\sqrt[3]{(c+a)(a+b)}} + \frac{ca}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Chứng minh rằng

$$P = \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{ab}{\sqrt[3]{(c+a)(a+b)}}.$$

$$\frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{bc}{\sqrt[3]{(c+a)(a+b)}}.$$

$$\frac{c^3}{a+b} + \frac{a^3}{b+c} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{ca}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)}}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được

$$2P + \frac{3}{2} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{3}{2} \quad \textbf{(dpcm)}.$$

Ví dụ 5. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $\dfrac{a^2b}{c} + \dfrac{b^2c}{a} + \dfrac{c^2a}{b} = 3$.
Chứng minh rằng

$$P = \frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3} \geqslant 3.$$

Giải

Ta có

$$\frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + 1 \geqslant \frac{3a^2b^2}{bc} = \frac{3a^2b}{c}.$$

$$\frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3} + 1 \geqslant \frac{3b^2c}{a}.$$

$$\frac{c^6}{a^3} + \frac{a^6}{b^3} + 1 \geqslant \frac{3c^2a}{b}.$$

Cộng vế vơi vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$2P + 3 \geqslant 3 \cdot 3 \Leftrightarrow P \geqslant 3 \quad (\text{đpcm}).$$

Ví dụ 6. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{a^6}{b^2c^2} + \frac{b^6}{c^2a^2} + \frac{c^6}{a^2b^2} \geqslant 3.$$

Giải

Ta có

$$\frac{a^6}{b^2c^2} + \frac{b^6}{c^2a^2} + 1 + 1 \geqslant \frac{4ab}{c},$$
$$\frac{b^6}{c^2a^2} + \frac{c^6}{a^2b^2} + 1 + 1 \geqslant \frac{4bc}{a},$$
$$\frac{c^6}{a^2b^2} + \frac{a^6}{b^2c^2} + 1 + 1 \geqslant \frac{4ca}{b},$$

Suy ra

$$2P + 6 \geqslant 4 \cdot \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right).$$

Ta có

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant a + b + c = 3$$

Suy ra $2P + 6 \geqslant 4 \cdot 3 = 12 \Rightarrow P \geqslant 3$ (đpcm).

Ví dụ 7. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng

$$P = \sqrt[3]{a^9 + 2} + \sqrt[3]{b^9 + 2} + \sqrt[3]{c^9 + 2} \geqslant 3\sqrt[3]{3}.$$

Giải

Ta có

$$\sqrt[3]{a^9 + 1 + 1} \geqslant \sqrt[3]{3 \cdot a^3} = \sqrt[3]{3} \cdot a$$

Tương tự

$$\sqrt[3]{b^9 + 2} \geqslant \sqrt[3]{3} \cdot b \quad ,$$
$$\sqrt[3]{c^9 + 2} \geqslant \sqrt[3]{3} \cdot c \quad .$$

Suy ra

$$P \geqslant \sqrt[3]{3}(a + b + c) = 3\sqrt[3]{3} \quad (\text{đpcm}).$$

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1 Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng

$$P = a^5 + b^5 + c^5 \geqslant 3.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a^5 + a^5 + a^5 + 1 + 1 \geqslant 5a^3,$$
$$b^5 + b^5 + b^5 + 1 + 1 \geqslant 5b^3,$$
$$c^5 + c^5 + c^5 + 1 + 1 \geqslant 5c^3.$$

Suy ra $3(a^5 + b^5 + c^5) + 6 \geqslant 5(a^3 + b^3 + c^3)$

Thu được $P \geqslant 3$ (đpcm).

2. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 1$ .Chứng minh rằng

$$P = a^7 + b^7 + c^7 \geqslant \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a^7 + a^7 + a^7 + b^7 + b^7 + b^7 + (\frac{1}{\sqrt[6]{3}})^7 \geqslant \frac{7}{\sqrt[6]{3}}a^3b^3,$$

$$3b^7 + 3c^7 + (\frac{1}{\sqrt[6]{3}})^7 \geqslant \frac{7}{\sqrt[6]{3}}b^3c^3,$$

$$3c^7 + 3a^7 + (\frac{1}{\sqrt[6]{3}})^7 \geqslant \frac{7}{\sqrt[6]{3}}c^3a^3.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta thu được

$$6P + \frac{1}{\sqrt[6]{3}} \geqslant \frac{7}{\sqrt[3]{6}} \Rightarrow P \geqslant \frac{1}{\sqrt[6]{3}}.$$

3. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a^4+b^4+c^4 = 1$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a^4 + b^4 + b^4 + b^4 \geqslant 4ab^3\ ,$$
$$b^4 + c^4 + c^4 + c^4 \geqslant 4bc^3\ ,$$
$$c^4 + a^4 + a^4 + a^4 \geqslant 4ca^3.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên thu được $4P \leq 4 \Leftrightarrow P \leq 1$ và đạt được dấu đẳng thức khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Vậy $P_{max} = 1$.

4. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} \geqslant 3$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geqslant 3.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + 1 \geqslant 3 \cdot (\frac{a}{c}),$$
$$\frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} + 1 \geqslant 3 \cdot (\frac{b}{a}),$$
$$\frac{c^3}{a^3} + \frac{a^3}{b^3} + 1 \geqslant 3 \cdot (\frac{c}{b}).$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$2(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}) + 3 \geqslant 3 \cdot (\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}) \geqslant 9,$$

suy ra $\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{c^3} + \dfrac{c^3}{a^3} \geqslant 3$ (đpcm).

5. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a\sqrt{\dfrac{b}{c}} + b\sqrt{\dfrac{c}{a}} + c\sqrt{\dfrac{a}{b}} = 3$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} \geqslant 3.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+1+1\geqslant 4\cdot a\sqrt{\frac{b}{c}},$$
$$\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}+1+1\geqslant 4\cdot b\sqrt{\frac{c}{a}},$$
$$\frac{c^4}{a^2}+\frac{a^4}{b^2}+1+1\geqslant 4\cdot c\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$2P+6\geqslant 4\cdot 3\Leftrightarrow P\geqslant 3\qquad \text{(đpcm)}.$$

6. Với a,b,c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $ac+ab+1=3bc$

Chứng minh rằng

$$a^3b^3c^3+b^3+c^3\geqslant 3b^3c^3.$$

Hướng dẫn

Dễ dàng chứng minh được rằng
với $a,b,c>0, ab+bc+ca=3$ thì $a^3+b^3+c^3\geqslant 3$
Suy ra :

Với $ac+ab+1=3bc\Leftrightarrow a\cdot\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\cdot a=3$

ta có $a^3+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geqslant 3$ (đpcm).

7. Với a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{9}$,
chứng minh rằng

$$(2a+2b-c)^3+(2b+2c-a)^3+(2c+2a-b)^3\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hướng dẫn
Ta có hằng đẳng thức

$$(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2=9(a^2+b^2+c^2)=1$$

Đặt $x=2a+2b-c, y=2b+2c-a, z=2c+2a-b$ ta thu được bài toán đương đương: Với $x,y,z>0,\ x^2+y^2+z^2=1$, chứng minh rằng

$$P=x^3+y^3+z^3\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}},$$

Ta có

$$x^3 + x^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \geqslant 3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}x^2,$$

$$y^3 + y^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \geqslant \sqrt{3}y^2,$$

$$z^3 + z^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \geqslant \sqrt{3}z^2.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$2P + \frac{1}{\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{3}(x^2 + y^2 + z^2) = \sqrt{3} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{(đpcm)}.$$

8. Với $a, b, c > 0,\ a^4 + b^4 + c^4 = 3$, chứng minh rằng

$$ab^2 + bc^2 + c + a^2 \leq 4.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a^4 + b^4 + b^4 + 1 \geqslant 4ab^2\ .$$

$$b^4 + c^4 + c^4 + 1 \geqslant 4bc^2\ .$$

$$c^4 + 1 + 1 + 1 \geqslant 4c\ .$$

$$1 + a^4 + a^4 + 1 \geqslant 4a^2.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

9. Với $a, b, c, d > 0,\ \dfrac{ab}{cd} + \dfrac{bc}{da} + \dfrac{cd}{ab} + \dfrac{da}{bc} = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{b^2c^2d^2} + \frac{b^6}{c^2d^2a^2} + \frac{c^6}{d^2a^2b^2} + \frac{d^6}{a^2b^2c^2} \geqslant 4.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{a^6}{b^2c^2d^2} + \frac{b^6}{c^2d^2a^2} + 1 + 1 \geqslant \frac{4ab}{cd}\ ,$$

$$\frac{b^6}{c^2d^2a^2} + \frac{c^6}{d^2a^2b^2} + 1 + 1 \geqslant \frac{4bc}{da}\ ,$$

$$\frac{c^6}{d^2a^2b^2} + \frac{d^6}{a^2b^2c^2} + 1 + 1 \geqslant \frac{4cd}{ab}\ ,$$

$$\frac{d^6}{a^2b^2c^2} + \frac{a^6}{b^2c^2d^2} + 1 + 1 \geqslant \frac{4da}{bc}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

10. Với $a, b, c > 0$, $ab + bc + c + a = 4abc$, chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geqslant 3.$$

Hướng dẫn

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + 1 \geqslant \frac{3}{ab},$$
$$\frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + 1 \geqslant \frac{3}{bc},$$
$$\frac{1}{c^3} + 1 + 1 \geqslant \frac{3}{c},$$
$$\frac{1}{a^3} + 1 + 1 \geqslant \frac{3}{a}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$2P + 6 \geqslant 3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) = 3 \cdot \frac{(c + a + ab + bc)}{abc} = 12$$

$\Leftrightarrow P \geqslant 3$ (đpcm).

11. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + ab + bc + ca \geqslant 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{a^3}{b} + ab + a^2 \geqslant 3a^2,$$
$$\frac{b^3}{c} + bc + b^2 \geqslant 3b^2,$$
$$\frac{c^3}{a} + ca + c^2 \geqslant 3c^2.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh .

4 Bất đẳng thức côsi với biến số là biểu thức

Nếu coi biểu thức là biến số trong các dạng của bất đẳng thức Côsi, chúng ta sẽ thu được nhiều bài tập hay của bất đẳng thức . Trong mục này chúng ta xét một vài dạng quen thuộc.

Ví dụ 1. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1$. Chứng minh rằng $abc \leq \frac{1}{8}$.

Giải

Ta có

$$1 - \frac{a}{1+a} = \frac{1}{1+a} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geqslant 2\sqrt{\frac{bc}{(1+c)(1+c)}},$$

$$\frac{1}{1+b} = \frac{c}{1+c} + \frac{a}{1+a} \geqslant 2\sqrt{\frac{ca}{(1+c)(1+a)}},$$

$$\frac{1}{1+c} = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geqslant 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}.$$

Nhân vế với vế của bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geqslant \frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} \Leftrightarrow abc \leq \frac{1}{8} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 2. Với a, b, c, d là những số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} = 1.$$

Chứng minh rằng $abcd \leq \frac{1}{81}$.

Giải

Ta có

$$\frac{1}{1+a} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}.$$

$$\frac{1}{1+b} = \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} + \frac{a}{1+a} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{cda}{(1+c)(1+d)(1+a)}}.$$

$$\frac{1}{1+c} = \frac{d}{1+d} + \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{dab}{(1+d)(1+a)(1+b)}}.$$

$$\frac{1}{1+d} = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geqslant \frac{81abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}$$

$\Leftrightarrow abcd \leq \frac{1}{81}$. (đpcm) .

Ví dụ 3. Với $x_i > 0\,(i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+x_i} = 1)$, chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1}{(n-1)^n}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{1+x_k} = 1 - \frac{x_k}{1+x_k} = \sum_{1\leq i\neq k\leq n} \frac{x_i}{1+x_i} \geqslant (n-1)\Big(\prod_{1\leq i\neq k\leq n} \frac{x_i}{1+x_i}\Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$
Nhân vế với vế của n bất đẳng thức ta thu được

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geqslant (n-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+x_i}$$

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1}{(n-1)^n} \quad \text{(đpcm)}.$$

Đối với bất đẳng thức dạng này thì những trường hợp đặc biệt lại là những bài toán khó.

Ví dụ 4. Với a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} + \frac{3c}{1+c} = 1.$$

Chứng minh rằng $ab^2c^3 \leq \frac{1}{5^6}$

Giải

Áp dụng kết quả bài tập số 3 với điều kiện

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{c}{1+c} + \frac{c}{1+c} = 1$$

Ta thu được $a.b.b.c.c.c \leq \frac{1}{5^6}$ (đpcm) .

Do điều kiện $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+x_i} = 1$ có các số hạng dạng (bậc 1 / bậc 1) nên ta có thể xây dựng bài toán tương đương như sau:

Ví dụ 5. Với a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc.$$

Giải

Từ điều kiện suy ra $0 < a, b, c < 1$.

Đặt $x = \frac{a}{1-a}, y = \frac{b}{1-b}, z = \frac{c}{1-c}$

Suy ra $x, y, z > 0$ và $a = \frac{x}{1+x}, b = \frac{y}{1+y}, c = \frac{z}{1+z}$

Ta có

$$(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{1-a}\right) \cdot \left(\frac{b}{1-b}\right) \cdot \left(\frac{c}{1-c}\right) \leq \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow xyz \leq \frac{1}{8}.$$

Thu được bài toán tương đương:

Với $x, y, z > 0$ thoả mãn điều kiện $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} = 1$, chứng minh rằng

$$xyz \leq \frac{1}{8} \quad (\text{ Ví dụ 1 .})$$

Bài toán này có thể giải tự nhiên và đơn giản hơn như sau:
Bất đẳng thức tương đương với

$$(b+c)(c+a)(a+b) \geqslant 8abc$$

Ta có

$$(b+c)(c+a)(a+b) \geqslant 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}\cdot 2\sqrt{ab} = 8abc \quad (\text{đpcm}).$$

Ví dụ 6. Với $x_i > 0, i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-x_i} \leq \frac{1}{(n-1)^n}.$$

Giải

Từ điều kiện suy ra $0 < x_i < 1 (i = \overline{1,n})$
Đặt $y_i = \dfrac{x_i}{1-x_i} \Leftrightarrow x_i = \dfrac{y_i}{1+y_i}$, thu được bài toán tương đương
Với $y_i > 0, \sum_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{1+y_i} = 1$. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n} y_i \leq \frac{1}{(n-1)^n} \quad (\text{Ví dụ 3}).$$

Ta có thể giải cách khác như sau
Bất đẳng thức tương đương với

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1, k\neq i}^{n} x_k\Big) \geqslant (n-1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Ta có

$$\sum_{k=1, k\neq i}^{n} x_k \geqslant (n-1)\Big(\prod_{k=1, k\neq i}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}},$$

suy ra

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1, k\neq i}^{n} x_k\Big) \geqslant (n-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i \quad (\text{đpcm}).$$

Ví dụ 7. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $a + 2b + 3c = 1$. Chứng minh rằng

$$(1-a)(1-b)^2(1-c)^3 \geqslant 5^6 \cdot ab^2c^3.$$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết dưới dạng

$$\left(\frac{a}{1-a}\right)\left(\frac{b}{1-b}\right)^2\left(\frac{c}{1-c}\right)^3 \leq \frac{1}{5^6}$$

Đặt $x = \dfrac{a}{1-a}, y = \dfrac{b}{b-1}, z = \dfrac{c}{1-c}$

suy ra $a = \dfrac{x}{1+x}, b = \dfrac{y}{1+y}, c = \dfrac{z}{1+z}$

thu được bài toán tương đương

Với $x, y, z > 0$ thoả mãn điều kiện $\dfrac{x}{1+x} + \dfrac{2y}{1+y} + \dfrac{3z}{1+z} = 1$. Chứng minh rằng

$xy^2z^3 \leq \dfrac{1}{5^6}$ (Ví dụ 4).

Ta có thể giải bằng cách khác như sau

Bất đẳng thức tương đương với

$$(2b+3c)(a+b+3c)^2(a+2b+2c)^3 \geqslant 5^6 \cdot ab^2c^3$$

Ta có

$$2b + 3c \geqslant 5\sqrt[5]{b^2 \cdot c^3},$$
$$(a+b+3c)^2 \geqslant (5\sqrt[5]{abc^3})^2,$$
$$(a+2b+2c)^3 \geqslant (5\sqrt[5]{ab^2c^2})^3.$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức ta nhận được

$$(2a+3c)(a+b+3c)^2(a+2b+2c)^3 \geqslant 5^6 \cdot ab^2c^3 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 8. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}})^2 - (a^{\frac{4}{3}})^2 = (a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}})(b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}})$$

Suy ra

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2-(a^{\frac{4}{3}})^2\geqslant 8a^{\frac{2}{3}}bc$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2\geqslant a^{\frac{2}{3}}(8bc+a^2)$$

$$\Leftrightarrow a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\geqslant a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{8bc+a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}.$$

Tương tự

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\geqslant\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}},$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant\frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 9. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{b^4}{c\sqrt{5a^6+4b^3c^3}}+\frac{c^4}{a\sqrt{5b^6+4c^3a^3}}+\frac{a^4}{b\sqrt{5c^6+4a^3b^3}}\geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$(a^5+b^5+c^5)^2-(b^5+c^5)^2=a^5\cdot(a^5+2b^5+2c^5)\geqslant 5a^6bc$$

Suy ra

$$(a^5+b^5+c^5)^2\geqslant 5a^6bc+(b^5+c^5)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^5+b^5+c^5)^2\geqslant 5a^6b^2c^2+4b^5c^5$$

$$\Leftrightarrow (a^5+b^5+c^5)^2\geqslant b^2c^2(5a^6+4b^3c^3)$$

$$\Leftrightarrow (a^5+b^5+c^5)\geqslant bc\sqrt{5a^6+4b^3c^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^4}{c\sqrt{5a^6+4b^3c^3}}\geqslant\frac{b^5}{a^5+b^5+c^5}.$$

Tương tự

$$\frac{c^4}{a\sqrt{5b^6+4c^3a^3}} \geqslant \frac{c^5}{a^5+b^5+c^5}.$$

$$\frac{a^4}{b\sqrt{5c^6+4a^3b^3}} \geqslant \frac{a^5}{a^5+b^5+c^5}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $\frac{a}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$.
Chứng minh rằng $8a \leq bc$.

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{a}{1+b} + \frac{\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{b}} + \frac{\frac{1}{c}}{1+\frac{1}{c}} = 1$$

Áp dụng kết quả ví dụ 1 suy ra

$$a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow 8a \leq bc \quad \text{(đpcm)}.$$

2. Với $a, b > 0$ thoả mãn điều kiện $\frac{2a}{1+a} + \frac{3b}{1+b} = 1$. Chứng minh rằng $a^2b^3 \leq \frac{1}{4^5}$.

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{a}{1+a} + \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{b}{1+b} + \frac{b}{1+b} = 1$$

Áp dụng kết quả bài số 3 ta suy ra $a^2 \cdot b^3 \leq \frac{1}{4^5}$.

3. Với $a, b, c, d > 0$ thoả mãn điều kiện $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$80abcd + abc + abd + acd + bcd \leq ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

Hướng dẫn
Bất đẳng thức trên tương đương với

$$81abcd \leq 1-(a+b+c+d)+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)-$$
$$-(abc+abd+acd+bcd)+abcd$$
$$\Leftrightarrow 81abcd \leq (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{1-a}\right)\cdot\left(\frac{b}{1-b}\right)\cdot\left(\frac{c}{1-c}\right)\cdot\left(\frac{d}{1-d}\right) \leq \frac{1}{81}.$$

Đặt $x=\frac{a}{1-a}, y=\frac{b}{1-b}, z=\frac{c}{1-c}, t=\frac{d}{1-d}$
Thu được

$$a=\frac{x}{1+x}, b=\frac{y}{1+y}, c=\frac{z}{1+z}, d=\frac{t}{1+t}$$

Bài toán tương đương với bài toán sau
Với $x,y,z,t>0$ thoả mãn điều kiện $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}+\frac{t}{1+t}=1.$

Chứng minh rằng $xyzt \leq \frac{1}{81}$ (Xem ví dụ 2).

4. Với $a,b,c>0$ thoả mãn điều kiện $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}=1.$

Chứng minh rằng $8c^2 \leq ab^2.$
Hướng dẫn
Ta có

$$\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}+\frac{\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{b^2}}+\frac{c^2}{1+c^2}=1$$

Áp dụng kết quả bài số 1 suy ra

$$\frac{1}{ab^2}\cdot c^2 \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow 8c^2 \leq ab^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

5. Với $a,b,c>0$ thoả mãn điều kiện $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}=1.$ Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1+b}{a}-1\right)\left(\frac{1+c}{b}-1\right)\left(\frac{1+a}{c}-1\right) \geqslant 8.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$1-\frac{a}{1+b}=\frac{1+b-a}{1+b}=\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}\geqslant 2\sqrt{\frac{bc}{(1+c)(1+a)}},$$
$$1-\frac{b}{1+c}=\frac{1+c-b}{1+c}=\frac{a}{1+b}+\frac{c}{1+a}\geqslant 2\sqrt{\frac{ac}{(1+b)(1+a)}},$$
$$1-\frac{c}{1+a}=\frac{1+a-c}{1+a}=\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}\geqslant 2\sqrt{\frac{ab}{(1+b)(1+c)}}.$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức trên ta nhận được

$$(1+b-a)(1+c-b)(1+a-c)\geqslant 8abc$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1+b}{a}-1)(\frac{1+c}{b}-1)(\frac{1+a}{c}-1)\geqslant 8 \quad \text{(đpcm)}.$$

6. Với $a,b>0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt[3]{b^6+a^6+6b^5a}}+\frac{b^2}{\sqrt[3]{a^6+b^6+6a^5b}}\geqslant 1.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$(a^3+b^3)^3-(b^3)^3=a^3\cdot[(a^3+b^3)^2+b^6+b^3(a^3+b^3)]$$
$$=a^3[a^6+b^6+b^6+3a^3b^3+b^6]$$
$$=a^3[a^3b^3+a^6+b^6+b^6+b^6+a^3b^3+a^3b^3]$$
$$\geqslant a^3[a^3b^3+6a^2b^4]$$

$$(a^3+b^3)^3\geqslant b^3a^3[a^3+6a^2b]+b^9=b^3(a^6+6a^5b+b^6),$$

do đó $a^3+b^3\geqslant b\sqrt[3]{a^6+b^6+6a^5b}$,

hay $\dfrac{b^2}{\sqrt[3]{a^6+b^6+6a^5b}}\geqslant\dfrac{b^3}{a^3+b^3}$

Tương tự
$$\frac{a^2}{\sqrt[3]{b^6+a^6+6b^5a}} \geqslant \frac{a^3}{a^3+b^3}.$$
Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

5 Thay đổi bậc bất đẳng thức

Trong mục này chúng tôi trình bày một số phương pháp thay đổi bậc bất đẳng thức.

I. Thay đổi bậc nhờ bất đẳng thức một biến

Ví dụ 1. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca \geqslant 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+3} + \sqrt{b+3} + \sqrt{c+3} \leq 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Giải

Ta có

$$(a+3) + 4 \geqslant 2\sqrt{(a+3)4} \Leftrightarrow \sqrt{a+3} \leq \frac{a+7}{4}.$$

Tương tự $\sqrt{b+3} \leq \dfrac{b+7}{4}$, $\sqrt{c+3} \leq \dfrac{c+7}{4}$

Suy ra

$$\sqrt{a+3} + \sqrt{b+3} + \sqrt{c+3} \leq \frac{a+b+c+21}{4} \qquad (2.5.1)$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$a \leq \frac{a^2+1}{2}, b \leq \frac{b^2+1}{2}, c \leq \frac{c^2+1}{2}$$

Thu được

$$\frac{a+b+c+21}{4} \leq \frac{\frac{a^2+1}{2} + \frac{b^2+1}{2} + \frac{c^2+1}{2} + 21}{4} = \frac{a^2+b^2+c^2+45}{8} \qquad (2.5.2)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2+b^2+c^2+45}{8} \leq 2(a^2+b^2+c^2) \qquad (2.5.3)$$

$$\Leftrightarrow 15(a^2+b^2+c^2) \geqslant 45$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geqslant 3.$$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca \geqslant 3$, bất đẳng thức (2.5.3)đúng.
Từ (2.5.1), (2.5.2), (2.5.3) ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 2. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a+7} + \sqrt[3]{b+7} + \sqrt[3]{c+7} \leq 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

Giải

Ta có

$$(a+7) + 8 + 8 \geqslant 3\sqrt[3]{(a+7)8.8} = 12\sqrt[3]{a+7}$$

Suy ra $\sqrt[3]{a+7} \leq \dfrac{a+23}{12}$. Tương tự ta có

$$\sqrt[3]{b+7} \leq \frac{b+23}{12}, \sqrt[3]{c+7} \leq \frac{c+23}{12}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\sqrt[3]{a+7} + \sqrt[3]{b+7} + \sqrt[3]{c+7} \leq \frac{a+b+c+69}{12} \tag{2.5.4}$$

Ta có

$$a \leq \frac{a^4+1+1+1}{4} = \frac{a^4+3}{4}, b \leq \frac{b^4+3}{4}; c \leq \frac{c^4+3}{4}.$$

Suy ra

$$\frac{a+b+c+69}{12} \leq \frac{\dfrac{a^4+3}{4} + \dfrac{b^4+3}{4} + \dfrac{c^4+3}{4} + 69}{12} = \frac{a^4+b^4+c^4+285}{48} \tag{2.5.5}$$

Ta chứng minh

$$\frac{a^4+b^4+c^4+285}{48} \leq 2(a^4+b^4+c^4) \tag{2.5.6}$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4 \geqslant 3$$

Ta có

$$a^4 + b^4 + b^4 + 1 \geqslant 4ab^2,$$
$$b^4 + c^4 + c^4 + 1 \geqslant 4bc^2,$$
$$c^4 + a^4 + a^4 + 1 \geqslant 4ca^2.$$

Cộng các bất đẳng thức ta thu được
$3(a^4 + b^4 + c^4) + 3 \geqslant 4(ab^2 + bc^2 + ca^2) = 12$
$\Leftrightarrow (a^4 + b^4 + c^4) \geqslant 3$, bất đẳng thức (2.5.6)đúng.
Từ các bất đẳng thức (2.5.4); (2.5.5); (2.5.6) suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 3. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện
$\sqrt{a+b+2} + \sqrt{b+c+2} + \sqrt{c+a+2} = 6$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3$$

Giải

Ta có $(a+b+2) + 4 \geqslant 2\sqrt{(a+b+2)4}$

Suy ra $\sqrt{a+b+2} \leq \dfrac{a+b+6}{4}$. Tương tự ta có

$$\sqrt{b+c+2} \leq \frac{b+c+6}{4},$$

$$\sqrt{c+a+2} \leq \frac{c+a+6}{4}.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt{a+b+2}+\sqrt{b+c+2}+\sqrt{c+a+2} \leq \frac{2(a+b+c)+18}{4} \leq \frac{a^2+b^2+c^2+21}{4}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3$ (đpcm).

II. Thay đổi bậc căn thức

Ví dụ 4. Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Giải

Ta có
$a+b+c \geqslant 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow \dfrac{2}{a+b+c} \leq \dfrac{1}{\sqrt{a(b+c)}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b+c}} \geqslant \dfrac{2a}{a+b+c}$.
Tương tự ta thu được

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geqslant \frac{2b}{a+b+c}$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geqslant \frac{2c}{a+b+c}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2 \quad \text{(đpcm)}.$$

Dấu đẳng thức không thể xảy ra, vì nó chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} a = b + c, \\ b = c + a, \\ c = a + b. \end{cases} \to a+b+c = 2(a+b+c) \text{ không thể xảy ra vì } \quad a, b, c > 0.$$

Ví dụ 5. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Giải

Đặt $\sqrt[3]{a} = \sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{b} = \sqrt{\beta}$, $\sqrt[3]{c} = \sqrt{\gamma}$ ta thu được

$$\Leftrightarrow a^2 = \alpha^3,\ b^2 = \beta^3,\ c^2 = \gamma^3 \Leftrightarrow a = \alpha^{3/2},\ b = \beta^{3/2},\ c = \gamma^{3/2}$$

Ta chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}} \tag{2.5.7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{(b+c)^2} \geqslant \frac{\alpha^3}{(\beta+\gamma)^3} \Leftrightarrow (\beta+\gamma)^3 \geqslant (b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^3 + \gamma^3 + 3\beta\gamma(\beta+\gamma) \geqslant b^2 + c^2 + 2bc \Leftrightarrow 3\beta(\beta+\alpha) \geqslant 2bc.$$

Ta có

$$3\beta\gamma(\beta+\gamma) \geqslant 6(\beta\gamma)^{3/2} = 6bc > 2bc.$$

Vậy bất đẳng thức (2.5.7)đúng, suy ra

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} > \sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}} + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma+\alpha}} + \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha+\beta}} > 2.$$

(Theo ví dụ 4).

Ví dụ 6. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{a+2c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}} > 2.$$

Giải

Ta có

$$a+b+c+d \geqslant 2\sqrt{a(b+c+d)},$$

Tương tự

$$a+b+c+d \geqslant 2\sqrt{b(c+d+a)},$$

$$a+b+c+d \geqslant 2\sqrt{c(d+a+b)},$$

$$a+b+c+d \geqslant 2\sqrt{d(a+b+c)}.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

Chọn $d=c$ ta thu được

$$\sqrt{\frac{a}{b+2c}}+\sqrt{\frac{b}{a+2c}}+2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}} > 2 \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 7. Với a,b,c,d là những số thực dương, chứng minh rằng

$$Q=\sqrt[3]{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt[3]{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

Giải

Đặt $\sqrt[3]{a}=\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{b}=\sqrt{\beta}$, $\sqrt[3]{c}=\sqrt{\gamma}$, $\sqrt[3]{d}=\sqrt{\theta}$

Ta chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c+d}} \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\theta}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{(b+c+d)^2} \geqslant \frac{\alpha^3}{(\beta+\gamma+\theta)^3}$$

$$\Leftrightarrow (\beta+\gamma+\theta)^3 \geqslant (b+c+d)^2$$

$$\Leftrightarrow (\beta+\gamma)^3+\theta^3+3\theta(\beta+\gamma)(\theta+\beta+\gamma) \geqslant b^2+c^2+d^2+2(bc+cd+db)$$

$$\Leftrightarrow P = 3\beta\gamma(\beta+\gamma)+3\theta\beta(\theta+\beta)+3\theta\gamma(\theta+\gamma)+6\beta\gamma\theta \geqslant 2(bc+cd+db).$$

Vì $\beta^3=b^2$, $\gamma^3=c^2$, $\theta^3=d^2$. Ta có

$$3\beta\gamma(\beta+\alpha) \geqslant 6(\beta\gamma)^{3/2}=6bc > 2bc,$$

$$3\theta\beta(\theta+\beta) \geqslant 6(\theta\beta)^{3/2}=6bd > 2bc,$$

$$3\theta\gamma(\theta+\gamma) \geqslant 6(\theta\gamma)^{3/2}=6cd > 2cd,\ 6\beta\gamma\theta > 0.$$

Suy ra $P > 2(bc+cd+db)$.

Tương tự có

$$\sqrt[3]{\frac{b}{c+d+a}} \geqslant \frac{\beta}{\gamma+\theta+\alpha},$$

$$\sqrt[3]{\frac{c}{d+a+b}} \geqslant \frac{\gamma}{\theta+\alpha+\beta}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{d}{a+b+c}} \geqslant \frac{\theta}{\alpha+\beta+\alpha}.$$

Vậy thu ta được

$$Q \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\theta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\gamma+\theta+\alpha}}+\sqrt{\frac{\gamma}{\theta+\alpha+\beta}}+\sqrt{\frac{\theta}{\alpha+\beta+\gamma}} > 2 \quad \text{(đpcm)}.$$

Từ kết quả của ví dụ ta thu được bất đẳng thức khó hơn sau đây

Ví dụ 8. Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+2c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a+2c}}+2\sqrt[3]{\frac{c}{a+b+c}} > 2.$$

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[4]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[4]{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Hướng dẫn

Đặt $\sqrt[4]{a}=\sqrt{\alpha},\ \sqrt[4]{b}=\sqrt{\beta},\ \sqrt[4]{c}=\sqrt{\gamma}$

Suy ra $a=\alpha^2,\ b=\beta^2,\ c=\gamma^2$.

Ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} \geqslant \frac{\alpha^2}{(\beta+\gamma)^2} \Leftrightarrow (\beta+\gamma)^2 \geqslant b+c$$

$$\Leftrightarrow \beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma \geqslant b+c \Leftrightarrow 2\beta\gamma \geqslant 0 \quad \text{(Hiển nhiên đúng).}$$

2. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt[6]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[6]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[6]{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Hướng dẫn

Đặt $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[6]{b} = \sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[6]{c} = \sqrt[3]{\gamma}$.

3. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[5]{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Hướng dẫn

Đặt $\sqrt[5]{a} = \sqrt{\alpha}$, $\sqrt[5]{b} = \sqrt{\beta}$, $\sqrt[5]{c} = \sqrt{\gamma}$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}} \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{(b+c)^2} \geqslant \frac{\alpha^5}{(\beta+\gamma)^5}$$

$$\Leftrightarrow (\beta+\gamma)^5 \geqslant (b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^5 + \gamma^5 + 5\beta\gamma(\beta^3+\gamma^3) + 10\beta^2\gamma^2(\beta\gamma) \geqslant b^2 + c^2 + 2bc$$

$$\Leftrightarrow P = 5\beta\gamma(\beta^3+\gamma^3) + 10\beta^2\gamma^2(\beta+\gamma) \geqslant 2bc.$$

Ta có

$$P \geqslant 10(\beta\gamma)^{5/2} + 20(\beta\gamma)^{5/2} = 30bc > 2bc \quad \text{(đpcm)}.$$

4. Với $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1+a^2+2bc} + \sqrt{1+b^2+2ca} + \sqrt{1+c^2+2ab} \leq 6.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$(1+a^2+2bc) + 4 \geqslant 2\sqrt{4(1+a^2+2bc)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+a^2+2bc} \leq \frac{a^2+2bc+5}{4}.$$

Tương tự

$$\sqrt{1+b^2+2ca} \leq \frac{b^2+2ca+5}{4},$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+c^2+2ab} \leq \frac{c^2+2ab+5}{4}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt{1+a^2+2bc} + \sqrt{1+b^2+2ca} + \sqrt{1+c^2+2ab} \leq \frac{15+(a+b+c)^2}{4} = 6 \text{ (đpcm)}.$$

5. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b+2c}} + \sqrt[4]{\frac{b}{a+2c}} + 2\sqrt[4]{\frac{c}{a+b+c}} > 2. \qquad (2.5.8)$$

Hướng dẫn Ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

Đặt $a = \alpha^2, b = \beta^2, c = \gamma^2, d = \lambda^2.$
Ta chứng minh

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b+c+d}} \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\lambda}} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c+d} \geqslant \frac{\alpha^2}{(\beta+\gamma+\lambda)^2}$$

$\Leftrightarrow (\beta+\gamma+\lambda)^2 \geqslant b+c+d \Leftrightarrow 2(\beta\gamma+\gamma\lambda+\lambda\beta) \geqslant 0$ (Hiển nhiên đúng) .

Suy ra

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt[4]{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt[4]{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt[4]{\frac{d}{a+b+c}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\lambda}} + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma+\lambda+\alpha}} + \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda+\alpha+\beta}} + \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+\beta+\gamma}} \geqslant 2.$$

Chọn $c = d$ ta thu được (2.5.8).