.:: Kĩ thuật Cô-si Ngược Dấu ::.

Augustin Louis Cauchy (đôi khi tên họ được viết **Cô-si**) là một nhà toán học nổi tiếng người Pháp. Cauchy sinh ngày 21 tháng 8 năm 1789 tại Paris và mất ngày 23 tháng 5 năm 1857 cũng tại Paris. Ông vào học Trường Bách Khoa Pháp (*École Polytechnique*) lúc 16 tuổi. Năm 1813, ông từ bỏ nghề kỹ sư để chuyên lo về toán học. Ông dạy toán ở Trường Bách Khoa và thành hội viên Hàn Lâm Viện Khoa Học Pháp.Công trình lớn nhất của ông là lý thuyết hàm số với ẩn số tạp. Ông cũng đóng góp rất nhiều trong lãnh vực toán tích phân và toán vi phân. Ông đã đặt ra những tiêu chuẩn Cauchy để nghiên cứu về sự hội tụ của các dãy trong toán học.

Một trong số những thành công của ông được nhiều người biết tới nhất là BĐT **Cô-si** ,một bất đẳng thức rất quen thuộc và được sử dụng hầu hết trong các bài toán chứng minh BĐT. Xoay quanh BĐT Côsi rất nhiều kỹ thuật ứng dụng nó như : Chọn điểm rơi, Hệ số bất định , Cauchy ngược dấu , … Thông qua các bài toán dưới đây, hy vọng sẽ giúp bạn đọc hiểu rõ hơn về **kĩ thuật Cô-si ngược dấu** trong chứng minh BĐT. Đầu tiên chúng ta hãy bắt đầu bằng một bài toán chọn đội tuyển của **Bulgarian**.

Bài toán 1: Cho a,b,c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. CMR:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

(Bulgarian TST 2003)

Phần lớn những người giải bài toán này đều có lời giải 1 như sau :

Lời giải 1:

. Quy đồng mẫu số, BĐT : $\Leftrightarrow 2(a^3c^2 + b^3a^2 + c^3b^2 + a^3 + b^3 + c^3 + ac^2 + ba^2 + cb^2 + a + b + c) \geq 3(a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2)$

. Thay $a + b + c = 3$, ta có thể chứng minh bất đẳng thức nhờ Cô-si :

$\frac{3}{2}(a^3c^2 + ac^2) \geq 3c^2a^2$, Tương tự với 2 hoán vị .

$a^3 + a^3 + 1 \geq 3a^2$, Tương tự với 2 hoán vị .

$$\frac{3}{2}(a^3c^2 + b^3a^2 + c^3b^2 + ac^2 + ba^2 + cb^2) \geq \frac{1}{2}.6.a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{4}{3}}.c^{\frac{4}{3}} \geq 3.a^2.b^2.c^2$$

. Bất đẳng thức cuối cùng đúng là do $abc \leq 1$ (được suy ra từ $a + b + c = 3$ & Bđt côsi cho 3 số)

Lời giải 2:

. Sử dụng kĩ thuật Cô-si ngược dấu .

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow a-\frac{a}{b^2+1}+b-\frac{b}{c^2+1}+c-\frac{c}{a^2+1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{ab^2}{b^2+1}+\frac{bc^2}{c^2+1}+\frac{ca^2}{a^2+1} \leq \frac{3}{2} \ (*)$$

Do $a^2 + 1 \geq 2a$ (BĐT Cô-si). Tương tự với 2 hoán vị $\Rightarrow$ Ta có :

$\mathbf{VT}_{(*)} \leq \frac{1}{2}(ab + bc + ca)$

. Mặt khác : $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$ (Chứng minh bằng biến đổi tương đương) . Nên :

$\mathbf{VT}_{(*)} \leq \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \leq \frac{1}{2}.\frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{3}{2}$.

Lời giải 2 được trình bày rất đơn giản và dễ hiểu. Một mở rộng tự nhiên, ta có bài toán 2 ↓

Bài toán 2: Cho a,b,c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. CMR:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Lời giải:

. Ta có :

$$a - \frac{a}{a+b^2} = \frac{ab^2}{a+b^2} \le \frac{\sqrt{a}\,b}{2}$$, Tương tự với 2 hoán vị .

$$\Rightarrow (a+b+c) - \mathbf{VT_{(1)}} = \frac{\sqrt{a}.b + \sqrt{b}.c + \sqrt{c}.a}{2}$$

$$\le \frac{\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}}{2} \le \frac{1}{2}.\sqrt{(a+b+c)\frac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow \mathbf{VT_{(1)}} \ge (a+b+c) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$ (Bđt được cm)

Bài toán 3: CM bất đẳng thức sau:

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) + 2\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}\right) \ge 9$$

Trong đó a, b, c là các số không nhỏ hơn 1

Lời giải:

. Sử dụng bđt Cô-si ở mẫu số . Ta có :

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} = 1 - \frac{a^2}{1+a^2} + 1 - \frac{b^2}{1+b^2} + 1 - \frac{c^2}{1+c^2} \ge 1 - \frac{a}{2} + 1 - \frac{b}{2} + 1 - \frac{c}{2}$$

$\Rightarrow$ **VT** $\ge 2(ab+bc+ca) + 6 - (a+b+c) = a(b+c-1) + b(c+a-1) + c(a+b-1) + 6 \ge 9.$

(Bất đẳng thức cuối đúng do a, b, c là các số không nhỏ hơn 1)

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài toán 4: CMR: Với mọi a, b, c, d dương. Ta luôn có :

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \ge \frac{a+b+c+d}{3}$$

Gợi ý: Ta có :

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \ge a - \frac{ab^2}{2ab} = a - \frac{b}{2}$$ (Do $a^2 + b^2 \ge 2ab$)

Tương tự với 2 hoán vị còn lại $\Rightarrow$ BĐT đã cho được chứng minh .

Bài toán 5: Cho a,b,c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. CMR:

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \ge 1$$

Gợi ý:

. Một cách tương tự. Ta có :

$$\frac{a^2}{a+2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a+2b^2} \ge a - \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} = a - \frac{2(ab)^{\frac{2}{3}}}{3}$$ Tương tự với 2 hoán vị

. Tiếp theo ta chứng minh :

$$a+b+c - \frac{2}{3}\left[(ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}}\right] \ge 1$$

Nhờ vào nhận xét sau : Sử dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương

$$(ab)^{\frac{2}{3}} \le \frac{a+ab+b}{3}$$ Tương tự với 2 hoán vị còn lại.

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức được cm.

Bài toán 6: Cho a,b,c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. CMR:

$$\frac{a^2}{a + 2b^3} + \frac{b^2}{b + 2c^3} + \frac{c^2}{c + 2a^3} \geq 1$$

Gợi ý:

. Biến đổi đại diện:

$$\frac{a^2}{a + 2b^3} = a - \frac{2ab^3}{a + 2b^3} \geq a - \frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}} = a - \frac{2b\sqrt[3]{a^2}}{3}$$

. Tiếp theo ta chứng minh :

$$a + b + c - \frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2}\right) \geq 1$$

Nhờ vào nhận xét sau : . $3ba^{\frac{2}{3}} \leq b(a + a + 1) = b(2a + 1) = 2ab + b$ Tương tự với 2 hoán vị còn lại.

. $ab + bc + ca \leq \dfrac{(a + b + c)^2}{3}$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức được cm.

. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài toán 7: Cho a,b,c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$

$$\frac{a + 1}{b^2 + 1} + \frac{b + 1}{c^2 + 1} + \frac{c + 1}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

Gợi ý:

. Biến đổi đại diện:

$$\frac{a + 1}{b^2 + 1} = a + 1 - \frac{(a + 1)b^2}{b^2 + 1} \geq a + 1 - \frac{(a + 1)b^2}{2b} = a + 1 - \frac{ab + b}{2}$$

. Sử dụng bất đẳng thức : $ab + bc + ca \leq \dfrac{(a + b + c)^2}{3}$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức được cm.

- -

Một số bài tập tương tự dưới đây xin dành lại cho bạn đọc :

Bài tập 1: Cho a,b,c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. CMR :

$$\frac{a + b + c}{a^2 + abc} + \frac{a + b + c}{b^2 + abc} + \frac{a + b + c}{c^2 + abc} \geq \frac{9}{2}$$

(Đề thi thử ĐH môn Toán lần 2 – THPT Chuyên Nguyễn Huệ 2007 – 2008)

Bài tập 2: Cho a,b,c,d dương thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. CMR :

$$\frac{a + 1}{b^2 + 1} + \frac{b + 1}{c^2 + 1} + \frac{c + 1}{d^2 + 1} + \frac{d + 1}{a^2 + 1} \geq 4$$

Bài tập 3: Cho a,b,c,d dương thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. CMR :

$$\frac{a}{1 + b^2c} + \frac{b}{1 + c^2d} + \frac{c}{1 + d^2a} + \frac{d}{1 + a^2b} \geq 2$$

Bài viết trên có thể còn nhiều thiếu sót và mắc phải sai lầm . Tác giả rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp mang tính xây dựng qua hòm thư : **euclid1990@yahoo.com.vn** để không mắc phải những thiếu sót trong các *chuyên đề* sắp tới.

Bài viết có tham khảo một số tư liệu như : Tạp chí *Mathematical Reflections* và một số bài viết trên các Diễn Đàn về Toán Học Việt Nam.