

Chọn điểm rơi trong Bất Đẳng Thức Cô-Si

Trong khi học Bàn về kiến thức về mảng bất đẳng thức thì bất đẳng thức Cô-Si là một trong những bất đẳng thức cơ bản nhất. Tuy nhiên trong khi giải bài tập để dùng được bất đẳng thức này một cách linh hoạt hơn thì ta phải dùng đến một phương pháp gọi là phương pháp chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cô-Si.

Khi áp dụng bất đẳng thức Cô-Si trong các bài toán tìm cực trị thì việc lựa chọn tham số để tại đó dấu = xảy ra là điều quan trọng và khó khăn nhất. Đôi lúc trong các bài toán khi các biến bị giới hạn bởi một điều kiện nào đó thì khi áp dụng trực tiếp sẽ dẫn đến nhiều sai lầm. Vì thế trong chuyên mục nhỏ này tôi muốn trình bày những phương pháp cụ thể để bạn có thể tìm được tham số phù hợp.

Bài toán 1: Cho các số dương x, y, z sao cho $x+y+z=1$. Tìm các giá trị nhỏ nhất:

- a. $A = x^2 + y^2 + z^2$
- b. $B = x^2 + y^2 + 3z^2$
- c. $C = x^2 + 2y^2 + 3z^2$
- d. $D = ax^2 + by^2 + cz^2$

Giải:

a. Bài này khá đơn giản chắc bạn nào cũng đều biết nó. Tuy nhiên dùng bài này minh họa cho việc lựa chọn tham số theo mình là phù hợp nhất.

Vì vai trò các biến x, y, z là như nhau nên ta có thể dự đoán được dấu = xảy ra tại $x=y=z=1/3$. Nên ta có như sau:

$$x^2 + \alpha^2 \geq 2x\alpha \text{ (dấu = xảy ra khi } \alpha = x = 1/3)$$

Như vậy ta áp dụng như sau:

$$\begin{aligned} x^2 + 1/9 &\geq 2x/3 \\ y^2 + 1/9 &\geq 2y/3 \\ z^2 + 1/9 &\geq 2z/3 \end{aligned} \text{ cộng dồn lại rồi suy ra.}$$

b. Như bài trên mình đã nói lên một ý tưởng là thêm vào các biệt số phụ như α chẳng hạn. Và phương pháp thêm này nói chung rất hiệu quả và triệt để cho các bài toán dạng này.

Ta thấy vai trò của x, y là như nhau nên ta có thể dự đoán được dấu = xảy ra $x=y$. Ta cần chọn các biệt số phụ sao:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{\alpha^2} &\geq 2\frac{x}{\alpha} \text{ (dấu = xảy ra khi } x = \frac{1}{\alpha}) \\ y^2 + \frac{1}{\alpha^2} &\geq 2\frac{y}{\alpha} \text{ (dấu = xảy ra khi } y = \frac{1}{\alpha}) \\ 3z^2 + \frac{1}{\beta^2} &\geq 2\frac{z\sqrt{3}}{\beta} \text{ (dấu = xảy ra khi } z = \frac{1}{\beta\sqrt{3}}) \end{aligned}$$

Và mục đích của các biệt số phụ sao cho khi ta cộng dồn lại chỉ xuất hiện $x+y+z$. Nên ta có

$$\frac{2}{\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{\beta} \text{ suy ra: } \beta = \sqrt{3}\alpha (*)$$

Đồng thời với các điều kiện dấu bằng và (*) các bạn sẽ tìm được các biệt số phụ như ý muốn.

c. Để thấy thêm sự hiệu quả thì câu c điều kiện các tham số đó không ràng buộc. Ta chọn các biệt số phụ sao cho:

$$x^2 + \alpha^2 \geq 2x\alpha \text{ (đấu = xảy ra tại } x = \alpha)$$

$$2y^2 + \beta^2 \geq 2y\sqrt{2}\beta \text{ (đấu = xảy ra tại } y = \frac{\beta}{\sqrt{2}})$$

$$3z^2 + \gamma^2 \geq 2z\sqrt{3}\gamma \text{ (đấu = xảy ra tại } z = \frac{\gamma}{\sqrt{3}})$$

Và mục đích của các biệt số phụ khi ta cộng dồn lại chỉ xuất hiện $x+y+z$

$$\text{Vậy ta suy ra dễ dàng: } \alpha = \sqrt{2}\beta = \sqrt{3}\gamma (*)$$

Đồng thời với đấu = xảy ra và đk (*) bạn có thể tìm được biệt số.

d. Sang câu d đây là một dạng tổng quát của bài toán này. Tuy nhiên khi giải mà làm theo các bước trên thì thật là khó chịu và mất thời gian nhiều. Nay mình xin nói thêm đây là một cách rất hay chỉ cần 1 hay 2 dòng là ra các biệt số phụ liền. Tuy nhiên các bạn phải hiểu rõ các cách trên vì đây chỉ là một cách suy ra từ pp trên mà thôi.

$$ax^2 = by^2 = cz^2 = \alpha \text{ như vậy bạn chỉ cần rút } x, y, z \text{ theo } \alpha \text{ rồi thế vào điều kiện là có thể ra được điểm rơi.}$$

Ngoài ra với bài toán trên nó không chỉ giới hạn ở mức độ nhỏ đó đâu mà nó còn nâng lên bậc cao m, n, k của x, y, z bất kỳ cộng với điều kiện có thể tổng quát hơn: $a_1x + b_1y + c_1z \geq d_1$. Mà cách giải vẫn không mấy thay đổi (tuy nhiên đều là số nguyên)

Bài toán 2: Cho x, y, z là các số dương thỏa $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị lớn nhất:

a. $A = x^2 + y^2 + 2z^2$

b. $B = x^2 + y^2 + az^2$

c. $C = a(x^2 + y^2) + z^2$

d. $D = ax^2 + by^2 + cz^2$

Giải:

Những bài này chúng ta cũng sẽ và có chung một hướng đi giải quyết đó:

a. $1 = a+b, 1 = c+d, 2 = e+f$ (trong đó a, b, c, d, e, f có là các số sẽ tìm được)

Ta có:

$$ax^2 + cy^2 \geq 2xy\sqrt{ac} \quad ax^2 = cy^2$$

$$bx^2 + ez^2 \geq 2xz\sqrt{eb} \text{ đấu = xảy ra khi: } bx^2 = ez^2$$

$$dy^2 + fz^2 \geq 2yz\sqrt{df} \quad dy^2 = fz^2$$

$$\text{Suy ra: } ade = bcf$$

$$\text{Và mục đích của các biệt số này là có thể đưa về dạng } xy + yz + zx. \text{ Nên khi đó: } ac = eb = df = \alpha$$

Như vậy ta được hệ phương trình sau:

$$ac = eb = df = \alpha$$

$$abd = cef$$

$$a+b=1$$

$$c+d=1$$

$$e+f=2$$

Hệ trên 6 phương trình tương ứng với 6 ẩn số các bạn hoàn toàn có thể giải được có điều hơi dài. Tuy nhiên trong trường hợp bài toán a,b,c chúng ta thấy rằng các biến x,y có tính đối xứng nay nên việc phân tích sẽ đơn giản hơn thế này a=c, b=d, e=f. Như vậy thì đơn giản hơn đúng không?

Còn trường hợp ở bài cuối cùng khá tổng quát thì việc giải nó sẽ khó khăn đôi chút. Nhưng có một phương pháp rất hay và mới:

Xét biểu thức:

$$(a+b)(c+d)(d+f) = ace + ade + bce + bde + acf + adf + bcf + dbf = \alpha(a+b+c+d+e+f) + 2ade$$

Với $ade = \sqrt{\alpha^3}$

Như vậy ta được hệ phương trình bậc 3 theo α trong đó α là nghiệm dương nhỏ nhất. Từ đây bạn có thể tính ra α suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức mà không cần phải giải a,b,c,d,e,f.

Bài toán 3: Cho x,y,z là các số dương, thỏa: x+y+z=1. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx} \\ B &= \sqrt{xy} + 2\sqrt{yz} + 3\sqrt{xz} \\ C &= a\sqrt{xy} + b\sqrt{yz} + c\sqrt{xz} \end{aligned}$$

Với các dạng bài này thì phương pháp cũng tương tự nhau nên dành cho các bạn vậy! Xem như đây là một bài luyện tập

Ngoài ra đôi lúc trong việc tìm cực trị của bài toán không phải là ta nhìn đã thấy được đó là điểm rơi trong côsi mà nó còn kết hợp với phương pháp khác như đồng nhất thức, đạo hàm, v.v... Và chính điều này nó làm tăng thêm phần hay và đẹp của điểm rơi trong Cô-Si. Qua bài viết này mong các bạn sẽ hiểu rõ hơn về bất đẳng thức Cô-Si.